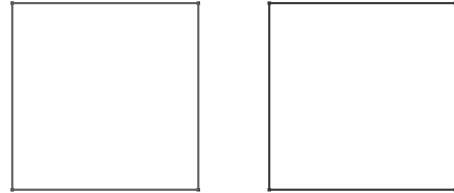


El arrastre

Proceso de apropiación de la herramienta “arrastre” en Cabri-géomètre a partir de una secuencia de situaciones didácticas

Angela María Restrepo S.
Universidad de los Andes
am.restrepo253@uniandes.edu.co



El arrastre

- Invalida las construcciones erróneas.
- Pone en evidencia los invariantes geométricos.
- Obliga a utilizar propiedades geométricas para construir una figura que resista a la prueba del arrastre.
- Brinda un “*milieu*” (Brousseau) rico en retroacciones que le pueden permitir al estudiante evolucionar en su estrategia de resolución.

El arrastre es fundamental para la geometría dinámica, pero...

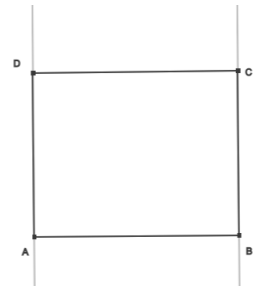
- Los estudiantes:
 - les cuesta validar su construcción, le piden permiso al profesor antes de arrastrar (Bellemain & Capponi 1992).
 - no siempre interpretan de manera geométrica lo que observan según lo que espera el maestro (Soury-Lavergne 1996; Balacheff & Sutherland 1999).

El arrastre es fundamental para la geometría dinámica, pero...

- Los profesores en formación:
 - De primaria, le dan más importancia a las propiedades espaciales que a las propiedades geométricas de la figura; arrastran muy poco para validar una construcción, lo hacen de manera local (Rolet, 1996 ; 1999).
 - De secundaria, utilizan más frecuentemente el arrastre para constatar, al arrastre para conjeturar o validar e invalidar una construcción (Tapan, 2006).

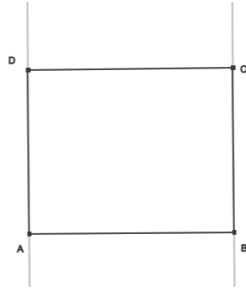
En los textos escolares

- Construcciones totalmente listas.
- “Arrastra, ¿qué observas?”
- seguido eventualmente de
 - “Formule una conjetura”
 - “Demuestre que ...”
- El arrastre se usa solamente para observar, no para investigar o explorar.




En los textos escolares

- A veces el arrastre propuesto en la actividad es parcial:
 - “arrastra los puntos A o B”
- En contradicción con las investigaciones y las innovaciones.



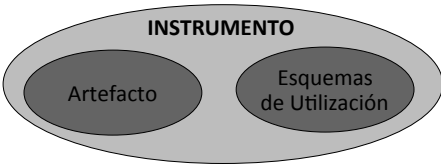
Tras estas constataciones



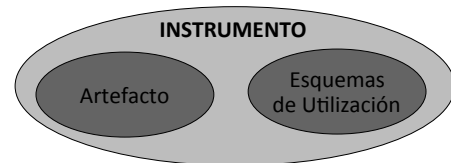
¿Cómo se apropian los estudiantes el arrastre?
¿Cuáles son las etapas en el proceso de apropiación del arrastre?

Teoría Instrumental (Rabardel, Artigue, Trouche)

- “Definimos el instrumento como una totalidad que comprende a la vez un artefacto (o una parte de un artefacto) y uno o varios esquemas de utilización.” (Rabardel, 1995)



Teoría Instrumental (Rabardel, Artigue, Trouche)



- El artefacto no es un instrumento terminado o completo, el instrumento resulta de una construcción del sujeto.
- A partir de un mismo artefacto, un mismo sujeto puede construir diferentes instrumentos.

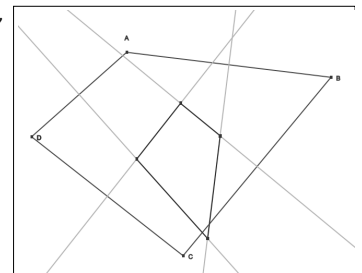
Teoría Instrumental (Rabardel, Artigue, Trouche)



- Durante la *génesis instrumental* se construyen los diferentes instrumentos asociados a un mismo artefacto.

Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Trabajos de Arzarello et al. (2002), Olivero (2002), Healy (2000)
- Arrastre errático (Wandering dragging)
- Arrastre limitado (Bound dragging)
- Arrastre blando (Guided dragging)
- Dummy locus dragging
- Arrastre sobre objeto (Linked dragging)
- Test del arrastre (Dragging test)



Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Al apoyarnos en la Teoría Instrumental distinguimos:
 - El uso del artefacto
 - El rol del arrastre según la finalidad matemática

Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Usos del artefacto:
 - Arrastre libre: arrastrar un punto libre por toda la pantalla.
 - Arrastre limitado (bound dragging): arrastrar puntos sobre objetos (segmento, recta, semi-recta...).
 - Arrastre indirecto: los puntos que no se pueden atrapar, solo se pueden mover al atrapar y arrastrar otro de manera indirecta.

Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Usos del artefacto:
 - *Foto-arrastre* o arrastre discreto:
“Modalidad que sugiere una secuencia discreta de imágenes durante el tiempo: el sujeto observa el estado inicial y final de la figura, sin prestar atención a las instancias intermedias. El objetivo es obtener una figura particular.” (Olivero, 2002)
 - *Cine-arrastre* o arrastre continuo:
“Modalidad que sugiere una película: el sujeto observa la variación de la figura mientras arrastra y las relaciones entre los elementos de la figura. El objetivo del arrastre es la variación de la figura en sí.” (Olivero, 2002)

Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Rol del arrastre según la finalidad matemática
 - Arrastre *sin finalidad matemática* (*wandering dragging*)
 - Arrastre para *ajustar*
 - Arrastre *blando* o arrastre *guiado* (*guided dragging*)
 - Arrastres *exploratorios*:
 1. Arrastre para *identificar los invariantes* de la figura
 2. Arrastre para *constatar las variaciones* durante el movimiento
 3. Arrastre para *encontrar la trayectoria* de un punto
 - Arrastres para *validar o invalidar*:
 1. Arrastre para *validar una construcción* (*dragging test*)
 2. Arrastre para *invalidar una construcción*
 3. Arrastre para *validar una conjetura/propiedad*

Preguntas de investigación

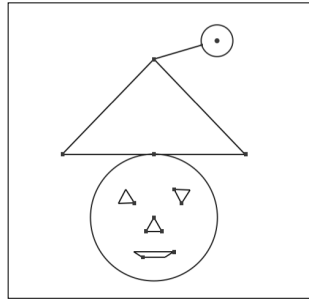
- ¿Qué instrumentos arrastre construyen los estudiantes durante la génesis instrumental?
 - ¿Cómo emergen y se organizan durante el tiempo?
 - ¿Cuál es la influencia de las situaciones?
- ¿Los estudiantes asumen la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre?

El contexto...

- Trabajamos con dos clases de 20-25 estudiantes de 6^{ème} – 1^{er} año de secundaria (11-12 años) en Francia.
- Trabajo colaborativo en parejas.
- Durante todo un año escolar, se acompañó el programa de matemáticas, cubriendo los temas de geometría
 - Serie de 15 situaciones durante un año escolar

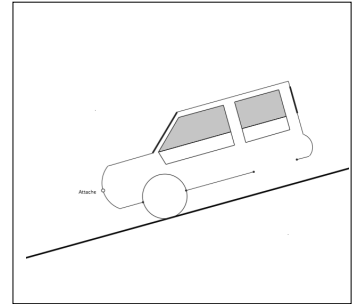
Geo

- Situación de introducción a Cabri y al arrastre.
- Simple exploración de la figura y de los posibles arrastres.



Un carro sin rueda

- Situación sencilla y de rápido entendimiento para los estudiantes.
- El contexto de la situación da sentido al arrastre.
- El arrastre permite que los estudiantes entren en el problema.



Un carro sin rueda

- Los estudiantes pueden anticipar el comportamiento del auto y la rueda durante el movimiento, lo cual no sucede en situaciones más matemáticas.
- Gracias a dicha anticipación, los estudiantes pueden invalidar las estrategias erróneas y continúan a buscar la solución.
- Permite introducir el arrastre para validar una construcción de una manera natural.

Sobre qué objeto?

- Identificar los objetos geométricos descritos por los puntos rojo y verde al arrastrarlos.
- Construir los objetos.
- Redactar un mensaje que permita reconstruir los mismos objetos utilizando solamente los puntos azules.

Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan?
 Construye esos objetos.
 Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.

Sobre qué objeto?

- El uso de la geometría dinámica permitió revelar concepciones de los estudiantes:
 - “una recta está definida por dos puntos que se encuentran lo suficientemente lejos el uno del otro”;
 - “la recta que pasa por 3 puntos está determinada por esos 3 puntos”

Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan?
 Construye esos objetos.
 Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.

A veces/Siempre verdadero

- Los estudiantes abren el archivo y ven tres dibujos en una posición tal que: $(GD) \perp (BC)$, $(GD) \parallel (FE)$ et $(GF) \parallel (BC)$
- Los estudiantes deben responder a las preguntas:
 - $(DG) \perp (BC)$?
 - $(DG) \parallel (EF)$?

Para cada una de la figuras siguientes, debes decidir si:
 (DG) y (BC) son perpendiculares?
 (DG) y (EF) son paralelas?

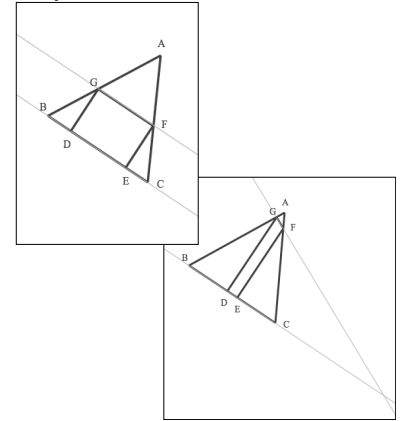
A veces/Siempre verdadero

- Los estudiantes deben utilizar el arrastre para decidir de la validez de las propiedades geométricas.
- Puesta en común: cuando se puede decir que una propiedad geométrica es verdadera o falsa.

Nom Prénom :		Classe :		Date :	
Activité "TROIS COULEURS"					
Figure Bleue		Réponse	Note les points que tu déplaces		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?					
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?					
Figure Verte		Réponse	Note les points que tu déplaces		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?					
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?					
Figure Rose		Réponse	Note les points que tu déplaces		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?					
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?					

A veces/Siempre verdadero

- Arrastran para validar una propiedad/conjetura.
- Buscan un dibujo contra-ejemplo al arrastrar.



A veces/Siempre verdadero

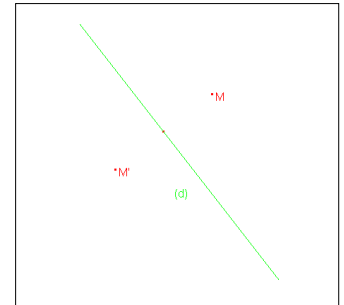
- Situación clave en el proceso de apropiación del arrastre, permitió:
 - La aparición del dibujo contra-ejemplo por arrastre.
 - La socialización de este uso en clase.
 - Que el profesor institucionalizara la importancia de arrastrar TODOS los puntos de la figura para decidir de la validez de las propiedades.
- El paralelismo lo reconocen mas fácilmente que la perpendicularidad.

Simetría

Construir una recta (d), un punto M que no pertenezca a (d) y el simétrico de M con respecto a (d):

1. Utilizando la herramienta de Cabri (explorar y constatar las propiedades de la simetría)
2. En papel y lápiz
3. Sin utilizar la herramienta "Simetría axial"

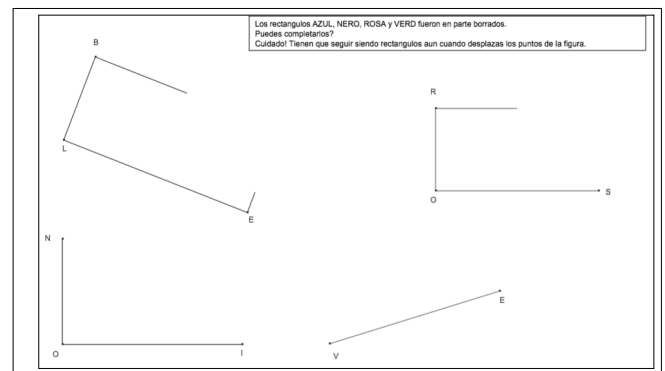
La primera experiencia permite a los estudiantes invalidar la construcción (3) por sí mismos



Simetría

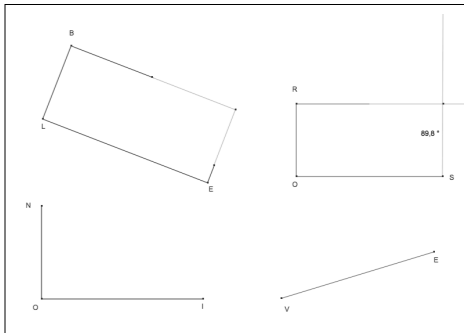
- Dificultad para identificar las propiedades geométricas de la simetría
 - Equidistancia al eje/ Perpendicularidad
 - "Todo se mueve", "Todo menos el punto M"
- Como "unir un punto a otro" para que se muevan al tiempo

Completa los rectángulos



Completa los rectángulos

- Estrategias utilizadas por los estudiantes :
 - Por pedazos
 - Dirección
 - Ajustar por arrastre
 - Trazando rectas perpendiculares



Completa los rectángulos

- Muchos usan el arrastre para ajustar la construcción y satisfacer una condición.
- El arrastre para validar una construcción no operacional
 - Diferentes validaciones :
 - Medida de los lados
 - Medida de los ángulos
- Dificultad de los estudiantes a invalidar las construcciones, aunque algunos buscan un dibujo contra-ejemplo para argumentar

Algunas conclusiones

- El análisis puso en evidencia una gran variedad de usos del arrastre que no estaban previstos a priori.
- El arrastre permitió poner en evidencia concepciones de los estudiantes.

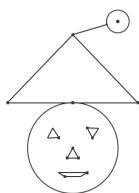
¿Cómo se organiza la construcción de los usos del arrastre en el tiempo en función de las situaciones a las cuales se enfrentan los estudiantes?

Génesis instrumentales

- Alex y Cloe
 - Mismo nivel matemático (medio-)
 - Génesis instrumentales muy diferentes
- Cedric e Iris

Génesis instrumentales: Geo

- Alex & Cloe
 - Arrastran las figuras globales y no los puntos inicialmente.
 - Reconocen los puntos gracias a la intervención de otro estudiante.



- Cedric & Iris
 - Exploración de todas las figuras y todos los puntos que se pueden arrastrar.

Génesis instrumentales : Sobre qué objeto?

- Alex & Cloe
 - Cloe no logra caracterizar la trayectoria de un punto, reconoce la trayectoria rectilínea

Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan?
Construye esos objetos.
Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.



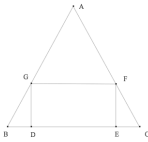
- Cedric & Iris
 - Empiezan a usar el arrastre para ajustar la construcción y que satisfaga una condición de manera espontánea

Génesis instrumentales : El mismo triángulo

Alex & Chloé :
 comienza a usar el arrastre para ajustar y obtener una condición deseada

Octubre
 Diciembre
 Marzo
 Mayo

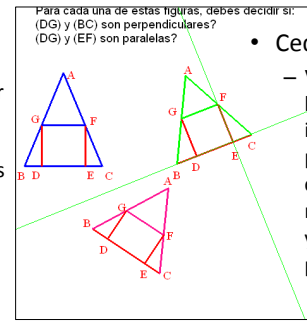
Explora la figura de la izquierda y reconstruyela a la derecha. Para ayudarte, el segmento (BC) ya ha sido trazado. Atención, las dos figuras deben ser iguales, hasta cuando los puntos se mueven.



Génesis instrumentales : A veces/Siempre verdadero

Alex & Cloe
 – Alex quisiera decidir a partir de los dibujos estáticos.
 – Cloe insiste: es necesario arrastrar para decidir de la validez de las propiedades geométricas.

Octubre
 Diciembre
 Marzo
 Mayo

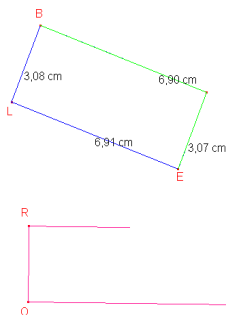


Cedric & Iris
 – Validación de las propiedades instrumentada por la construcción de rectas paralelas y perpendiculares

Génesis instrumentales : Completar los rectángulos

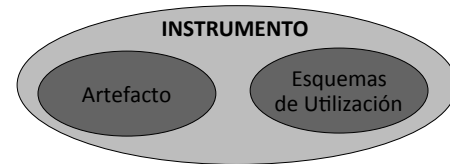
Alex & Cloe
 Estrategia de ajuste instrumentada por la medida
 – Uso del arrastre para validar necesita (aún!) la intervención del profesor

Octubre
 Diciembre
 Marzo
 Mayo



Cedric & Iris
 – Cambian los datos del problema
 – Una gran dificultad a invalidar su construcción
 – Intervención de un experto permite llegar a la estrategia ganadora

Instrumentos arrastre y esquemas



• Arrastre sin finalidad matemática

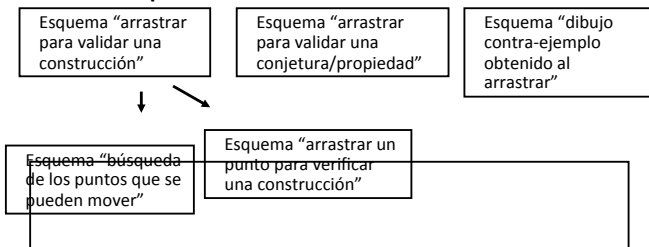
Esquema "arrastrar un punto"

Esquema "búsqueda de los puntos que se pueden mover"

Esquema "distinción de los diferentes tipos de puntos del programa"

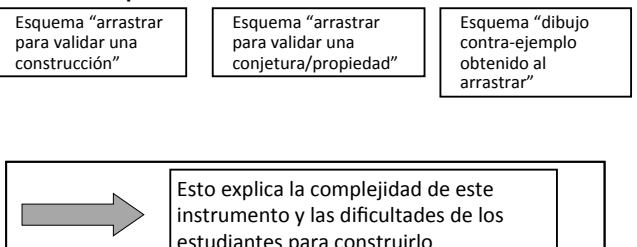
Arrastres para validar o invalidar

• Arrastre para validar una construcción :



Arrastres para validar o invalidar

• Arrastre para validar una construcción :



Génesis instrumentales

- Estudiantes de un mismo nivel escolar no tienen las mismas génesis instrumentales.
- Todos los estudiantes construyen el arrastre para ajustar, pero algunos no lo construyen tan rápidamente.
- El arrastre para invalidar aparece más temprano que el arrastre para validar.
- El arrastre para validar, más complejo, no lo alcanzan, pero se apoya en el esquema de "búsqueda de los puntos que se pueden mover" y la regla "es necesario mover todos los puntos" la cual fue adquirida por todos los estudiantes luego de una institucionalización.

Preguntas de investigación

- ¿Qué instrumentos arrastre construyeron los estudiantes durante la génesis instrumental?
 - El arrastre para encontrar la trayectoria de un punto (menos Cloe)
 - El arrastre para ajustar, instrumentado o no
 - El arrastre para invalidar una construcción
- Los instrumentos más difíciles de construir:
 - El arrastre para constatar las variaciones durante el movimiento
 - El arrastre para validar una construcción

Preguntas de investigación

- ¿Los estudiantes toman la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre?
 - Los estudiantes sí toman la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre. Lo utilizan de manera espontánea y en general logran invalidar sus construcciones, sin embargo el instrumento no es completamente funcional.

Gracias!