ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p239-262

O ciclo investigativo de modelagem matemática

The investigative cycle in mathematical modeling

GLEISON DE JESUS MARINHO SODRÉ[1]
RENATO BORGES GUERRA[2]

Resumo

Este texto trata de parte de uma investigação sobre o problema da infraestrutura de conhecimentos necessária para o desenvolvimento da modelagem matemática escolar sobre problemas em contexto. Para isso é proposto o ciclo investigativo de modelagem matemática como dispositivo inspirado nos cinco gestos que caracterizam uma verdadeira pesquisa a luz da teoria antropológica do didático. Resultados obtidos a partir da analise empírica sobre um problema em contexto, mostram a potencialidade do ciclo investigativo de modelagem matemática para aquisições de novos saberes úteis, senão indispensáveis a professores em formação, bem como encaminha futura investigação.

Palavras-chave: *Modelagem Matemática. Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática. Teoria Antropológica do Didático.*

Abstract

This paper is part of an investigation on the problem of knowledge infrastructure necessary for the development of school mathematical modeling on problems in context. For this, the research cycle of mathematical modeling is proposed as a device inspired by the five gestures that characterize a real research in the light of the anthropological theory of the didactic. Results obtained from the empirical analysis of a problem in context show the potential of the mathematical modeling research cycle for the acquisition of new useful knowledge, if not indispensable to teachers in formation, as well as forwards future research.

Keywords: *Mathematical Modeling. Investigative Cycle of Mathematical Modeling. Anthropological Theory of Didactics.*

[1] Doutorando em Educação em Ciência e Matemática: Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém (PA). E-mail: gleisonsodre@yahoo.com.br
[2] Doutor em Engenharia Elétrica: Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém (PA). E-mail: rgufpa@gmail.br

Introdução

O exercício da leitura de mundo proposto pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes[3] - OCDE/Pisa[4] (BRASIL, 2012) como algo desejável, com o uso dos conhecimentos matemáticos escolares, tem se tornado um desafio aos professores por exigir o enfrentamento de situações do mundo concreto, inclusive em forma de tarefas matemáticas sobre contextos concretos, para a formação de uma cidadania crítica que permita questionar o mundo em que vive.

Essa recomendação toma substância por meio de vários discursos pedagógicos com referência ao exercício da cidadania a partir do uso da Matemática para auxiliar a leitura, a formulação, a aplicação e a interpretação de diferentes situações em contextos, como apresenta o letramento em Matemática.

> Letramento em matemática é a capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (BRASIL, 2012, p. 18).

A proposta de letramento em Matemática, referenciada pela OCDE (BRASIL, 2012), busca encaminhar os alunos ao encontro da Matemática como linguagem de leitura de mundo que, como tal, inclua o emprego sintático e semântico adequado, como também a interpretação de escritas matemáticas frente à semântica que emana dos contextos com objetos matemáticos e não matemáticos que descrevem, explicam e preveem fenômenos, que lhes permitam agir de forma consciente nas tomadas de decisões.

A noção de letramento em Matemática (BRASIL, 2012) nos encaminha ao encontro da noção de Modelagem Matemática, daqui em diante MM, para o contexto escolar ou em cursos de formação inicial e continuada de professores. No Brasil, a MM

---

[3] Fragmento de texto: *Organisation for Economic Co-operationand Development Programme form International Student Assessment* OCDE/Pisa (BRASIL, 2012).

[4] A OCDE tem por objetivo promover políticas que visem o desenvolvimento econômico e o bem-estar social de pessoas por todo o mundo. O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências. O exame é realizado a cada três anos pela OCDE, entidade formada por governos de 30 países que têm como princípios a democracia e a economia de mercado. Países não membros da OCDE também podem participar do Pisa, como é o caso do Brasil, convidado pela. O objetivo principal do Pisa é produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes, para a discussão da qualidade da educação básica e que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação.

é difundida, em geral, como estratégia para o ensino da Matemática, em particular, com o propósito de instigar os interesses dos estudantes em aprender Matemática a partir de sua aplicabilidade e da interação do estudante no processo ensino/aprendizagem (BIEMBENGUT, 2012).

Borssoi e Almeida (2015), seguindo essa compreensão, apontam o papel funcional da MM no ensino da Matemática de modo específico, como alternativa pedagógica para o ensino/aprendizagem que envolve uma situação-problema não essencialmente matemática, mas que é enfrentada por meio da Matemática.

No entanto, Kaiser e Sriraman (2006) e, mais recentemente, Frejd e Bergsten (2018) destacam que "não há consenso entre os pesquisadores em educação matemática sobre o que constitui a modelagem matemática" (FREJD; BERGSTEN, 2018, p.117), ela tem sido objeto de diferentes pesquisas com diferentes abordagens teóricas. Essas abordagens foram classificadas em diferentes perspectivas por Kaiser e Sriraman (2006) a partir de seus objetivos centrais no ensino, como explicita Frejd e Bergsten (2018) no Quadro 1.

Quadro 1 – Perspectivas e objetivos centrais no ensino de modelagem matemática

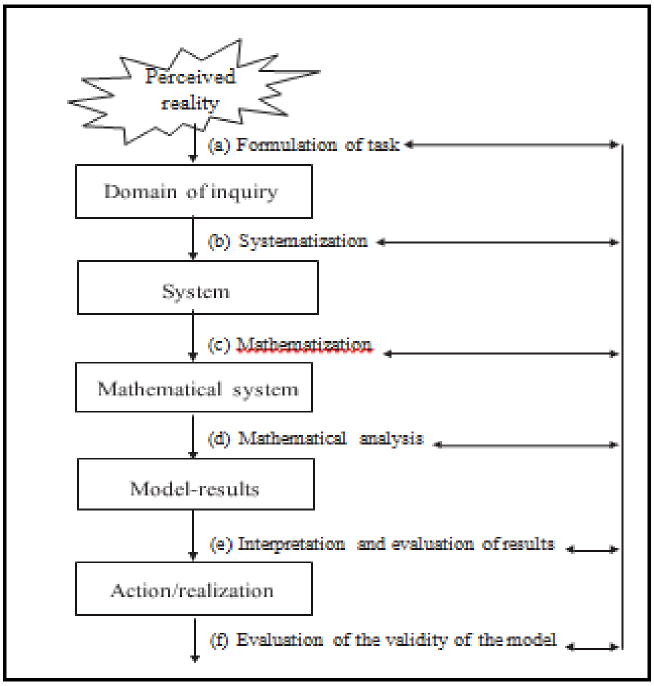
Perspectivas	Objetivos centrais
Modelagem realista ou aplicada	Resolvendo problemas do mundo real; Entendendo o mundo real
Modelagem contextual	Objetivos psicológicos e relacionados ao assunto
Modelagem educacional	Modelagem como ferramenta didática ou conceitual
Modelagem sócio-crítica e sociocultural	Compreensão crítica do mundo circundante
Modelagem epistemológica ou teórica	Objetivos orientados pela teoria
Modelagem cognitiva	Objetivos psicológicos com foco nos processos mentais

Fonte: Adaptado de Frejd e Bergsten (2018, p. 118)

O número de páginas aqui disponíveis não permite apresentarmos uma revisão sobre as perspectivas e, desse modo, consideramos o aspecto relevante que se faz presente, talvez por suas raízes históricas (PERRENET; ZWANEVELD, 2012), na maioria das perspectivas apresentadas no Quadro 1, e que é indispensável para o propósito de nossa discussão, especificamente, o ciclo de MM como processo empírico de MM que tem em conta dois "mundos" distintos, o mundo real e o mundo matemático, e algum tipo de "tradução" entre eles (por exemplo, KAISER et al. 2006), incluindo o "passo de matematização" do mundo real para o mundo matemático (FREJD; BERGSTEN, 2018, p. 118).

O ciclo de MM é tomado como um modelo do processo de MM constituído de seis subprocessos e de como eles se conectam nas atividades de MM (BLOMHØJ; JENSEN, 2003), como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Subprocessos de modelagem matemática



Fonte: Blomhøj e Jensen (2003, p.125)

Da figura se extrai os seguintes subprocessos, que podem ser entendidos como tarefas do ciclo de MM: (a) Formulação de uma tarefa (mais ou menos explícita) que orienta a identificação de características da realidade percebida que deve ser modelada; (b) Seleção dos objetos relevantes, relações, etc. do domínio de pesquisa resultante, e idealização destes para tornar possível uma representação matemática; (c) Tradução desses objetos e relações de seu modo de aparência inicial para a Matemática; (d) Uso de métodos matemáticos para alcançar resultados e conclusões matemáticas; (e) Interpretação destes como resultados e conclusões sobre o domínio de iniciação da investigação; e (f) Avaliação da validade do modelo por comparação com dados observados ou previstos ou com conhecimento baseado teoricamente.

Quando o ciclo é tomado em sua totalidade, a abordagem de MM é dita holística e quando o foco da abordagem é centrado apenas na conexão de subprocessos, essa abordagem é dita atomística (BLOMHØJ; JENSEN, 2003). Exemplos de abordagens atomísticas são: a) a MM emergente (TREFFERS, 1987), em que a noção de matematização assume papel central de modo a ser necessário diferenciar a matematização horizontal, no sentido do mundo real à matemática; e b) matematização vertical que trata das ações intramatemática, e ainda a abordagem da educação matemática crítica, em que são julgadas as implicações sociais do uso de modelos matemáticos (FREJD; BERGSTEN, 2018, p. 118).

As abordagens holísticas ou atomísticas não dependem diretamente do propósito do processo de MM enquanto método de modelar problemas, mas da intencionalidade do ensino ou da pesquisa. O propósito do processo de MM deve considerar seu uso, pois nem sempre é descrever o mundo real com uso da matemática. Esse propósito pode ser de agir sobre o mundo, como destaca Niss (2015), fazendo a distinção entre os objetivos da MM em termos de MM descritiva e prescritiva ou dita normativa. Niss (2015, p. 69) afirma que o "objetivo final é preparar o caminho para a tomada de ações com base em decisões resultantes de certo tipo de considerações matemáticas". A MM prescritiva é encontrada, por exemplo, na política e nas finanças, bem como na avaliação educacional. Tais modelos muitas vezes não podem ser validados empiricamente e a decisão de usá-los precisa ser baseada em uma discussão de questões críticas (NISS, 2015).

As abordagens sob a Teoria Antropológica da Didática, daqui em diante TAD, realizadas por Garcia et al. (2006), por exemplo, têm como objetivo não criticar o ciclo de MM, mas transpô-lo para um arcabouço teórico sólido, por evidenciarem que o mesmo não é tomado como uma noção problemática nas pesquisas em educação matemática. Afirmam que a pesquisa deve se concentrar em questões cruciais, com origem ou não extramatemática, que possam gerar um conjunto amplo de organizações matemáticas interpretando o ciclo como organizações matemáticas em conexões com outras organizações matemáticas e, como isso, reduzindo o ciclo de MM a uma atividade matemática.

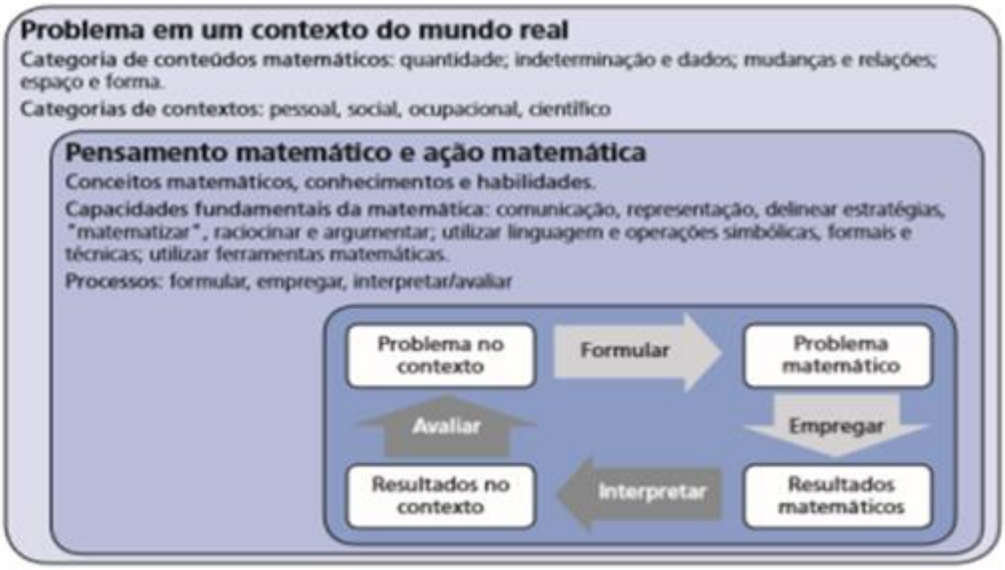
Segundo Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018), as pesquisas dominantes nas últimas quatro décadas concentram-se sob o enfoque cognitivo, embora com baixas contribuições com experiências empíricas para além daquelas que busquem fundamentações teóricas para as questões bem como do uso de metodologias adequadas para essas pesquisas.

Torna-se necessário assim maior número de pesquisas empíricas à luz de outras linhas teóricas que permitam contrastar resultados entre si e com isso encaminhar ações reais para o uso da MM em sala de aula de modo a clarificar a questão talvez mais importante de pesquisa em MM, frequentemente discutida no ICTMA (BLUM, 2011): Como podemos ensinar modelagem? (SCHUKAJLOW; KAISER; STILLMAN, 2018, p. 11).

Essa questão é também problematizada no âmbito da TAD com respeito ao ensino de MM e, portanto, como uma problemática a ser enfrentada por um professor, denotada por P_0 (MM), que é enunciada nesse contexto por Barqueiro, Bosch e Gascón (2013) na seguinte forma: o que ensinar de MM e como ensinar?

No ensino de MM, inclusive no Brasil, o ciclo de MM (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) é tradicionalmente assumido como assim o faz o Relatório Nacional do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, daqui em diante OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Modelo de letramento em matemática na prática



Fonte: Relatório Nacional PISA/OCDE (BRASIL, 2012, p. 18)

A Figura 2 apresenta uma versão reduzida do ciclo de Blomhøj e Jensen (2003, p. 125) com apenas quatro subprocessos entendidos como capacidades a serem atingidas para o letramento matemático pelo aluno ao se deparar com um problema em determinado contexto, a saber:

> ***formular*** a situação matematicamente, de acordo com os conceitos e relacionamentos identificados, realizando suposições simples. Assim, transforma um "problema em determinado contexto" em um "problema matemático" passível de uma solução matemática. No estágio seguinte, deve ***empregar*** conceitos, ferramentas e procedimentos matemáticos para obter "resultados matemáticos". Posteriormente, o estudante deve ***interpretar*** esses resultados nos termos do problema original inserido no contexto, colocando os "resultados no contexto". No passo seguinte, deve ***avaliar*** esses resultados em sua razoabilidade dentro do problema, em determinado contexto (BRASIL, 2012, p. 19, grifos do autor).

No entanto, segundo Greefrath e Vorhölter (2016), as capacidades de formular, empregar, interpretar e avaliar, a serem adquiridas pelos alunos, são afetadas pelo professor em classe, pois não apenas as prioridades dos professores em relação à MM, tal como a falta de tempo, bem como seus comportamentos em classe afetam o desempenho dos alunos, em particular, como um trabalho independente sobre problemas de MM.

Iversen e Larson (2006), por exemplo, destacam que mesmo alunos hábeis em matemática não conseguem modelar situações em contexto ao nível escolar. Houston e Neill (2003) e Frejd e Ärlebäck (2011) também destacam a MM como uma tarefa que revela dificuldade para os estudantes e Greefrath e Vorhölter (2016) afirmam que cada passo no processo de MM leva a uma dificuldade para os estudantes ou potencial "bloqueio". No entanto, é preciso considerar que as dificuldades com MM não são apenas dos alunos, mas também de professores, como afirma Grandsard (2005) sobre professores em formação não conseguirem modelar situações em contextos incomuns para eles.

Assim, a tarefa de ensinar o ciclo de MM com propósitos de movimentar saberes matemáticos até então ensinados e adequados para o enfrentamento dos tipos de problemas apontados na Figura 2, como pessoal, social, ocupacional e científico, pode se mostrar problemática e até impossível de ser realizada para os professores.

Sobre as dificuldades dos professores, Greefrath e Vorhölter (2016) as distinguem como quatro tipos de obstáculos que agem sobre os professores no e para o ensino de MM: (1) os organizacionais como a falta de tempo para cumprir o programa; (2) os relativos à assunção da incapacidade do aluno frente à MM, por ser muito difícil para os alunos; (3) os relacionados com a preparação de aulas, no sentido de tempo insuficiente para adaptar as tarefas e prepará-las em detalhe bem como a falta de habilidades necessárias para essa tarefa e, finalmente, (4) os relacionados à falta de organizações didáticas para o ensino de MM.

Em experiência com 101 professores, Schmidt (2011) apud Greefrath e Vorhölter (2016) destaca que mesmo após um treinamento os professores ainda achavam difícil considerar problemas de MM, em especial por conta de resistências oriundas das dificuldades de falta de tempo para preparar aulas e cumprir o currículo e ainda a complexidade em acompanhar o desempenho dos alunos.

Postulamos aqui que essas dificuldades podem decorrer da invisibilidade dos subprocessos do ciclo de MM que os torna inquestionáveis, como alertaram Garcia et al. (2006). De outro modo, o ciclo de MM é tomado como uma técnica didática "espontânea" (BOSCH; GASCÓN, 2001) do professor, no sentido de ser dotado de gestos inquestionáveis frente a problema em contexto concreto, como encaminha, por exemplo, o gesto de transformar.

É preciso observar que não podemos afirmar *a priori* que todo problema matemático, derivado de um problema em contexto, tem solução matemática, além de que nem sempre possível *transformar* um "problema em determinado contexto" em um problema matemático. Ademais, pressupõe-se que alunos e professores sejam dotados *a priori* de habilidades de transformar "problemas matemáticos" em "problemas em determinados contextos" e vice-versa, embora isso possa resumir o próprio processo de MM.

A hipótese de que sempre é possível a aplicabilidade do saber matemático em problemas de contextos concretos, como assumido no subprocesso transformar, nos leva ao encontro da noção de "aplicacionismo" que, tornado pedagogia dominante, impede a difusão da MM nas diferentes instituições. Assim, "sob essa compreensão, a modelagem é entendida como mera aplicação do conhecimento previamente construído, como se a construção do conhecimento fosse totalmente independente de seu uso"[5] (BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2018, p. 33, tradução nossa).

Além disso, é importante destacar que os subprocessos do ciclo de MM são tomados como capacidades a serem adquiridas e nesse sentido não são objetos de ensino, mas tão somente de aprendizagem:

> Em geral, se essas capacidades, sua aquisição e desenvolvimento, podem ser designados eventualmente como *objetivos de ensino*, estas não podem, entretanto, ser consideradas como parte do conjunto dos *objetos de ensinos*. De qualquer forma, o exercício de tais capacidades não se realiza pelo ensino, mas por meio de contextos de situações específicas. Ou, pelo menos, só pode ser objeto de um reconhecimento (por parte do professor, por parte do aluno) nesses contextos (CHEVALLARD, 2005, p. 63-64, grifos do autor, tradução nossa).

Desse modo, a aprendizagem demanda vivenciar experiências com MM, aprendendo a fazer o que viu fazer, ou seja, se aprende com o mundo, com o outro e consigo mesmo, no sentido dado por Charlot (2003) sobre a relação com o aprender. Isso exige conhecer situações em contexto do mundo com os outros e finalmente consigo mesmo. Nesse sentido, a aprendizagem da atividade de MM deve ser colaborativa no interior de uma comunidade de estudo.

Desse modo, modelar um dado problema em contexto requer capacidades que somente podem ser desenvolvidas com o conhecimento do contexto. Especificamente a capacidade de *formular* uma situação em contexto como uma tarefa matemática que

---

[5] Fragmento do texto: *Under its influence, modeling is understood as a mere application of previously constructed knowledge, as if the construction of knowledge were totally independent of its use.*

permita *empregar* um procedimento matemático, todos reconhecidos como problema em contexto, dependeria de um "*filtro de percepção"* (CHEVALLARD, 2005, p. 64, grifos do autor) de situações em contexto como tipos de situações matemáticas que admitem ser postas como praxeologias matemáticas (CHEVALLARD, 1999).

Essa compreensão de MM se assenta, assim, sobre noções de relações pessoal e institucional com organizações matemáticas mistas, daqui em diante OMM (CHEVALLARD, 2013b; CHEVALLARD, 2015), entendidas como organizações praxeológicas híbridas que "se ocupa das magnitudes concretas"[6] (CHEVALLARD, 2013b, p. 53, tradução nossa), oriundas de articulações de saberes com Matemática, no sentido de somente funcionarem a partir de situações em contexto com a mobilização de objetos matemáticos condicionados por saberes não matemáticos, inclusive os práticos, no sentido dado por Chevallard (2005).

Pensar em termos de OMM, segundo Chevallard (2013b), implica antes de tudo, "*ir ao contato com o mundo*, não ter medo de se misturar com ele, buscar essa miscigenação" (CHEVALLARD, 2013b, p.58, grifos do autor, tradução nossa), pois essas OMM historicamente foram eliminadas gradualmente do ensino da Matemática escolar, mesmo estando "durante muito tempo no centro da cultura *matemática*" ensinada (CHEVALLARD, 2013a, p.58, grifos do autor, tradução nossa).

A organização praxeológica de MM é uma OMM e, portanto, é engendrada a partir da dialética entre as situações em contextos e os saberes, em sentido amplo, dos campos de práticas com Matemática em que vivem essas situações. É essa dialética que encaminharia uma ação ou práxis matemática que se constitui da tarefa matemática customizada a situação, chamada de modelo matemático, este sempre dotado de um procedimento matemático usado para o enfretamento dessa tarefa.

Sob esse olhar, por exemplo, as dificuldades de aprendizagens da matemática financeira na escola podem decorrer de um ensino que ignora que as situações desse campo de práticas estão determinadas, em geral, *a priori* por convenções sociais (CHEVALLARD, 1989). Por exemplo, determinar em uma dada situação se o cálculo de juros é simples ou compostos não é uma decisão do aprendiz, a menos que esse aprendiz já tenha desenvolvido a percepção da situação.

A dependência de conhecimentos não matemáticos sobre o contexto também se fará sentir nos gestos de interpretação e avaliação do ciclo de MM. Para interpretar os

[6] Fragmento do texto*: se ocupa de las magnitudes concretas*.

resultados encontrados a partir do praxeologia matemática colocando os “resultados no contexto” é exigido reconhecer, e, portanto, conhecer as variáveis e as relações matemáticas customizadas como variáveis e relações não matemáticas do contexto que foram encaminhados nos gestos anteriores de *formular* e *empregar*.

Assim, por exemplo, nos problemas de regra de três, as relações e as variáveis da praxeologia matemática são customizadas como grandezas e relações entre elas em acordo com situação em contexto, de modo que os produtos dos procedimentos ditos matemáticos são pensados e avaliados como grandezas e não como variáveis e relações matemáticas.

O último gesto no ciclo, o da avaliação, ratifica essa compreensão quando demanda julgar a razoabilidade da resposta produzida pelos gestos de formular e empregar frente ao problema em contexto. A razoabilidade da solução produzida pelo modelo matemático para a situação somente pode ser reconhecida como solução da situação por quem conhece a racionalidade da situação, pois o modo de pensar uma prática, como alerta Chevallard (1999), não é único e, inclusive, o que pode ser razoável em uma instituição pode ser absurdo em outro meio institucional.

Esse caminhar sobre o ciclo de MM recomendado pelo Pisa (BRASIL, 2012) nos leva ao encontro da hipótese de que, independentemente de o sujeito, professor ou aluno, ser dotado ou não de habilidade matemática, a ausência de saberes não matemáticos sobre o contexto da situação, o que inclui o olhar sobre saberes como inerentes ao contexto da situação e, como tais, inquestionáveis, limita, senão impede, o desenvolvimento do ciclo de MM.

A ratificação, ou mesmo, retificação de nossa hipótese exige responder o seguinte questionamento metodológico: Como encaminhar o ciclo de MM, com seus gestos de formular, empregar, interpretar e avaliar para a construção e uso de um modelo matemático de uma dada situação em contexto concreto, que contemple a indispensabilidade do estudo de situações em contexto para o ciclo da MM?

Uma noção fundamental nessa investigação é a compreensão de modelo matemático assumido no sentido da TAD, como “máquina” para conhecer um domínio de realidade extramatemático, aqui compreendido como sendo a situação em contexto que refere o problema (CHEVALLARD, 1992). Desse modo:

> Quanto à natureza dos modelos e sua relação com o sistema modelado, não devemos cair na ingenuidade de pensar que um *modelo* é uma cópia ou reprodução fotográfica do sistema que modela, mas é um *acréscimo* a esse sistema, uma *construção artificial*. Ressalta-se que a principal função do

> modelo não é se assemelhar ao sistema que modela, mas *fornecer conhecimento* sobre o mesmo e fazê-lo da maneira mais econômica e eficiente possível. Para superar essa falsa interpretação, podemos substituir, como propõe Chevallard (1992), a metáfora do modelo como uma *imagem* do sistema para a do modelo como uma *máquina* cujo funcionamento permite produzir conhecimento relativos ao sistema modelado[7] (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014, p. 295, grifos dos autores, tradução nossa).

Em resumo, a noção de modelo matemático inclui de modo indispensável uma praxeologia matemática, um domínio de realidade e questionamentos sobre esse domínio de realidade que encaminhem os propósitos do modelo matemático que definem, de algum modo, a relação entre domínio de realidade e a praxeologia matemática.

Na esteira dessa compreensão, as ações que se realizam no interior da sala de aula para atender uma dada intencionalidade, do aluno ou do professor, se constituem em condições que tornam possível encontrar o que e para que se faz tal ação em situação. Esse é o principal objeto da TAD, que permite problematizar as atividades humanas com matemática realizadas no interior de um espaço social instituidor dessas práticas.

Desse modo, o objetivo desta pesquisa consiste em evidenciar o ciclo de MM como uma praxeologia mista que, como tal, somente se realiza a partir do conhecimento dos saberes não matemáticos em contextos concretos que permitem se articularem com saberes matemáticos para se constituir em ferramentas de estudo dos domínios desse contexto, entendido como situações percebidas nesse contexto.

Para isso, propomos uma ferramenta analítica a partir da noção de organizações praxeológicas da TAD como condições que permitam tornar possível a realização dos gestos do ciclo de MM, e com isso, assegurar nossa hipótese à luz dessa teoria. Nossa investigação vai encontro das recomendações de Schukajlow, Kaiser e Stillman, (2018) e Barquero, Bosch e Romo (2018), ao proporem a inclusão de ferramentas analíticas para o uso e desenvolvimento da MM nas instituições de ensino.

Recursos da Teoria Antropológica do Didático

A TAD considera que toda atividade humana regularmente realizada no interior de um espaço social – que pode ser a família, a escola, por exemplos, e que aqui são

[7] Fragmento do texto: *En cuanto a la naturaleza de los modelos y su relación con el sistema modelizado, no debemos caer en la ingenuidad de pensar que un modelo es una copia o reproducción fotográfica del sistema que modeliza, sino que es un añadido a dicho sistema, una construcción artificial. Se enfatiza así que la principal función del modelo no es la de parecerse al sistema que modeliza, sino la de aportar conocimientos sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible. Para superar esta falsa interpretación podemos substituir, como propone Chevallard (1992), la metáfora del modelo como imagen del sistema por la del modelo como máquina cuyo funcionamiento permite producir conocimientos relativos al sistema modelizado.*

denominados de instituições por instituir o modo de fazer e de pensar uma prática em seu interior – pode ser descrita a partir de um modelo cuja unidade mais simples se resume com a palavra praxeologia (CHEVALLARD, 1991).

As praxeologias não são dados da natureza, e sim "artefatos" ou "obras" humanas construídas no interior das instituições para atender seus interesses e intenções e, portanto funcionam sob condições da cultura e da sociedade em que se inserem, cuja unidade mais simples, dita pontual, consiste de dois blocos inseparáveis: a práxis e o logos (CHEVALLARD, 1999).

A *práxis*, denotada por [T, τ], representa o fazer prático ou saber fazer, o *know-how*, geralmente observável, constituído do que se faz, chamado de tipo de tarefa T, e de como se faz essa prática, chamada de técnica τ. O *logos*, denotado por [θ, Θ], designa um discurso que descreve, explica, justifica ou produz a técnica τ, que é chamado de tecnologia θ da técnica τ. A tecnologia θ, por sua vez, pode ser vista como dotada de um discurso mais inclusivo, chamado de teoria Θ, que "aparece frequentemente como 'abstrata', isolada das preocupações dos simples tecnólogos e técnicos"[8] (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa). Este nível do *logos* desempenha um papel similar ao da tecnologia, mas que incide sobre a tecnologia de uma ou mais técnicas.

Uma organização praxeológica é uma rede articulada e integrada de praxeologias orientadas por um ou mais saberes, não necessariamente ali explícitos para atender uma intencionalidade, como se pode depreender do seguinte extrato de texto:

> As organizações pontuais vão assim se agregando primeiramente como organizações locais, [T_i, τ_i, θ, Θ], centradas sobre uma determinada tecnologia θ, em seguida em organizações regionais, [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ], formadas em torno de uma teoria Θ. (Além disso, se denominará organização global o complexo praxeológico obtido, [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{ijk}, Θ_k], em uma determinada instituição pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k)[9] (CHEVALLARD, 1999, p. 226, tradução nossa).

Na esteira dessa construção encontra-se a noção de saber que está reservado "às praxeologias considerada como *produtora de praxeologias*"[10] (CHEVALLARD, 2013b, p. 20, grifos do autor, tradução nossa), mas também à noção de saberes práticos, no

---

[8] Fragmento do texto*: aparecen frecuentemente como "abstractos", apartados de las preocupaciones de los "simples" tecnólogos y técnicos*.

[9] Fragmento do texto: *Las organizaciones puntuales van así a combinarse, en primer lugar, en organizaciones locales, [T_i, τ_i, θ, Θ], centradas sobre una tecnología θ determinada, y después en organizaciones regionales, [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ], formadas alrededor de una teoría Θ. (Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido, [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{jk}, Θ_k], en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías Θ_k).*

[10] Fragmento do texto: *a las praxeologias consideradas como productoras de praxeologias*.

sentido das práticas que vivem naturalizadas e inquestionáveis em um dado espaço social, que Chevallard (1999) denomina de praxeologias incompletas ou autotecnológicas por apresentarem apenas vestígios de um discurso, inclusive do tipo "se faz assim, porque assim é o melhor modo de se fazer".

As praxeologias autotecnológicas, embora nem sempre visíveis por conta da naturalização pela cultura, constituem uma base indispensável para realizar uma organização praxeológica em situação, pois "em qualquer momento, *qualquer saber científico funciona sobre um extrato profundo de pré-construídos*"[11] (CHEVALLARD, 2005, p. 107, grifos do autor, tradução nossa).

> Os pré-construídos designam seus objetos por meio do aspecto linguístico. Sua manipulação está submetida a uma lógica prática definida por um código de conduta em que para cada situação o código define uma conduta particular. Meu saber está estritamente ligado a um contexto; não tolera a descontextualização[12] (CHEVALLARD, 2005, p. 107, tradução nossa).

Nesse sentido, Chevallard (2005) afirma que:

> Quando reflito sobre o mundo sensível que me rodeia (para agir sobre isso, por exemplo), não questiono sua existência obstinada e opaca: essa parede, essa porta, minha mão que escreve. O mesmo acontece na vida intelectual, tomada de pré-construções[13] (CHEVALLARD, 2005, p. 106, tradução nossa).

De outro modo, as praxeologias não agem de modo independente, mas articuladas e, não raro, integradas por diferentes discursos, teóricos e práticos, não necessariamente homogêneos segundo uma teoria, de modo a prover uma funcionalidade prática à organização praxeológica.

No entanto, o que se faz em situação não revela necessariamente o que se quer fazer e tampouco, o que se pensa sobre o que se faz. Assim, a legitimidade institucional de uma organização praxeológica pode não estar na clareza de seus saberes teóricos, mas no papel funcional dos conhecimentos em engendrar saberes para produzir respostas a determinadas questões de interesses de uma instituição.

É sob essa compreensão que assentamos nossa hipótese sobre o uso do ciclo de MM no ensino escolar ser dependente também de saberes não matemáticos, teóricos e pré-construídos, sobre uma situação em contexto a ser modelada, que denominamos de

---

[11] Fragmento do texto: (...) *es preciso insistir de todos modos sobre el hecho esencial de que, enun momento dado, cualquer saber cientifico funciona sobre un estrato profundo de preconstrucción*.

[12] Fragmento do texto: *Mi saber está estrechamente ligado a un contexto; no tolera La descontextualización.*

[13] Fragmento do texto: *Cuando reflexiono sobre el mundo sensible que me rodea (con vistas a actuar sobre él, por ejemplo), no pongo enduda sua existência obstinada, opaca: esapared, esta puerta, mi mano que escribe. Lomismoocurre em la vida intelectual, colmada de preconstrucciones.*

uma organização praxeológica com matemática ou simplesmente organização praxeológica mista.

É preciso, então, estar ciente de que o ciclo de MM constitui uma prática social com Matemática (CHEVALLARD, 2005), ou seja, constitui uma organização praxeológica mista cujo produto é um modelo matemático. Esse produto é alcançado a partir de modelos matemáticos pré-existentes que podem ser adequados aos condicionamentos dos saberes praxeológicos em sentido amplo, matemáticos e não matemáticos, inclusive os pré-construídos da cultura institucional, que emanam do domínio de realidade modelado.

Essa compreensão encaminha que a compreensão do ciclo de MM em situação pode tornar-se uma "atividade superestrutural"[14], ou seja, uma atividade humana que ignora o que é assumido "dado", o que foi construído em outro lugar, em detrimento do que se faz *aqui e agora* (CHEVALLARD, 2009, p. 41, grifos do autor, tradução nossa).

Nesse sentido, o ciclo pode ser realizado quando se tomam situações cujos saberes não matemáticos do contexto são naturalizados ou tornados invisíveis por técnicas didáticas, como acontece no uso da regra de três que recorre à inexistente noção matemática de proporcionalidade inversa para evitar a complexidade das relações entre as grandezas envolvidas no contexto que trata o problema (SILVA, 2017).

Os saberes não matemáticos sobre o contexto da situação se constituem parte importante da infraestrutura esquecida, embora necessária, e até indispensável, para o desenvolvimento do ciclo de MM do Pisa (BRASIL, 2012). De outro modo, o ciclo de MM como uma atividade superestrutural oprime as questões sobre as condições e as restrições institucionais que agem nesse processo de difusão da MM, como alertam Barquero, Bosch e Romo (2018).

Assim, no âmbito da TAD, uma resposta à nossa questão pode ser encaminhada por meio do problema de encontrar a infraestrutura que permite realizar o ciclo de MM. Essa problemática se insere no que Chevallard (2009) anuncia como problema primordial, o qual consiste em encontrar a infraestrutura útil ou necessária para conceber, planejar ou executar um dado projeto.

Essa compreensão se afasta da compreensão encaminhada sobre o ciclo de MM ser desenvolvido com objetivo de produzir uma organização praxeológica regional como proposto por Garcia et al. (2006). Essa concepção restringe à MM ao estrito âmbito das

[14] Fragmento do texto: *activités superstructurelle.*

atividades matemáticas contrastando com a concepção aqui adotada da MM como uma atividade da matemática mista e, portanto, necessariamente mais complexa.

Chevallard (2009) propõe a metodologia de pesquisa e desenvolvimento de organizações praxeológicas como meio de construir resposta ao problema primordial, denominada de percurso de pesquisa e investigação, daqui em diante PEP. Este consiste de um processo iterativo de sistemas didáticos S (Alunos, Professor, Q_i) instituídos para o estudo de questões derivadas Q_i de uma questão geratriz Q_0, com o objetivo de encontrar, o que inclui construir, respostas $R_i^{\lozenge}$ que podem se mostrar como uma resposta desejada à questão inicial Q_0.

Toda resposta $R^{\lozenge}_i$ encontrada é difundida e defendida perante a comunidade (Aluno, Professor) e, quando sucumbe a um questionamento Q_{i+1} julgado pertinente por essa comunidade, um novo sistema didático S(A, P, Q_{i+1}) é instituído, inclusive para análises das $R^{\lozenge}_i$ até então encontradas que passam assim, a se a constituir também como condições para obtenção de uma resposta $R^{\heartsuit}$ considerada definitiva pela comunidade.

O PEP se desenvolve com a participação de cinco gestos, não necessariamente estruturados de modo sequencial ou cíclico, que, segundo Chevallard (2013a), caracterizam uma verdadeira pesquisa. Mais precisamente, os gestos são os seguintes:

> H_1 - Observar as respostas $R^{\lozenge}$ que vivem nas instituições.
> H_2 - Analisar - notadamente em duplo plano experimental e teórico - essas respostas $R^{\lozenge}$.
> H_3 - Avaliar essas mesmas respostas $R^{\lozenge}$.
> H_4 - Desenvolver uma resposta própria, $R^{\heartsuit}$.
> H_5 - Difundir e defender a resposta $R^{\heartsuit}$ assim produzida[15].
> (CHEVALLARD, 2013a, p.3, tradução nossa).

Inspirados no PEP, a partir dos cinco gestos de investigação, mas de modo distinto, propomos o ciclo investigativo de MM, daqui em diante CIMM, como metodologia de desenvolvimento e análise de modelos matemáticos de situações em contextos concretos.

O CIMM se constitui em um percurso de estudo investigativo cujo desenvolvimento é estruturado e orientado para a MM, de modo que se aproxima do ciclo tradicional de MM (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) e se distingue do PEP à medida que este não admite estruturas *a priori* sobre seu desenvolvimento, mas preserva deste, seus principais componentes como os gestos e a formação de sistemas didáticos para o estudo de questões, respostas e obras demandadas no percurso de MM.

[15] Fragmento traduzido no artigo "A prática de ensino como formação docente do professor de matemática" publicado na Revista Amazônia de autoria de Mesquita e Guerra (2017).

O ciclo investigativo de modelagem matemática

O CIMM é orientado pelos cinco gestos que assumem o papel de tarefas instituidoras de subprocessos realizados a partir de um ou mais sistemas didáticos auxiliares, buscando objetivamente caminhar de um gesto ao outro, preferencialmente, mas não obrigatório, de modo sequencial. Nesse sentido, cada ciclo do CIMM é estruturado *a priori*, embora de modo não inflexível, do seguinte modo:

H_1 – Investigação de modelos matemáticos que vivem na escola.

O gesto **H_1** busca dar visibilidade ao conhecimento da situação que refere o problema em contexto considerado. É realizado por meio de investigação os modelos matemáticos disponíveis na literatura escolar que podem ser ou são usados para modelar o tipo de problema em contexto considerado, pois podem encaminhar sugestões de situações e formulações de modelos matemáticos para o problema em estudo.

De qualquer modo, segundo a compreensão adotada pela TAD, quanto maior o conhecimento de uma pessoa sobre situações com Matemática, maior será seu equipamento praxeológico e, com isso, a possibilidade de sucesso em encontrar ou construir uma situação e o modelo matemático associado a partir dos gestos seguintes **H_2**, **H_3** e **H_4**.

H_2 - Analisar modelos matemáticos em duplo plano, experimental e teórico

O objetivo é selecionar para encaminhar a construção ou customização do modelo matemático que atende o objetivado pelo processo de MM. A análise é realizada buscando adequação de situações, construídas a partir do modelo matemático em análise, com o problema em contexto considerado.

A análise aqui é reversa, no sentido de que se vai da formulação matemática em busca da situação que essa formulação pode representar tendo em conta o contexto considerado, inclusive o alcance para novas situações. Sob esse pensar, os saberes teóricos ou práticos matemáticos e não matemáticos frente às situações do problema são fundamentais para a análise dos modelos matemáticos.

A adequação do modelo matemático não é uma questão matemática, mas é uma questão vital para o estudo da realidade que trata o tipo de problema em contexto, pois se alguém usa um modelo um tanto inadequado, por causa de sua conveniência, simplicidade, por exemplo, sem observar sua inadequação, é preciso estar ciente do perigo de tirar conclusões definitivas sobre a realidade a partir do estudo de tal modelo (REVUZ, 1971).

Os modelos matemáticos acompanhados de situações, que podem de algum modo serem vistos como modelos matemáticos sobre o tipo de problema em contexto considerado são encaminhados para avaliação nesse contexto, o que leva ao gesto de avaliação $\mathbf{H_3}$ seguinte.

H_3 – Avaliação de modelos matemáticos

A avaliação se dá pela validação dos modelos matemáticos analisados no gesto anterior para o tipo de problemas em contexto considerado. A validação de um modelo matemático considera a consistência das respostas às situações produzidas pelo modelo matemático frente ao problema em contexto considerado, no sentido de atender o objetivo do processo de MM.

Esse gesto não é simples por depender de percepções sobre o contexto que podem não estar presentes em sala de aula. Essa demanda é parcialmente suprida pelos gestos anteriores e, portanto, se resume em verificar se uma resposta de um modelo matemático a uma situação associada ao tipo de problema em contexto é ou não razoável para o tipo de contexto do problema.

Os modelos matemáticos avaliados que encaminhem situações, cujas respostas atendem o problema em contexto considerado, devem ser encaminhados ao gesto $\mathbf{H_4}$ de reconstrução do modelo.

H_4 – Desenvolvimento de um modelo matemático

É realizado por meio de reconstrução de um modelo matemático considerando os modelos e as situações com matemáticas analisadas e avaliadas adequadas para encaminhar, por meio de customização com ou sem agregação de fragmentos praxeológicos.

Vale observar que de certo modo, o gesto de formulação do modelo matemático começa com o gesto $\mathbf{H_1}$ e se desenvolve nos gestos seguintes $\mathbf{H_2}$ e $\mathbf{H_3}$ com o amadurecimento da situação com matemática relativa ao problema em contexto e se consolida no gesto seguinte $\mathbf{H_5}$.

H_5 – Difusão e defesa do modelo matemático

É realizado pela submissão das situações e modelos matemáticos associados que foram produzidos ou reconstruídos no gesto anterior à aprovação da comunidade de estudo para o tipo de problema em contexto considerado.

Nesse gesto, é preciso considerar o estudo e a investigação dos modelos matemáticos reconstruídos nos gestos $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$e $\mathbf{H_4}$ no contexto do problema e não na matemática, pois pode haver diferentes pontos de vista sobre as situações consideradas frente ao problema e suas causas, e estes devem ser resolvidos em negociação para que todas as partes interessadas concordem.

Um percurso foi desenvolvido com o uso empírico do CIMM em um curso de formação em MM com vinte horas, em sete encontros realizados com cinco professores em formação de um curso de Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens de uma universidade pública.

O curso teve como objetivo ratificar ou retificar o funcionamento do CIMM para revelar tarefas matemáticas articuladas a partir de tarefas não matemáticas, às vezes problemáticas, que emergem de forma integrada para atender o propósito de um processo de MM e, com isso, revelar aos professores que é possível vencer a complexidade do processo de MM.

O CIMM foi desenvolvido com cinco professores em formação inicial denotados por X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5], um diretor de estudo Y, nesse caso o pesquisador, e encaminhados por dois grupos que fizeram parte dos sistemas didáticos auxiliares que interagiram no desenvolvimento do percurso.

Análise e resultados empíricos

O CIMM foi encaminhado de forma holística a partir de situações reais de financiamento de veículos com dados obtidos pelos professores em concessionárias. Essa realidade foi escolhida por encaminhar um modelo normativo e, como tal, permite que o processo de MM seja abreviado e encerrado em apenas um ciclo, mas sem perder suas características investigativas e, portanto, visualizara consistência dos gestos como subprocessos do CIMM. Além disso, a nossa escolha encaminha questionamento sobre uma realidade social, como deseja o Pisa (BRASIL, 2012), no caso, a compra de veículos.

Situações de compra foram levantadas pelos grupos nas concessionárias simulando compra de veículos sem considerar marca ou modelos. Entre as situações, foi eleita pela turma dentre as apresentadas pelo professor x_5, representante do grupo 2, uma situação específica tendo em conta que supostamente continha todas as informações necessárias para o enfrentamento do problema.

Situação específica: (a) Valor do veículo: R$ 52.900,00; (b) Valor da entrada R$ 20.000,00; (c) Prazo do financiamento: 24 meses; (d) Taxa de juros mensal anunciada: 1,51% e (e) Valor da parcela: R$: p = 1.809,54.

O questionamento detonador do propósito da MM foi encaminhado da seguinte forma: Q_1 – Será que o vendedor está falando a verdade diante dos dados anunciados? Esse questionamento Q_1 levou os professores a encaminharam os seguintes questionamentos:

$Q_{1.1}$ – O valor da parcela está em conformidade com o valor anunciado pelo vendedor?

Os questionamentos $Q_{1.1}$ levaram os professores ao seguinte gesto:

H_1: a investigação de modelos alcançáveis pelos saberes da escola básica que pode ser usado para o tipo de problema considerado. Um modelo $\wp$ para o tipo do problema foi encontrado a partir do sistema didático auxiliar instituído pelo diretor de estudo Y, S (X, Y, O_1), O_1 onde designa a obra estudada. Esse sistema didático auxiliar levou ao gesto seguinte:

H_2: Análise dos modelos - por meio da instituição de dois sistemas didáticos auxiliares $S_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \wp)$ e $S_2(x_4,\ x_5,\ \wp)$. A avaliação foi, de certo modo, encaminhada e legitimada pelo estudo da obra que reportou situações similares ao problema em foco.

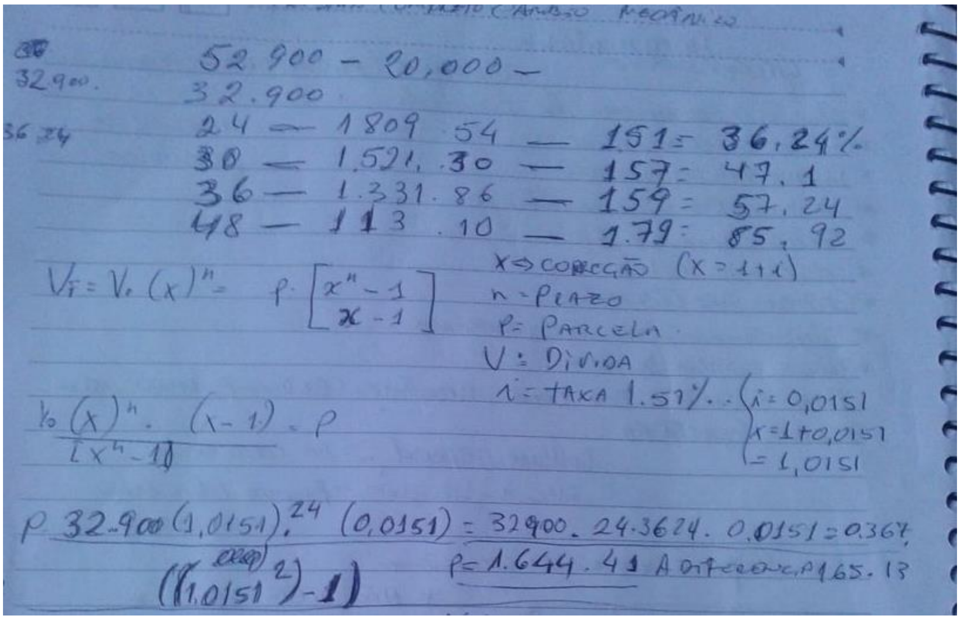
H_3: Avaliação dos modelos- foi realizada a partir do comportamento do modelo $\wp$ em diferentes situações se mostrando adequado para o enfrentamento da situação, mas levantando questionamentos da turma a partir das situações confrontadas, modelo versus concessionária, pelo sistema didático $S_2(x_4, x_5,\ \wp)$. Especificamente, os valores das prestações produzidos pelo modelo $\wp$para uma dada situação não estavam em conformidade com o valor da prestação anunciado pela concessionária.

*Professor x_3: A*conteceu isso comigo. A gente fazia um cálculo e não dava com o que o vendedor apresentava. É o seguro, é o não sei o que, ..., são valores flutuantes que a gente não sabe o que é...*

Professor x_5: Por isso que já tem um escritório nas financeiras, especializados em pegar esses contratos de financiamentos de carro de clientes que não conseguem pagar o valor da parcela. Aí o escritório refaz o cálculo e reduz o valor para ver se não há valores abusivos nas operações financeiras.

Professor x_3: Em geral são cobrados valores abusivos porque eles não colocam isso no contrato

Figura 3 – Registro de $S_2(x_4,\ x_5,\ \wp)$



Fonte: Elaborado pelo autor

As falas dos professores mostram desconfiança em relação ao modelo da concessionária, que parece nebuloso quando o vendedor anuncia que seriam outros valores inclusos, inclusive previstos por advogados considerados abusivos. De qualquer modo, revelou a existência de outras variáveis do modelo que funcionam implicitamente e, como tais, estão longe do *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005) dos professores, pois somente são objetos de reconhecimento para quem os conhece.

Vale observar que os cálculos necessários exigiam o uso de calculadora científica que não eram do conhecimento dos professores. Isso detonou um sistema didático auxiliar S(X, Y, C'), onde C' denota as praxeologias relativas às tarefas de cálculo na calculadora científica, inclusive com respeito à aritmética de pontos flutuantes, como arredondamento e truncamento.

H$_4$: Desenvolvimento do modelo - Foi considerá-lo em sua forma generalizada que admite o cálculo das prestações para dados valores de números de prestações, taxa de juros bem como o valor a ser financiado.

H$_5$: Difusão e defesa do modelo - A difusão e defesa foram feita no sistema didático S(X, Y, $\wp$) por x_3 e x_5. O modelo foi legitimado considerando as potencialidades demonstradas por meio de customizações do modelo para análise e previsão de modo a orientar decisões em problemas de financiamentos de outros bens, como eletrodomésticos, por exemplo, e ainda orientar decisões em investimentos de capitais, como a poupança, além de levantar questionamentos sobre aposentadoria complementar.

A proposta do CIMM esboçada parece ter se mostrado eficaz na problematização das capacidades de formular, empregar, interpretar e avaliar presentes no ciclo de MM, conforme orienta a OCDE/Pisa (BRASIL, 2012).

O CIMM se mostrou útil ao chamar para si praxeologias infraestruturais, matemáticas e não matemáticas, inclusive saberes não disciplinares como o estudo de praxeologias de cálculo com uso de calculadoras científicas, além de permitir aos professores a tomada de consciência de outras possíveis variáveis, embora não tenham conseguido objetivamente explicitá-las, que compõem os valores das prestações em financiamentos.

Considerações preliminares

Os cinco gestos do CIMM inspirados nos gestos, que caracterizam uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013), parecem funcionar como instrumentos que revelam a complexidade da capacidade de formular, empregar, interpretar e avaliar do ciclo de MM do OCDE/Pisa (BRASIL, 2012). A compreensão da complexidade do ciclo de MM nos leva à consciência de que somente "são *aprendidos* sem nunca serem especificamente *ensinados*"[16] (CHEVALLARD, 2005, p. 67, grifos do autor, tradução nossa) e, portanto, sempre são dependentes do contexto específico de situações.

Esse olhar é julgado aqui como indispensável para a prática de MM na escola básica, pois além da dependência dos saberes matemáticos, a MM também depende de saberes específicos do problema em contexto. Os saberes não matemáticos articulados e integrados aos saberes matemáticos é que permitem o reconhecimento da situação com matemática relativa ao tipo de problema em contexto.

O estudo modelo do problema de financiamento com uma comunidade de cinco professores revelou a consistência dos gestos do CIMM para evidenciar articulação e integração mútua dos saberes, matemático e não matemático, bem como de suas relações com participação ostensiva de saberes não matemáticos que antes podiam parecer mantidos em silêncio no ciclo de MM do OCDE/Pisa (BRASIL, 2012).

Entretanto, os resultados animadores com os professores ainda são provisórios e demandam experiências empíricas com o CIMM envolvendo número maior de participantes e diversidade de situações que permitam avaliações de sua performance para futuros encaminhamentos empíricos em sala de aula.

[16] Fragmento do texto: *aprendidos sin ser nunca especificamente enseñados*.

Além disso, outros resultados teóricos parecem derivar dessa compreensão do CIMM, como a noção de organizações praxeológicas complexas e que podem influenciar a estrutura do CIMM. Esses aspectos teóricos estão sendo objeto atual de nossa investigação, cujos resultados serão objetos de futuras publicações.

Referências

BARQUERO, B., BOSCH, M.; GASCÓN, J. The ecological dimension in the teaching of mathematical modeling at university. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, v. 33, n. 3, p. 307-338, 2013.

BARQUERO, B., BOSCH, M.; ROMO, A. Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 2018. https ://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z

BIEMBENGUT, M. S. Concepções e tendências de modelagem matemática na Educação Básica. *Tópicos Educacionais*, Recife, v. 18, n. 1-2, jun./dez. 2012.

BLOMHØJ, M.; JENSEN, T. H. Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), p. 123-139, 2003.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer International Publishing. 2015. p. 73-96.

BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Educational Teachers College*, v. 4, n. 2, p. 18-24, 2013.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Buenos Aires: Universidad Nacional del Centro de la Província de Buenos Aires, Argentina, v. 10, n. 2, p. 36-45, dez. 2015.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró en Agosto de 2001.

BRASIL. *Relatório Nacional PISA 2012*: Resultados brasileiros. OCDE, 2012.

CHARLOT, B. O sujeito e a relação com o saber. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). *Formação de educadores*: desafios e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 2003. p.23-33.

CHEVALLARD, Y. Teaching mathematics in tomorrow’s society: A case for an on coming counter paradigm. In: CHO, S. J. (Ed.). *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education*. Berlin: Springer, 2015. p. 173-187.

______. Éléments de didactique du développement durable – *Leçon 1: Enquête codisciplinaire & EDD*. 2013a.

______. *Las matemáticas en la escuela*: Por una revolución epistemológica y didáctica. 1. ed. Cuidad Autónoma de Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013b.

______. La notion d´ingénieriedidactique, un concept à refonder. Questionnementetélémentos de réponses à partir de la TAD. In: MARGOLINAS et al. (Org.): Enamont et en aval desingénieriesdidactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009.

______. *La Transposición Didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

______. L'Analise des pratiques enseignantes en theórie anthopologique du didactique. *Recherches en Didactiques dês Mathematiques*. Grenoble. La Pensé Sauvage Éditions, v. 19. 2, p. 221-265, 1999.

______. Fundamental concepts in didactics: Perspectives providedbyananthropological approach. In: DOUADY, R.; MERCIER, A. (Ed.). *Research in Didactique of Mathematics,* Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1992. p. 131- 167.

______. *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

______. *Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche*. Publication de l'IREM d'Aix-Marseille. 1989.

CHEVALLARD, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. In: BOSCH, M. (Ed.). *Proceedings of CERME4*. Barcelona, Spain; FUNDEMI IQS - Universitat Ramon Llull. p. 21-30. 2016

FONSECA, Cecilio; GASCÓN, Josep; OLIVEIRA, Catarina. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 17, n. 3, p. 289-318, nov. 2014.

FREJD, P.; ÄRLEBÄCK, J. First results from a study investigating Swedish Upper secondary students' mathematical modelling competencies. In: KAISER, G. et al. (Ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (ICTMA 14). Dordrecht: Springer, 407416, 2011.

FREJD, P.; BERGSTEN, C. Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modeling - Ideas for education. *ZDM Mathematics Education, 2018*. Disponível em: https ://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2

GARCIA, F.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L.; BOSCH, M. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. ZDM Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 226-246, 2006.

GRANDSARD, Francine. *Mathematical modelling and the efficiency of our Mathematics*. 2005.

GREEFRATH, G., & VORHÖLTER, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries. ICME-13 topical survey*. Cham: Springer.

HOUSTON, K.; NEILL, N. Assessingmodellingskills. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Ed.). *Mathematical modelling*: a way of life – ICTMA 11. Chichester: Horwood, 2003. p. 155-164.

IVERSEN, Steffen M.; LARSON, Christine J. Simple Thinking using ComplexMath vs. Complex Thinking using Simple Math: a study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modeling abilities. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 281-292, June 2006.

KAISER, G.; BLOMHØJ, M.; SRIRAMAN, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 82-85, 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 3, 2006.

NISS, M. Prescriptive modeling - challenges and opportunities. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical modelling in education research and practice*: cultural, social and cognitive influences. Cham: Springer, 2015. p. 67-79.

PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

REVUZ, A. The Position of Geometry in Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 4, p.48-52, 1971.

SCHUKAJLOW, S.; KAISER, G.; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM – Mathematics Education*, v. 50, n. 1-2, p. 5-18, 2018. Doi 10.1007/s11858-018-0933-5.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. *A invariável prática da regra de três na escola*. 2017. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

TREFFERS, A. *Three dimensions*. A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project. Dordrecht: D. Reidel,1987.