Uma investigação experimental com calculadoras gráficas sobre o Teorema Fundamental do Cálculo

Ricardo Scucuglia

RESUMO

As idéias apresentadas neste texto resumem uma pesquisa de mestrado que discutiu como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo. Sob a perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias, foram evidenciados os processos de experimentação com tecnologias, visualização e pensamento matemático a partir da realização de experimentos de ensino com estudantes de graduação em matemática. Os coletivos pensantes discutiram inicialmente Soma de Riemann e Integração Definida com a Calculadora Gráfica TI-83. Conseqüentemente, investigaram os dois resultados do Teorema Fundamental do Cálculo a partir de funções polinomiais, identificando e generalizando padrões. Na abordagem algébrica foram utilizadas notações simplificadas antes que simbologias matematicamente tradicionais fossem apresentadas. Finalmente, evidenciou-se o modo como entendimentos emergentes no processo de experimentação com tecnologias condicionaram a (re) elaboração de conjecturas e permearam discussões matemáticas gradativamente rigorosas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teorema Fundamental do Cálculo. Calculadoras Gráficas. Coletivos Pensantes.

An experimental investigation with graphing calculators about the Fundamental Theorem of Calculus

ABSTRACT

The ideas presented in this text summarize a master's research project which discussed how Students-with-Graphing-Calculators investigate the Fundamental Theorem of Calculus. Based on Humans-with-Media perspective, the processes of experimentation with technologies, visualization and mathematical thinking were emphasized in teaching experiments with major students in mathematics. Initially, thinking collectives discussed Riemann's Sum and Defined Integration with TI-83 Graphing Calculator. Consequently, they investigated both results of the Fundamental Theorem of Calculus based on polynomial functions, identifying and generalizing patterns**.** In the algebraic approach, simplified notations were used before traditional mathematical symbols.

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva é doutorando em Educação pela University of Western Ontario (UWO), Faculty of Education (FOE), Canada. Bolsista do Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC). Pesquisador Integrante do GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, Mídias e Educação Matemática – Departamento de Matemática, IGCE, Universidade Estadual Paulista, Unesp, Campus Rio Claro, SP. http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html. Endereço para correspondência: 1137 Western Road, London, Ontario, Canada, N6G 1G7. scucugliarrs@yahoo.com.br

Finally, one emphasized how understandings produced during the process of experimentation with technologies conditioned the (re) elaboration of conjectures and permeated, gradually, mathematical discussions in terms of rigor.
Keywords: Mathematics Education. Fundamental Theorem of Calculus. Graphing Calculators. Thinking Collectives.

INTRODUÇÃO

Por entender que a informática vem possibilitando discussões sobre fundamentos da matemática e reorganizando dinâmicas em Educação, desenvolvi uma dissertação de mestrado na qual lancei olhares sobre como estudantes investigam o Teorema Fundamental do Cálculo com calculadoras gráficas. Aliás, como será enfatizado, tal enfoque pautou-se especificamente sobre como *Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas* investigam o referido teorema (SCUCUGLIA, 2006).

O mosaico constituído por pesquisas em Educação Matemática sobre calculadoras gráficas e ensino-aprendizagem de Cálculo é consideravelmente denso. Os altos índices de reprovação nesta disciplina vêm condicionando há décadas a elaboração de muitas propostas metodológicas voltadas a sala de aula (ETCHELLS, 1993; BALDINO, 1996; VILLARREAL, 1999; OLIMPIO JUNIOR, 2006). Ainda, considerando-se a disseminação sobre o uso de calculadoras gráficas a partir dos anos 90, muitas pesquisas sobre o pensamento matemático produzido por estudantes ao investigarem com esta tecnologia conceitos sobre Cálculo também têm sido realizadas (HURTZ, 1997; TOUVAL, 1997).

Por que então mais uma pesquisa envolvendo tais temáticas? Considero dois aspectos fundamentais para buscar legitimar a elaboração de minha dissertação: (1) a originalidade da atividade (tarefa) proposta, principalmente no que se refere a investigação sobre a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo. Embora o *design* de tal atividade tenha sido desenvolvido com base em comandos e programas específicos da Calculadora TI-83, ela pode ser “facilmente adaptada” a outros tipos de tecnologias da informação como CAS ou *Applets;* (2) as lentes teóricas utilizadas na criação e análise de dados possibilitaram enfatizar a importância das mídias e o aspecto coletivo que constituem processos de produção de significados e conhecimentos (matemáticos). Tais justificativas, baseadas em uma revisão de literatura mais apropriada, pode ser encontrada no texto original de minha dissertação (SCUCUGLIA, 2006). Neste artigo, apresentarei apenas uma visão geral sobre os principais aspectos e dimensões abordados na referida pesquisa.

EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIAS

O GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, Mídias e Educação Matemática) oferece diversos cursos, em diversificados níveis, envolvendo ensino-aprendizagem de matemática e o uso de tecnologias informáticas, incluindo calculadoras gráficas (BORBA, 1999a; BORBA; PENTEADO, 2003). Em 2002, por exemplo, o GPIMEM ofereceu um curso de extensão universitária destinado a estudantes de graduação da Universidade Estadual Paulista, Campus Rio Claro, SP, (UNESP/RC), do qual pude participar como assistente. Alguns questionamentos levantados pelos estudantes, ao investigarem múltiplas representações de funções durante este curso, trouxeram inquietações com relação à questão da *demonstração* e/ou *prova rigorosa* em Educação Matemática (SCUCUGLIA, 2002)[1].

> O estudante de matemática é, geralmente, defrontado com uma apresentação lógico-dedutiva do conhecimento. A um conjunto de teoremas seguem-se as provas lógicas. O conhecimento parece ter sido produzido num ato mágico. As proposições assim apresentadas são sempre verdadeiras, e válidas todas as inferências. A matemática se constitui, então, num conjunto crescente de verdades imutáveis e eternas. [...] tal concepção está impregnada do caráter mecanicista e autoritário da razão clássica, que procura manter sua hegemonia. (TENÓRIO, 2001, p. 90)

Tendo em vista o comentário acima, o referido curso de extensão buscou articular investigação e dedução no processo de exploração realizado pelos estudantes com calculadoras gráficas que discutiam, por exemplo, a necessidade de se desenvolver uma prova algébrica sobre uma conjectura elaborada a partir da visualização de gráficos. Esses acontecimentos condicionaram algumas de minhas inquietações iniciais: qual o papel da calculadora gráfica em demonstrações envolvendo pensamento matemático?

Borba (1999b) considera que o processo de investigação de conceitos matemáticos fundamentais em uma disciplina realizado por estudantes com mídias informáticas pode ser denominado *experimentação com tecnologias*. Para Borba e Villarreal (2005), este processo abrange: i) uso de procedimentos e processos educativos que possibilitam a geração de conjecturas; ii) possibilidade de testar conjecturas usando uma diversidade de exemplos; iii) disposição de diferentes tipos de representações e iv) possibilidade de descoberta de resultados matemáticos desconhecidos previamente à experimentação.

Conseqüentemente, a *visualização* é considerada um elemento fundamental no processo de pensamento, de produção de significados matemáticos, pois suas características (múltiplas representações e simulações) condicionam informações e modelam a (re) elaboração de conjecturas, entendimentos e justificativas neste contexto[2].

---

[1] Em Educação Matemática é possível considerar a existência de tendências sobre o tema *demonstração* considerando-se a densidade de pesquisas, vieses e possibilidades para discutir tal tema (HANNA, 1983; ERNEST, 1991; GARNICA, 1995; REIS, 2001; BICUDO, 2004; CARVALHO, 2004). Do ponto de vista da filosofia da matemática, buscando-se evidenciar as convergências sobre o uso de tecnologias informáticas no fazer matemático, podem ser evidenciadas discussões como a concepção de crises de fundamentos da matemática, divergências às tendências formalistas, logicistas e intuicionistas, sinergia com os resultados de Gödel e Turing, tensões sobre a prova do Teorema das Quatro Cores e dimensões heurísticas-epistemológicas envolvendo, por exemplo, filosofia falibilista e resolução de problemas (LÉVY, 1998;TENÓRIO, 2001).

[2] É possível notar influências diretas nestas concepções com base em Polya (1945) e Lakatos (1976). Estão sendo, portanto, evidenciados os aspectos investigativos no fazer matemático, fundamentos da matemática, exemplos históricos de caráter heurístico, concepções sobre resolução de problemas (com Informática).

Com base nestes entendimentos e em inquietações sobre o ensino de Cálculo[3], emergiu um questionamento diretriz: ***Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?***

SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

Para discutir a idéia de Seres-Humanos-com-Mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005) buscando um esclarecimento sobre o que entendo por Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, destaco inicialmente a concepção de *reorganização do pensamento*. Tikhomirov (1981), nitidamente influenciado por tendências socioculturais fundamentadas em Vigotsky (1984), propõe que a Informática e suas interfaces não substituem ou apenas complementam os humanos em suas atividades intelectuais. Os processos mediados por interfaces e instrumentos informáticos *reorganizam* os modos como pensamos. Considero que as dimensões que envolvem o processo de mediação digital reorganizam os elementos constituintes de pensamento, (re)significações, aprendizagens, entendimentos, desenvolvimentos, conhecimentos. Emergem, inevitavelmente, multiplicidades lingüísticas, representacionais, cognitivas, didáticas, epistemológicas e, conseqüentemente, culturais.

Em sinergia com a perspectiva de reorganização do pensamento, podem-se destacar as concepções de Lévy (1993) sobre *Tecnologias da Inteligência*. Nesse contexto Oralidade, Escrita e Informática são entendidas como as tecnologias que condicionaram a temporalidade da humanidade. Coerentemente, Lévy estrutura metáforas para entendermos a idéia de memória neste contexto propondo uma circularidade com a Oralidade, linearidade com a Escrita e hipertextualidade (redes) com a Informática. Assim como a Escrita reorganizou a Oralidade enquanto Tecnologia da Inteligência (gênese da Oralidade secundária), a Informática vem concentrando, potencializando e reorganizando sistemas lingüísticos que a antecederam como numerações, alfabetos, ideografias em geral, etc. (LÉVY, 1998).

Entendo que, no contexto educacional, a Informática, suas interfaces e sua plasticidade redefinem os papéis dos atores humanos e tecnológicos envolvidos no pensamento (matemático). O professor pode constituir um ambiente coletivo de inquietações a partir de informações e potencialidades diversas de programas, hipertextos e/ou objetos virtuais de aprendizagem. As máquinas não dão ao estudante um problema a ser resolvido: os professores e os estudantes com computadores (e outros atores tecnológicos) modelam, resolvem problemas e pensam (matematicamente).

Surgem discussões que enfocam novas caracterizações sobre a matemática e os modos como se engendram as dimensões de ensino-aprendizagem desta disciplina e o uso de mídias informáticas. Emergem modelos sobre contextos envolvendo o condicionamento

[3] Inquietações enquanto docente desta disciplina, mas, principalmente, com base no denso mosaico de pesquisas que enfocam o ensino-aprendizagem desta disciplina e que são intensamente evidenciadas em tendências em Educação Matemática que tratam sobre o ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Superior (VILLARREAL, 1999; OLIMPIO JUNIOR, 2006; JAVARONI, 2007; ROSA, 2008; BARBOSA, 2007).

informático na produção de conhecimento matemático. Torna-se cada vez mais explícito o modo como o *design* dos significados matemáticos é moldado pelas mídias.

Com base nestes entendimentos, o constructo teórico Seres-Humanos-com-Mídias evidencia o papel das tecnologias (informáticas) no processo de produção de conhecimento matemático evidenciando, por exemplo, que o pensamento não é produzido apenas por humanos ou por grupos destes, mas por coletivos do tipo humanos-mídias.

> We believe that humans-with-media, humans-media or humans-with-technologies are metaphors that can lead to insights regarding how the production of knowledge itself takes place (…). This metaphor synthesizes a view of cognition and of the history of technology that makes it possible to analyze the participation of new information technology 'actors' in these thinking collectives[4] (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 23)[5]

Esta visão sobre o conhecimento condicionou a forma como os dados foram produzidos e analisados na discussão sobre a investigação realizada por Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, ou seja, durante a realização da dissertação apresentada resumidamente neste texto. Nesse sentido, busquei enfatizar a relevância de existir uma sinergia entre procedimentos de pesquisa e concepções teóricas defendidas pelo pesquisador (ARAÚJO; BORBA, 2004).

METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa permite ao pesquisador "observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada" (GOLDENBERG, 2003, p. 63). O pesquisador, nessa abordagem, não deve se preocupar fundamentalmente com representatividades numéricas, mas com o aprofundamento da compreensão de determinado grupo social. Bogdan e Biklen (1998) argumentam que um dos enfoques do pesquisador nas ciências qualitativas é compreender o processo pelo qual pessoas constroem significados e descrever o que são aqueles significados.

Ao se investigar como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas exploram o Teorema Fundamental do Cálculo, nota-se que os elementos que constituem os processos de experimentação/demonstração são complexos: envolvem uma diversidade de vertentes provenientes de falas, gestos, argumentações, justificativas, formas de se utilizar mídias, etc. É neste sentido que pode-se considerar que a pesquisa desenvolvida assumiu um caráter qualitativo e que os *experimentos de ensino* e a *análise de vídeos* emergiram como procedimentos em harmonia com a perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias e com o questionamento diretriz proposto na dissertação.

---

[4] Coletivo Pensante e o termo utilizado por Lévy (1999) para enfatizar uma concepção que entende que o conhecimento é produzido por atores humanos e não-humanos. Mais detalhes em Benedeti (2003).

[5] Esta concepção sobre tecnologia está, em minha opinião, intensamente fundamenta em Heidegger (1977) que entende tecnologia como processos e artefatos usados para estruturar a experiência humana.

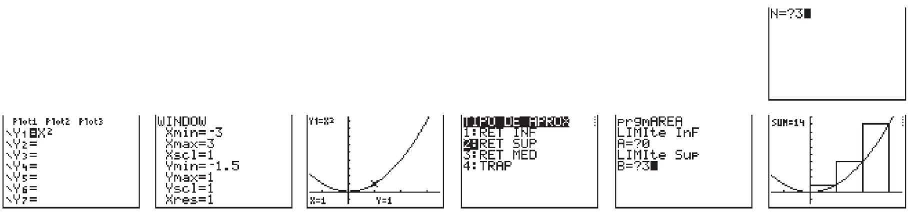
Steffe e Thompsom (2000) entendem experimentos de ensino como séries de encontros entre estudantes e professor-pesquisador referente a ensino-aprendizagem nos quais o pesquisador busca um entendimento sobre como estudantes pensam ao explorar problemas: uma compreensão sobre como se constituem os significados e conhecimentos produzidos por estudantes no momento dos experimentos (*Students' Mathematics*). Busca-se destacar a experimentação e a interação entre professor-pesquisador e estudantes na produção (coletiva) de conhecimento (matemático). As conjecturas e inferências elaboradas nas sessões de experimentos de ensino, identificadas a partir das ações e linguagens de estudantes (com tecnologias), permitem que o pesquisador identifique elementos que condicionam a produção de pensamento. Em sinergia, com registros em *videotapes*, pesquisadores podem registrar e investigar continuamente o pensamento de estudantes.

Powell et al. (2004) destacam que o vídeo é um importante e flexível instrumento de coleta de informações orais e visuais, pois registra interações complexas, permite que pesquisadores reexaminem continuamente os dados e estruturem entendimentos sobre *insights* e ações. Estes autores propõem um modelo analítico não linear para estudar, discutir e estruturar o modelo do pensamento matemático de estudantes. Tal modelo baseia-se em: observação dos dados, descrição dos dados, identificação de eventos críticos, transcrição dos dados, codificação, composição da narrativa e construção do enredo.

Pautado nestes entendimentos, e tendo em vista o questionamento *como estudantes-com-calculadoras-gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo*, participei como assistente em um curso temático de 16 horas oferecido pelo GPIMEM e destinado a estudantes do primeiro ano da graduação em M atemática da UNESP/RC em 2004. A partir deste curso, no qual os estudantes puderam se familiarizar com a Calculadora TI-83 e explorar várias atividades envolvendo múltiplas representações de funções, foram selecionadas duas duplas de estudantes (Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara) para realizar experimentos de ensino. As duplas trabalharam em 4 sessões de aproximadamente 3 horas cada, que foram filmadas. Baseado no modelo analítico de Powell et. al (2004), foram criados episódios que sintetizam momentos críticos sobre o pensamento dos coletivos de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas. Houve uma inquietação constante em criar versões cada vez mais elaboradas da atividade de experimentação com calculadoras gráficas que explora o teorema aqui enfocado. Diversas versões desta atividade foram criadas antes das sessões de experimentos de ensino e uma versão final foi apresentada com base na performance dos coletivos pensantes. A seguir, descrevo alguns dos episódios, nos quais, em termos de análise, busco evidenciar o papel das mídias e o caráter coletivo que envolveu os atores humanos e tecnológicos no pensamento matemático. Ou seja, como o *design* da calculadora TI-83 moldou os significados e conhecimentos produzidos coletivamente nas sessões dos experimentos de ensino.

SOMA DE RIEMANN E INTEGRAÇÃO DEFINIDA

Evidenciarei neste tópico o modo como os programas AREA e SOMA[6] e o comando de Integração Definida da Calculadora TI-83 possibilitaram que Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigassem o processo de Integração a partir da exploração de uma atividade que propunha calcular o valor da área da região determinada pelo eixo-x e pelo gráfico de $y = x^2$ em [0; 3]. Ao experimentarem o programa AREA (descrito na seqüência de figuras a seguir) os coletivos pensantes puderam produzir o seguinte entendimento: este programa calcula um valor aproximado para a área de uma região constituída pelo eixo-x e pelo gráfico de uma função $y = f(x)$ em um intervalo [a; b], executando uma simulação[7] envolvendo diferentes tipos de retângulos. Ao ser executada a simulação é indicado um valor numérico que representa a soma dos valores das áreas dos retângulos.



Explorando $y = x^2$ e configurando a janela de visualização
Experimentando o Programa AREA

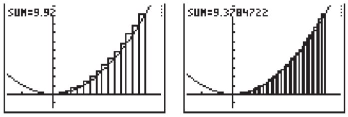
Enquanto professor-pesquisador, nas sessões de experimentos de ensino, busquei engajar as estudantes em um processo de pensar-com-o-programa-AREA. A partir da atividade proposta, que indicava a utilização gradativa de algumas notações, os coletivos pensantes puderam conjecturar que este programa executa um somatório do tipo $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

Em seguida, foi iniciada a exploração do conceito de integração, utilizando o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$ na Calculadora TI-83[8]. A partir do exemplo investigado ($y = x^2$ em [0; 3]), indicado nas figuras abaixo, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas puderam produzir os seguintes entendimentos: i) O programa AREA exibe simulações e valores que tendem a 9; ii) O programa SOMA indica numericamente valores que tendem a 9 e há uma informação simbólica n → InF 9 ("n tendendo ao infinito igual a 9"); iii) O comando de Integração definida da Calculadora TI-83 simula um preenchimento sobre a área da Região R e exibe a informação $\int f(x)dx = 9$.

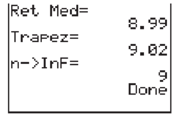
[6] Estes Programas foram (re) configurados, traduzidos e editados a partir de um *download* em http:// www.ti.com.

[7] Embora as discussões sobre o *status* de simulações em Educação Matemática possam ser bastante interessantes neste contexto, tais inferências serão tratadas convenientemente em outros momentos.

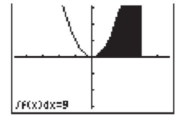
[8] Para a Calculadora Gráfica TI-83 o comando $\int f(x)dx$ é utilizado para o cálculo de Integrais Definidas do tipo $\int_a^b f(x)dx$.



Programa AREA: Soma tendendo a 9



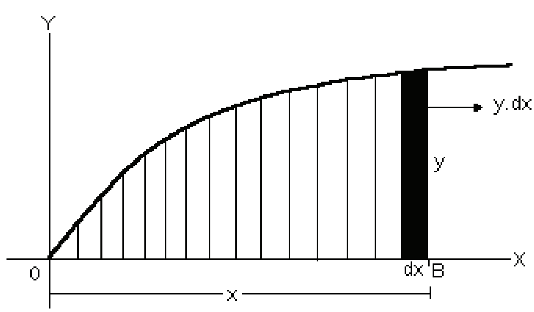
Programa SOMA



Comando de Integração Definida

Ao desenvolverem uma coordenação complexa envolvendo múltiplas representações entre os programas AREA e SOMA, os coletivos pensantes puderam entender o que significa $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Ainda, identificaram que tal notação viabilizava uma possibilidade de se calcular o valor exato da área da Região R. Intuitivamente, os coletivos pensantes puderam conjecturar que no processo de se obter retângulos de área cada vez menor, executando-se uma soma que tende ao infinito considerando-se os valores destas áreas, é possível calcular o valor exato da área da Região R. Nas próprias palavras das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas: "*cada retângulo vai ficando cada vez menor, vai preencher tudo*" (Ana Paula/Viviane); "*é como somar infinitos segmentos de reta*" (Moara/Naiara). Tais conjecturas foram condicionadas principalmente pela informação visual apresentada pelo programa SOMA (n → InF). Então, novamente coordenando gradativamente múltiplas representações e evidenciando o uso gradativo de notações, os coletivos pensantes puderam conjecturar que a área da Região R pode ser calculada, entendida e/ou representada por $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$: essência do Teorema Fundamental do Cálculo.

Considero relevante neste momento enfatizar que é freqüente em tendências históricas tradicionais considerar que Leibniz, com base na notação de Cavallieri, criou o símbolo de integral pensando geometricamente em uma "soma de retângulos". Na própria argumentação de Leibniz: "*Será útil escrever* $\int$ *para omn., tal que* $\int \lambda = \text{omn.}\lambda$*, ou a soma dos* $\lambda' s$ *"* (BARON; BOS, 1985, p. 54).



Integração de Leibniz

Embora essa notação não contenha os intervalos de integração $\int ydx$, simboliza o valor e a área de uma curva e eixo-x entre zero e *x*. Isto é, para Leibniz (ver figura acima), $\int ydx$ *é a área da curva y(x)*. Concomitantemente, entendendo y(x) como f(x) e surge $\int f(x)dx$: a qual é a mesma notação da Calculadora TI-83! Ainda, parece pertinente considerar que a idéia de criar uma notação que representasse a "soma dos retângulos", foi o que permitiu a Leibniz elaborar mais regras sobre o Cálculo e explorar o Teorema Fundamental do Cálculo, expondo que a diferencial da área $O\grave{C}B$ é o retângulo ydx : ydx : $d\int ydx = ydx$. Isto mostra a "relação inversa" entre *d* e $\int$. Reciprocamente, com esta notação, tem-se $\int dy = y$ (BARON; BOS, 1985). Fica, portanto, evidenciada a relevância referente ao uso e elaboração de notações no fazer matemático e a intrínseca relação entre Soma de Riemann, Integração e o Teorema Fundamental do Cálculo.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Na segunda sessão de experimentos de ensino, explorando exemplos de funções polinomiais com o Comando de Integração Definida da Calculadora Gráfica, os coletivos pensantes estabeleceram conjecturas sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

> Suponhamos f contínua em um intervalo fechado [a; b]. **Parte I:** Se a função G é definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, para todo x em [a; b], então G é uma antiderivada de f em [a; b]. **Parte II:** Se F é qualquer antiderivada de f em [a; b] então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$(SWOKOWSKI, 1995, p. 362)

Em um dos episódios discuti a forma como as estudantes exploraram as funções de equações $y = 2x$, $y = 3x^2$ e $y = 4x^3$ utilizando o Comando de Integração Definida da Calculadora TI-83, considerando-se diferentes intervalos. Ao coletar os dados com a calculadora gráfica, os coletivos pensantes identificaram padrões e elaboraram generalizações com os resultados obtidos. Esse processo possibilitou que fosse investigada, de modo inicial, a relação entre integração e diferenciação. A primeira parte do TFC, a Relação Fundamental: F' (x) = f(x), proposta a partir da atividade abaixo.

Equação	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
y = 2x	[0; 1]	**1**
	[0; 2]	**4**
	[0; 3]	**9**
	[0; x]	$\mathbf{x^2}$
$y = 3x^2$	[0; 1]	**1**
	[0; 2]	**8**
	[0; 3]	**27**
	[0; x]	$\mathbf{x^3}$
$y = 4x^3$	[0; 1]	**1**
	[0; 2]	**16**
	[0; 3]	**81**
	[0; x]	$\mathbf{x^4}$

1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83, preencha a tabela ao lado, calculando o valor da integral definida no intervalo proposto.
2) Determine uma equação no caso do intervalo [0; x] que represente o valor encontrado para a área.
3) Se a equação y = f(x) na primeira coluna da tabela determinar uma equação y = F(x) na terceira coluna, qual a relação entre f(x) e F(x)?

Como indicado na atividade, os coletivos utilizaram o Comando de Integração Definida e determinaram os resultados em cada item. Em seguida, conjecturaram com relativa facilidade os padrões de generalização, encontrando x^2, x^3 e x^4. Com a exploração de f(x) = 2x e com o resultado $F(x) = x^2$, foram elaboradas conjecturas sobre a Relação Fundamental, isto é, foi identificado que a função dada é uma derivada da generalização encontrada. Ou seja, de modo "inverso", x^2 pode ser entendida como uma antiderivada ou primitiva de 2x.

Nesse momento, ficou evidenciado que, ao investigar alguns exemplos triviais de funções polinomiais e elaborar padrões com as informações coletadas com a Calculadora Gráfica em um processo indutivo, coordenando representações, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas podem investigar a Relação Fundamental do TFC com base na utilização do Comando $\int f(x)dx$.

Equação	Intervalo:	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	**3**
	[2; 3]	**5**
	[1; 3]	**8**
	[a; b]	$\mathbf{b^2 - a^2}$
$y = 3x^2$	[1; 2]	**7**
	[2; 3]	**19**
	[1; 3]	**26**
	[a; b]	$\mathbf{b^3 - a^3}$
$y = 4x^3$	[1; 2]	**15**
	[2; 3]	**65**
	[1; 3]	**80**
	[a; b]	$\mathbf{b^4 - a^4}$

Em um outro episódio, explorando uma atividade semelhante, ao coletar informações com a Calculadora Gráfica, os coletivos pensantes, assim como no episódio anterior, identificaram padrões e elaboraram generalizações com base nos resultados coletados com o Comando $\int f(x)dx$. Dessa forma, foi possível investigar o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: a segunda parte do TFC, proposta a partir da atividade abaixo.

1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83, preencha a tabela ao lado calculando o valor da integral definida no intervalo proposto.
2) Determine uma equação no caso do intervalo [a; b] que represente o valor encontrado para a área.
3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Determine o valor de $\int_a^b f(x)dx$.

Ambos os coletivos apresentaram dificuldade em identificar o primeiro padrão de generalização esperado: $b^2 - a^2$. As orientações de ensino pautaram-se em comparar os padrões elaborados na atividade anterior com as informações obtidas na investigação da atual atividade. Novamente, o processo de experimentação com tecnologias possibilitou que Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturassem o TFC.

Com o coletivo envolvendo Moara e Naiara, por exemplo, indiquei que anteriormente haviam sido encontrados x^2, x^3 e x^4 para o intervalo [0; x]. Propus supor que se fosse o intervalo [0; b] seriam encontrados os valores b^2, b^3 e b^4. Com essa comparação, foi conjecturado o padrão: **$b^2 – a^2$**. Foram então explorados os itens seguintes e determinados os resultados $b^3 – a^3$ e $b^4 – a^4$. Em seguida, os coletivos iniciaram uma discussão buscando generalizar os padrões encontrados, isto é, começaram a abordar a terceira questão proposta nesta atividade.

As estudantes compararam cada padrão encontrado com a função de origem, ou seja, identificaram que, para y = 2x, temos uma antiderivada $F(x) = x^2$ e o padrão encontrado é $b^2 – a^2$. Neste caso, $b^2 – a^2$ pode ser representado por F(b) – F(a). No entanto, esse fato também acontece em outros exemplos explorados! Conseqüentemente, as estudantes puderam conjecturar a segunda parte do TFC com uma “generalização de generalizações”, com base em uma tabela de dados, como descrito a seguir.

$y = f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$b^2 – a^2$
$y = f(x) = 3x^2$	$F(x) = x^3$	$b^3 – a^3$
$y = f(x) = 4x^3$	$F(x) = x^4$	$b^4 – a^4$
y = f(x)	**F(x) ; F’(x) = f(x)**	**F(b) – F(a)**

Ricardo: Se consideramos 2x, qual pode ser uma antiderivada?

Ana Paula e Viviane: x^2.

Ricardo: x^2?

Ana Paula e Viviane: $b^2 – a^2$.

Viviane: $b^3 – a^3$.

Ricardo: E se [a gente] pegar y = f(x)?

Ana Paula: Vai ser integral de f(x)dx, não é?

Viviane: Então isso aqui vai ficar F(b) – F(a).

Fica evidenciado que, ao investigar exemplos de funções polinomiais e elaborar padrões com as informações obtidas com a Calculadora Gráfica, em um processo indutivo e intuitivo, coordenando e articulando representações e informações diversas, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas (e outras Mídias) podem investigar a Relação Fundamental e o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: do TFC.

As dimensões heurísticas condicionadas pelas tecnologias informáticas permitem considerar que a experimentação com tecnologias possibilita primeiramente um momento de investigação, descoberta de resultados, elaboração de conjecturas. Posteriormente, torna-se coerente o desenvolvimento de uma abordagem algébrica dedutiva, gradativamente rigorosa. Nitidamente, surgem possibilidades diferenciadas aos modelos tradicionais de ensino-aprendizagem de matemática (BORBA; PENTEADO, 2003).

Reorganizam-se momentos e dinâmicas unívocas do tipo *professor → aluno* e *enunciado → demonstração*. Conseqüentemente, diversas dimensões que emergem com base nessas concepções, tanto de caráter metodológico como epistemológico/didático, ligadas à idéia de experimentação com tecnologias, podem permear intensa e gradativamente produções coletivas de pensamento, evidenciando instâncias heurísticas e pedagógicas, condicionando discussões dedutivas no contexto investigativo. "Uma das mais curiosas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um caráter experimental" (LÉVY, 1998, p. 104).

Após "experimentarem" o TFC, os coletivos de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas foram engajados em uma abordagem que enfatizou a elaboração de hipóteses e a utilização de notações e artifícios matemáticos lógicos para estruturar o convencimento: uma abordagem dedutiva. Com fundamentação em Hoffmann e Bradley (2003) os coletivos pensantes desenvolveram uma abordagem algébrica do TFC em sessões finais dos experimentos de ensinos. Considero que as notações simplificadas e as inferências intuitivas propostas por estes autores eram coerentes com as notações e conjecturas elaboradas no processo de experimentação com a calculadora gráfica. Antes de se indicar a notação específica de integração na abordagem dedutiva, por exemplo, buscou-se entender A(x) como $\int_a^x f(x)dx$. Ainda, foi utilizada uma noção intuitiva do Teorema do Valor Médio para Integrais.

Embora tenham sido enfatizadas representações escritas, os coletivos pensantes puderam: (i) propor diversas inferências no processo de demonstração baseados em conjecturas que emergiram no processo de experimentação, e; (ii) apreciar o fato de concluírem e entenderem a demonstração realizada, como evidencia a transcrição a seguir.

Ricardo: Calcula agora A(b).

Viviane: A(b) = F(b) - C. Só que - C é F(a).[Escreveu A(b) = F(b) - F(a)]. Só que esse A(b)...

Ana Paula: É a área. A(b) no caso é a integral, não é?(...) de a até b de f(x) dx.

Viviane: É. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Ana Paula: Ah! Que legal!

Viviane: Saiu bem mais fácil.

Ana Paula: Certinho. Primeira vez que a gente conseguiu demonstrar alguma coisa!

Ricardo: E como que eu posso representar essa área?

Naiara: Pela integral?

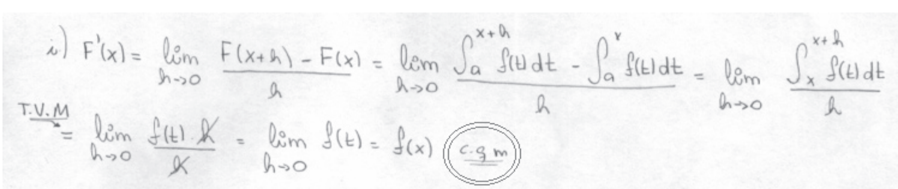
Moara: Integral de a até b.

Naiara: Ah! Eu sei que a gente não viu dessa forma. **Dessa forma é bem mais fácil!**

Além do desenvolvimento gradativo de formalização matemática a partir de notações e processos inerentes à experimentação com tecnologias, existem diversos outros modos de enfatizar este processo no contexto da investigação matemática.

EVIDENCIANDO A EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIAS NO PROCESSO INVESTIGATIVO

Ao se finalizar uma abordagem dedutiva, matemáticos utilizam ordinariamente a abreviação C.Q.D. (Como Queríamos Demonstrar). Quando o coletivo envolvendo Ana Paula e Viviane desenvolveu a abordagem dedutiva do TFC na segunda sessão de experimentos de ensino, não foram elaboradas inferências "diferenciadas" na primeira parte do TFC (na demonstração da Relação Fundamental), mas as estudantes indicaram a abreviação C.Q.M. (como queríamos mostrar) na formalização dedutiva, como explicita a figura abaixo.



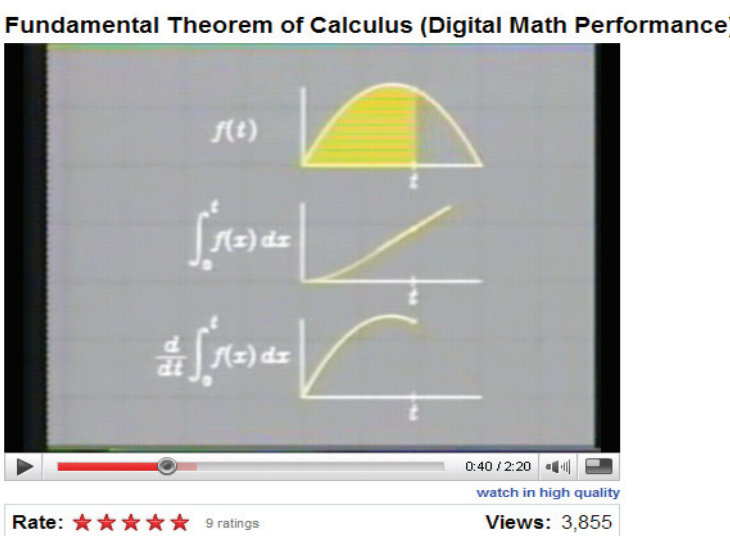
Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Argumentações sobre a Relação Fundamental do TFC.

No entanto, na abordagem do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, o coletivo pensante constituído por Ana Paula e Viviane elaborou diversas conjecturas e inferências, mas não foram expressas abreviações em suas notações algébricas.

É no cerne desta observação que se destaca outro modo de evidenciar a experimentação com tecnologias no processo de investigação matemática. Ao serem elaboradas conjecturas no processo de experimentação, a abordagem dedutiva assume um papel de confirmação da conjectura elaborada (VILLIERS, 2001). Portanto, ao se confirmar dedutivamente um resultado conjecturado experimentalmente, ao invés de se indicar C.Q.D. (ou C.Q.M.), considero que a abreviação mais coerente para se utilizar ao finalizar uma abordagem dedutiva após uma abordagem experimental é C.H.C. (Como Havíamos Conjecturado!). Desse modo, enfatiza-se a importância do processo de experimentação no contexto investigativo, destacando-se a relevância heurística na investigação matemática e na demonstração em Educação Matemática.

Uma outra forma de se evidenciar a experimentação no contexto investigativo é com a utilização de simulações (vídeos, aplicativos *Applets*) sobre o tema investigado. A utilização de alguns recursos informáticos, incluindo jogos eletrônicos (ROSA, 2008), permite conceber a existência de provas visuais (HANNA, 2000), redefinindo o modo de utilização de abordagens dedutivas tradicionais. Pautando-se em abordagens experimentais, condicionada por potencialidades das tecnologias informáticas, estudantes podem investigar conteúdos matemáticos com base em argumentações que privilegiam as múltiplas inferências.

Um vídeo clipe sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, por exemplo, baseado na idéia de performance matemática digital (http://www.edu.uwo.ca/dmp), está disponível em *www.youtube.com.* Este vídeo, além de evidenciar elementos artísticos no fazer matemático, compila aspectos visuais e geométricos e vem sendo utilizado em salas de aulas de Cálculo e em dinâmicas envolvendo ensino-aprendizagem de matemática como mini-cursos e concursos.



http://www.youtube.com/watch?v=gMdh_fiGZag.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo busquei resumir minha dissertação de mestrado (SCUCUGLIA, 2006) a qual o foco central pautava-se em buscar desenvolver uma alternativa experimental para se investigar o Teorema Fundamental do Cálculo. Baseado no *design* da Calculadora TI-83 elaborei uma atividade para que estudantes pudessem ter a oportunidade de produzir significados sobre os conceitos de Soma de Riemman e Integração Definida e os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo. Com a realização de experimentos de ensino, e com lentes teóricas fundamentadas na concepção de Seres-Humanos-com-Mídias, pude criar perspectivas sobre como coletivos de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas elaboraram conjecturas e entendimentos a partir da coordenação de múltiplas representações e a partir de generalizações de padrões identificados com programas e comandos da calculadora gráfica na investigação de funções polinomiais. Além disso, pude perceber que o processo de experimentação com tecnologias condicionou o modo como os coletivos pensantes desenvolveram a abordagem algébrica do TFC, que enfatizou níveis gradativos de rigor matemático a partir do modo como a utilização de notações foi desenvolvida nas sessões de experimentos de ensino. Tal abordagem pode ser considerada um viés para que estudantes venham a apreciar um modo de se fazer matemática, tornando esta uma disciplina de caráter inclusivo ao invés de cada vez mais estudantes (de Cálculo) criarem aversão a ela.

Tornam-se inevitáveis ressalvas[9] e novas inquietações desde que foi consolidada o texto dissertativo referente à pesquisa comunicada neste artigo. Tais inquietações se manifestam, por exemplo, na (re) significação dos termos aqui já expostos. Contudo, parece existir uma significativa convergência em contribuição ao denso mosaico constituído por pesquisas envolvendo calculadoras gráficas e demonstração com informática em Educação Matemática, principalmente em contextos envolvendo níveis gradativos de rigor/formalismo matemático (REIS, 2001) na investigação de conteúdos atinentes ao Cálculo. A experimentação com tecnologias vem possibilitando que entendimentos, significados e conhecimentos matemáticos sejam produzidos coletivamente no processo de ensino-aprendizagem, transformando a matemática e a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.; BORBA, M.C. *Construindo Pesquisas coletivamente em Educação Matemática*. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

[9] Por exemplo, limitações do ponto de vista matemático-formal como: abordagem intuitiva/visual do Teorema do Valor Médio para Integrais, não utilização explícita da notação de partição, etc. Com essas identificações, podem ser iniciadas explorações de outros Teoremas e resultados articulados ao TFC ou serem discutidas concepções de autores diversos, podendo estruturar inferências gradativamente formais sobre os conteúdos abordados em Cálculo Diferencial e Integral e como esta disciplina pode ser estruturada buscando-se consistências. Possibilitam-se estruturar lentes sobre sistemas formais constituídos de elementos intrinsecamente articulados: axiomas e definições, teoremas, postulados e corolários. A demonstração pode assumir, dentre vários, o papel de *sistematização* (VILLIERS, 2001). O Teorema do Valor Médio para Integrais, por exemplo, está intrinsecamente articulado aos Teoremas do Valor Extremo e do Valor Intermediário.

BALDINO, R. *Sobre o papel do conceito de limite no primeiro curso de Cálculo*. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 1996, São Paulo. *Anais*... São Paulo: SBEM, 1996.
BARBOSA, S. M. Abordagens sobre Regra da Cadeia: uma discussão acerca de sua demonstração. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: "Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa", 9, Belo Horizonte, *Anais*... Belo Horizonte: Uni-BH, 2007.
BARON, E.; BOS, H. J. M. *Curso de História da Matemática*. Origens e Desenvolvimento do Cálculo. 2.ed. v.5. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.
BENEDETTI, F. C. *Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes*. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
BICUDO, I. *Peri Apodeixeos/De demonstratione*. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.
BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Qualitative Research for Education:* an Introduction for Theory and Methods. 3.ed. Boston: Allyn and Bacon, 1998.
BORBA, M. C. *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999.
______. Dimensões da Educação Matemática à Distância. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) *Educação Matemática:* pesquisa em movimento. São Paulo Cortez, 2004.
BORBA, M. C. *GPIMEM e Unesp*: pesquisa, extensão e ensino em Informática e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999a.
BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).
BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking:* Information and Comunication Thechnologies, Modeling, Experimentation and Visualization. USA: Springer, 2005. (Mathematics Education Library).
CARVALHO, A. M. *A Extremidade da Demonstração.* 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. Hanpshire: The Falmer, 1991.
ETCHELLS, T. Computer Algebra Systems and students' understanding of the Riemann Integral. In: MONAGHAN, J.; ETCHELLS, T**.** *Computer Algebra Systems in the classroom.* Leeds, U.K: Center for Studies in Science and Mathematics Educations, 1993.
GARNICA, A. V. M. *Fascínio da Técnica, declínio da crítica:* um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.
GOLDENBERG, M. *A arte de Pesquisar:* Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.
HANNA, G. Rigorous Proof in Mathematics Education. *Curriculum Series*. Toronto: Ontario, 1983.
HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an Overview**.** *Educational Studies in*

Mathematics. 2000.
HEIDEGGER, M. *The Question Concerning Technology and Other Essays*. New York, NY, Harper Torchbooks, 1977.
HOFFMANN, L.; BRADLEY, G. *Cálculo:* Um curso moderno e suas aplicações. 7.ed. Tradução de Ronaldo Sergio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
HURTZ, M. Visualizing the Proof of the Mean-Value Theorem for Derivates. *Mathematics Teachers*. USA: NCTM, 1997.
JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.
OLIMPIO JUNIOR, A. *Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática* – Uma Abordagem Integrando Oralidade, Escrita e Informática. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.
LAKATOS, I. *Proofs and Refutations*: the logic of mathematical discovery. Cambridge: 1976.
LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência:* O futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
______. *Máquina Universo:* Criação, Cognição e Cultura Informática. Porto Alegre: Artimed, 1998.
______. *Inteligência Coletiva:* por uma cultura do ciberspaço. São Paulo: Edições Loyola, 1999.
POLYA, G. *How to Solve it?* Princeton University Press, 1945.
POWELL, A.; FRANCISCO, J.; MAHER, C. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antônio Olimpio Junior. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*. Rio Claro, n.21, 2004.
REIS, F. da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:* a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (doutorado). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2001.
ROSA, M. *A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game:* relações com ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.
SCUCUGLIA, R. *Calculadoras Gráficas:* Conjecturando um teorema a partir de um estudo investigativo de funções. In: Simpósio de Iniciação Científica, SIC, 2002, Rio Claro. Anais do V Simpósio de Iniciação Científica. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2002.
______. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. 1.v. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.
STEFFE, L.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Research design in mathematics and science education*, Hillsdale, NJ, 2000.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica.* v.1, 2.ed. São Paulo: Makrom Books, 1995.
THIKHOMIROV, O. The psychological consequences of the computerization. In: WERSTCH, J. *The concept of activity in soviet psychology*. New York: Sharp, 1981.
TENÓRIO, R. *Computadores de Papel:* máquinas abstratas para um ensino concreto. São Paulo: Cortez, 2001.
TOUVAL, A. Investigating a Definite Integral: From Graphing Calculator to Rigorous Proof. *Mathematics Teachers.* USA: NCTM, 1997.
VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1984.
VILLIERS, M. Papel e Funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. São Paulo: *Educação e Matemática,* 2001.
VILLARREAL, M. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.* 1v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.