

Decisões didáticas e fatores que as influenciam no ensino de razões trigonométricas

Didactic decisions and factors that influence them in the teaching of trigonometric reasons

ELISÂNGELA BASTOS DE MELO ESPINDOLA¹

ELIDA LUBERIAGA²

JANA TRAGALOVA³

Resumo

Apresentamos um estudo sobre as decisões didáticas de uma professora e a identificação de fatores que as originam em relação a seu trabalho documental para o ensino de trigonometria. Baseia-se o estudo na abordagem documental do didático; no modelo dos níveis de atividade do professor, na teoria antropológica do didático e no modelo de fatores decisórios. Seguindo os pressupostos da metodologia de investigação reflexiva, durante duas semanas, acompanhou-se o trabalho documental de uma professora sobre a elaboração de uma sequência e de uma aula de revisão sobre o ensino de razões trigonométricas. Os resultados apontam suas tomadas de decisões, desencadeadas por fatores epistêmicos (tipos de tarefas e de técnicas) ou relacionados à história didática (relação entre professora e alunos) sobre o ensino do tema.

Palavras-chave: *Decisões didáticas; Abordagem documental do didático; Modelo dos níveis de atividade do professor; Teoria antropológica do didático.*

Abstract

This work aims to present an analysis of a teacher's didactic decisions and the identification of factors that raised them in relation to her documentary work for the teaching of trigonometric ratios. The study is based on the documentary approach of didactics; the model of the teaching activity; the anthropological theory of teaching; and the model of factors that influence decision-making. Based on the assumptions of the reflective research methodology, the documentary work of a teacher on the elaboration of a sequence and a revision lesson on the teaching of trigonometry was observed during two weeks. The outcomes point out that her decision-making resulted from epistemic factors (types of tasks and techniques), or was related to the didactic history (the relationship between teacher and students) on the teaching of the topic.

Keywords: *Didactic decision-making; Documentary approach of didactics; Model of the teaching activity; Anthropological theory of teaching.*

¹Doutora em Educação: Professora do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências. Universidade Federal Rural de Pernambuco/ UFRPE - ebmespindola@gmail.com.

²Licenciada em Matemática: Universidade Federal Rural de Pernambuco/UFRPE - elidabdlbezerra@hotmail.com.

³ Doutora em Didactique des Mathématiques: Maître de conférences, Université Claude Bernard Lyon 1/ UCBL - jana.trgalova@univ-lyon1.fr.

Introdução

Apresentamos um estudo sobre as decisões didáticas de uma professora de Matemática (BESSOT et al., 2013), atuante no Ensino Médio, em relação a seu trabalho documental (GUEUDET; TROUCHE, 2007). Particularmente, interessamo-nos em estudar a tomada de decisões didáticas da professora, quando ela não estava na presença dos alunos, ou seja, no momento de planejamento de suas aulas.

Para analisar as decisões didáticas e os fatores que as influenciam (BESSOT *et al.*, 2013), tomou-se por base o modelo de níveis da atividade do professor (MARGOLINAS, 2002), levando-se em conta que a cada um dos níveis deste modelo, o professor interage com uma diversidade de recursos (MARGOLINAS; WOZNIAK, 2010; SABRA, 2016). Desta forma, realizou-se inicialmente, uma análise dos recursos utilizados pela professora na construção do tema Razões Trigonométricas (nível +2). Ademais, aprofundou-se uma análise sobre a organização matemática (OM) do saber ensinado (CHEVALLARD, 1999) e as decisões didáticas tomadas, particularmente, na preparação de uma aula de revisão sobre o tema (nível +1).

A seguir, expomos algumas considerações sobre o quadro teórico antes da explicitação da metodologia utilizada, ancorada na investigação reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2010) e os principais resultados do estudo para, enfim, apresentarmos algumas conclusões e novas perspectivas de pesquisa.

A abordagem documental do didático

A abordagem documental do didático (GUEUDET; TROUCHE, 2007) distingue um recurso, considerado como todo elemento suscetível de auxiliar a atividade do professor (ex.: uma atividade transmitida por um colega, livros didáticos), de um documento, o que o professor cria a partir deste recurso ou de um conjunto de recursos.

Inspirada na abordagem instrumental de Rabardel (1995), o processo de construção de documentos a partir de recursos disponíveis, chamado gênese documental, combina dois processos imbricados:

O processo de instrumentação (os recursos equipam o professor e influenciam sua atividade, esse processo marca as evoluções das práticas e dos conhecimentos profissionais induzidos pelo trabalho sobre os recursos) e o processo de instrumentalização (o professor se apropria dos recursos. Ele os ajusta, adapta, enriquece e os reorganiza de acordo com seu objetivo de ensino; trata-se assim, do processo de transformação dos recursos no curso de sua apropriação) (HAMMOUD, 2012, p.43).

De acordo com Trouche (2016, p. 7), a abordagem documental do didático considera o trabalho do professor, em sua unidade e continuidade, como um trabalho com/para os recursos que constituem a matéria de seu ensino. Conforme Trouche (2016, p. 7):

Alguns recursos já foram apropriados pelo professor, eles estão "já lá", eles constituem o que chamamos de seu sistema de recursos, outros recursos são constantemente integrados ou retrabalhados. O sistema de recursos de um professor é, portanto, uma entidade viva, estruturada em relação a sua atividade (de acordo com os níveis de ensino, os tipos de atividade...).

No presente estudo, buscamos examinar uma parte do trabalho documental do professor, que consiste em selecionar recursos, adaptá-los, modificá-los, considerando as modalidades de sua utilização. Para tanto, empreendemos o estudo em dois níveis de sua atividade (MARGOLINAS, 2002): o nível +2, da construção do tema e o nível +1, do projeto da aula; conforme explicamos a seguir.

Níveis de atividade do professor e organização praxeológica

O modelo dos níveis da atividade do professor busca "explicar a interação complexa entre as diferentes situações que o professor experimenta, em diferentes níveis, na maioria das vezes simultaneamente" (MARGOLINAS; WOZNIAK, 2010, p. 236).

Segundo Margolinas (2005), o referido modelo consiste em cinco níveis:

Nível +3 Valores e concepções sobre o ensino/aprendizagem

Projeto educativo: valores educativos, concepções de aprendizagem e de ensino.

Nível +2 Construção do tema

Construção didática global na qual se inscreve a aula: noções a estudar e aprendizagem a realizar.

Nível +1 Projeto de aula

Projeto didático específico sobre a aula observada: objetivos, planificação do trabalho.

Nível 0 Situação didática

Realização da aula, interação com os alunos, tomada de decisões na ação.

Nível -1 Observação da atividade dos alunos

Percepção da atividade dos alunos, regulação do trabalho destinado aos alunos.

Ressaltamos que um nível não está isolado dos demais níveis. De fato, esse modelo não é um modelo temporal, no sentido de que os níveis não seguem a ordem de numeração (LIMA; TRGALOVA, 2008), mas interagem uns com os outros.

Por exemplo, segundo Margolinas (2005), quando um professor planeja sua aula (nível +1), ele interage ao mesmo tempo com o que ele crê ser possível realizar em sala de aula (nível 0); de modo coerente a sua construção global do tema (nível +2), ou de suas concepções de ensino-aprendizagem (nível +3). Ou seja, o projeto de aula que vai ser construído está condicionado às escolhas operadas no nível da construção do tema, e

enfim à situação didática que ele pode vivenciar; esta, por sua vez, é largamente determinada pelas escolhas precedentes.

Sublinhamos aqui que os recursos à disposição do professor podem determinar a natureza das interações entre os níveis de sua atividade. De maneira que concordamos com Margolinas e Wozniak (2010) e Sabra (2016), quando discutem o papel dos recursos à disposição do professor; por exemplo, no projeto de uma aula (nível+1); bem como na construção do tema (nível +2).

Assim, em um primeiro momento, buscamos articular o modelo dos níveis da atividade do professor com alguns dos pressupostos da abordagem documental do didático. Além disso, de acordo com Margolinas e Wozniak (2010), quando um professor prepara o seu ensino (situação de nível +2 ou +1), ele se indaga: Como organizar o estudo de um objeto do saber (matemático)? Sobre este questionamento, tais autores propõem uma articulação entre o modelo de níveis da atividade do professor (MARGOLINAS, 2002) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), em termos de organização praxeológica, formalizada pelo sistema $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Na composição da organização matemática, no sistema $[T, \tau, \theta, \Theta]$, tem-se um tipo de tarefa T, uma técnica τ que permite realizar uma tarefa do tipo T, uma tecnologia θ que fornece um discurso racional (logos) sobre as técnicas e, enfim, a teoria Θ pela qual se fundamenta a tecnologia, e o papel dessa última em relação às técnicas. A seguir, expomos algumas considerações sobre os fatores que influenciam as decisões didáticas, baseadas em Bessot *et al.* (2013), a fim de complementar a presente tecitura teórica.

Decisões didáticas e fatores que as influenciam

Consideramos decisões didáticas aquelas que são tomadas pelos professores para fazer evoluir a aprendizagem dos alunos sobre um dado saber. Levamos em conta dois tipos de fatores que as influenciam (BESSOT *et al.*, 2013): os fatores do tipo *epistêmico* pertinentes à relação pessoal do professor com o objeto a ensinar e os fatores do tipo *história didática* concernentes à história partilhada entre professor e alunos a propósito do saber em jogo no ensino. Dentre os fatores do tipo epistêmico, Bessot *et al.* (2013) distinguem cinco categorias de conhecimentos:

Conhecimentos sobre o que é a disciplina (ED) - conhecimentos que o professor tem sobre o domínio ao qual pertence o objeto a ensinar;
Conhecimentos do que é aprender (EA) - conhecimentos que o professor tem sobre o modo como se aprende Matemática e mais precisamente, o objeto a

ensinar;

Conhecimentos sobre como ensinar (EP) - conhecimentos que o professor tem sobre a pedagogia vis-à-vis da Matemática e mais precisamente do objeto a ensinar;

Conhecimentos dos programas e dos recursos institucionais (EI) - conhecimentos que o professor tem sobre a relação da instituição com o objeto a ensinar;

Conhecimentos sobre a comunidade de prática (EC) - conhecimentos do professor sobre a maneira como seus colegas tratam o objeto a ensinar.

Sobre os fatores do tipo história didática, compreendemos que as decisões didáticas são pertinentes quando o professor, por exemplo, leva em conta os conhecimentos prévios dos alunos. Nesta direção, Bessot *et al.* (2013) propõem ser considerada a *história interaluno de uma classe em geral* (HDIg); isto é, não relacionada a uma classe específica. De outra forma, a *história interaluno de uma classe-alvo* (HDIc), referente à memória interaluno instanciada a uma classe atual e específica. Por fim, a *história intra-aluno* que faz referência às características de um aluno em particular (HDA).

Desta forma, para responder a nossa questão de pesquisa, que é sobre quais fatores se inscrevem nas decisões didáticas tomadas por uma professora em situação de projeto de aula (nível +1) a fim de fazer evoluir as aprendizagens sobre o tema Razões Trigonométricas, utilizamos a seguinte metodologia.

Metodologia

Trata-se de um estudo de caso. Ao adotarmos a metodologia de investigação reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2010), desenvolvida no seio da Abordagem Documental do Didático, tomamos por princípio o acompanhamento da atividade docente durante um período significativo de tempo. Consoante Trouche (2016), o acompanhamento do trabalho documental pode ser feito de dois modos: por um tempo curto (entre uma a três semanas), em que o professor prepara e aplica suas aulas sobre um tema ou por um tempo longo (vários anos), que permite identificar evoluções maiores de seu sistema de recursos e de seus esquemas.

No presente estudo, durante duas semanas, acompanhou-se o trabalho documental de uma professora de Matemática, atuante em uma turma do 1º ano do Ensino Médio (EM) de uma escola de ensino integral em Recife-Pernambuco, precisamente sobre o tema que estava sendo ensinado no momento da pesquisa: Razões Trigonométricas.

No contrato metodológico pelo qual esclarecemos o papel do ator no campo de pesquisa em relação ao lugar do pesquisador durante a coleta de dados (SABRA, 2016), foi

acordado com a professora o acompanhamento da sequência de ensino do tema Razões Trigonométricas - o equivalente a dez aulas. A décima aula foi reservada à revisão do tema antes da avaliação (em anexo).

Dentre os instrumentos de coleta de dados propostos na metodologia de investigação reflexiva, destacam-se as entrevistas, a representação esquemática do sistema de recursos (RESR) e o jornal de bordo. A RESR consiste em pedir a um professor que represente, por meio de lápis e papel, a estrutura dos recursos organizados para sua atividade de ensino. Conforme Gueudet e Trouche (2008, p.3), trata-se de uma representação em duplo sentido:

Uma representação externa, uma esquematização, que poderá ser explorada pelo pesquisador, que busca desta inferir os elementos da estrutura do sistema de documentos do professor;

Uma representação interna, no sentido que ela demonstra o modo pelo qual o professor se representa, e deseja apresentar aquele que o interroga, os elementos da organização de seu trabalho.

Nos registros do jornal de bordo, devemos primar para que os recursos utilizados e os suportes produzidos apresentem uma estreita relação. A explicitação das fontes dos recursos (referência dos livros, documentos anteriormente produzidos, endereços dos *sites*, tarefas respondidas pelos alunos etc.) se faz importante. Os suportes produzidos configuram-se, por exemplo, em: anotações sobre as escolhas de uma introdução e desenvolvimento do estudo de um tema, ficha de exercícios, ficha de avaliação, etc.

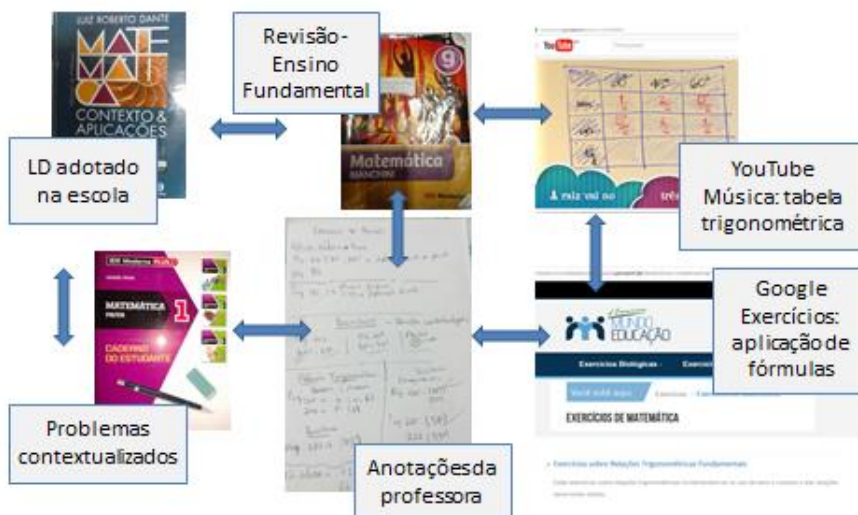
Quanto às entrevistas, foi realizada uma referente ao nível +2 e outra ao nível +1 da atividade da professora. Sobretudo a análise do trabalho documental da professora e de suas decisões didáticas ocorreu no projeto da décima aula (nível +1), quando acompanhamos o processo de elaboração de uma ficha de exercícios destinada à revisão do tema Razões Trigonométricas. Para tanto, levou-se em conta o que já havia sido feito na construção do ensino do tema (nível +2) e suas expectativas à implementação da referida ficha de exercícios em sala de aula (nível 0).

Deste modo, foram utilizados, em um primeiro momento, esses instrumentos para a análise do trabalho documental. Por conseguinte, para a identificação da OM do saber ensinado em jogo, realizou-se continuamente a análise dos tipos de tarefas e das técnicas propostas pela professora durante as suas dez aulas. Por fim, a identificação dos fatores de influência (do tipo epistêmico ou ligado à história didática) sobre as tomadas de decisões didáticas ocorreu a partir das análises precedentes e por meio de entrevistas com o fim de elucidá-las.

O trabalho documental para o ensino do tema Razões Trigonométricas

O sistema de recursos da professora para o ensino de Razões Trigonométricas (nível +2) configurou-se na composição de seis elementos (Figura 1): três livros didáticos (LD), dois *sites* da *internet* e anotações pessoais.

Figura 1 - Sistema de recursos da professora para o ensino de Razões Trigonométricas (nível +2)



Fonte: autoria própria.

Sobre os recursos (Figura 1), algumas considerações foram relevantes quanto à forma como a professora os adquiriu e as suas motivações para utilizá-los. Assim, nota-se um lugar significativo no uso de LD. No que diz respeito ao LD “Matemática: Contexto & Aplicações” (DANTE, 2014), a professora apresentou-o como um recurso de considerável uso na preparação de suas aulas, tendo afirmado que o adotava havia cinco anos; logo, sua utilização fazia-se como “*via de regra*”. Ademais, foi dito:

Professora: Este livro foi o escolhido pelos professores de Matemática da escola. Posso dizer que sempre o uso para preparar minhas aulas e selecionar os exercícios que vou propor aos alunos. Utilizamos bastante o livro didático, pois todos os alunos aqui o possuem.

No que concerne ao “Suplemento Especial de Matemática” (PAIVA, 2010), a professora afirmou ser um LD adotado na rede particular de ensino - na escola onde seu filho estudava. O uso desse LD foi relacionado à busca de problemas contextualizados e parecidos com aqueles do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Professora: Eu gosto desse livro porque ele tem vários exercícios. Há exercícios contextualizados do tipo: vantagens e desvantagens em compras, com contextos profissionais (ex.: construção civil), enfim, diversas situações de aplicações de conteúdos matemáticos, do tipo que pode ter na prova do ENEM.

Quanto ao LD «Matemática - 9º ano do EF» (BIANCHINI, 2011), foi dito:

Professora: Eu adquiri este livro por meio de um representante de editora em uma visita à escola. Eu me agrado dos tipos de problemas mais simples que ele tem; assim, para revisão dos conteúdos.

A professora entrevistada acrescentou ainda que, por se tratar de uma turma do 1º ano do EM, os alunos apresentavam lacunas na aprendizagem de conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental (EF), o que a conduzia a buscar atividades mais “básicas” (a exemplo, pesquisas em sites e LD do EF).

Sobre o uso do *YouTube*, a busca por uma “Musiquinha de Trigonometria” (Figura 1)⁴ ocorreu pela intenção de motivar os alunos ao preenchimento da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis; além de ser acessível, por exemplo, pelos seus celulares. Além disso, ela indicou o uso do site Mundo Educação⁵, quando desejava preparar fichas de exercícios de modo mais prático, sem digitá-los, como ocorre ao fazê-las usando o LD.

Professora: Eu encontrei este site (Mundo Educação) por acaso. Pesquisei no Google «exercícios sobre relações trigonométricas». E então, encontrei o que procurava: exercícios focados em aplicações de fórmulas. No momento, é o que eu buscava para fazê-los lembrar as fórmulas.

Esclarecemos que embora a professora tenha indicado outros recursos na preparação de suas aulas, nos detivemos naqueles apresentados para o ensino do tema Razões Trigonométricas; especificamente na turma do 1º ano do EM (Figura 1). Compreendemos que o sistema de recursos apresentado pela professora coloca em evidência, de certa maneira, o papel institucional acerca do uso do LD adotado na escola e da preparação dos alunos ao ENEM já desde sua entrada no EM.

A propósito de suas anotações (Figura 1), a professora demonstrou o hábito de registrar os recursos selecionados (a página de cada exercício no LD, o site na internet). Tal hábito foi um auxílio ao preenchimento de seu jornal de bordo, o que concorreu significativamente para a nossa análise do seu trabalho documental, bem como ao refinamento da análise da OM do saber ensinado, como doravante.

A organização matemática do saber ensinado (nível +2)

O ensino do tema Razões Trigonométricas conteve cinco tipos de tarefas T do gênero “calcular” (Quadro 1) associadas a quinze tipos de técnicas (Quadro 2):

⁴ Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=2FiCKoPBfZQ>

⁵ Fonte: <http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm>

Quadro 1: Tipos de tarefas (nível +2)

T1. Calcular o seno de um ângulo do triângulo retângulo.
T2. Calcular o cosseno de um ângulo do triângulo retângulo.
T3. Calcular a tangente de um ângulo do triângulo retângulo.
T4. Calcular a medida de um lado do triângulo retângulo.
T _{4.1} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e do cateto oposto.
T _{4.2} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e do cateto adjacente.
T _{4.3} . Calcular a medida do cateto oposto conhecendo a medida de um ângulo e do cateto adjacente.
T _{4.4} . Calcular a medida do cateto oposto conhecendo a medida de um ângulo e da hipotenusa.
T _{4.5} . Calcular a medida do cateto adjacente conhecendo a medida de um ângulo e do cateto oposto.
T _{4.6} . Calcular a medida do cateto adjacente conhecendo a medida de um ângulo e da hipotenusa.
T5. Calcular a medida de um ângulo do triângulo retângulo.
T _{5.1} . Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida da hipotenusa e do cateto oposto.
T _{5.2} . Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida da hipotenusa e do cateto adjacente.
T _{5.3} . Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida do cateto oposto e do cateto adjacente.

Fonte: autoria própria.

Quadro 2: Tipos de técnicas (nível +2)

t ₁ . Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.
t ₂ . Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
t ₃ . Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.
t ₄ . Aplicar t ₁ . Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
t ₅ . Aplicar t ₂ . Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
t ₆ . Aplicar t ₃ . Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
t ₇ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₄ .
t ₈ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₅ .
t ₉ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₆ .
t ₁₀ . Aplicar t ₄ e depois consultar na tabela trigonométrica um valor aproximado em graus do ângulo concernente.
t ₁₁ . Aplicar t ₅ e depois identificar na tabela trigonométrica um valor em graus aproximado do ângulo concernente.
t ₁₂ . Aplicar t ₆ e depois identificar na tabela trigonométrica um valor em graus aproximado do ângulo concernente.
t ₁₃ . Aplicar t ₁ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.
t ₁₄ . Aplicar t ₂ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.
t ₁₅ . Aplicar t ₃ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.

Fonte: autoria própria.

Especificamente, ao analisarmos os tipos de tarefas e de técnicas selecionadas e implementadas em nove aulas (Quadro 3); ou seja, antecedentes à preparação da aula de revisão do tema (n + 1), obteve-se o seguinte panorama:

Quadro 3: Frequência dos tipos de técnicas relacionadas aos tipos de tarefas no estudo do tema (9 aulas)

Tipos de tarefas	Tipos de técnicas															Total
	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	t ₆	t ₇	t ₈	t ₉	t ₁₀	t ₁₁	t ₁₂	t ₁₃	t ₁₄	t ₁₅	
T1	3											0	4			7
T2		4									2			4		10
T3			5												4	9
T4				3	2	5	7	3		2		2				24
T5	1			1									1		1	4
Total	4	4	5	4	2	5	7	3	0	2	2	2	5	4	5	54

Fonte: autoria própria.

Pode-se notar que, dentre os cinco tipos de tarefas propostas pela professora, a mais frequente (Quadro 3) corresponde à T4 - Calcular a medida de um lado do triângulo retângulo - associada às técnicas t₄, t₅, t₆, t₇, t₈, t₁₀ e t₁₂. No Quadro 4, disponibilizamos tal resultado de forma mais detalhada.

Quadro 4: Subtipos de T4 e técnicas associadas

T4	Técnicas
T _{4.1} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e a medida do cateto oposto.	t ₇ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₄ .
T _{4.2} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e a medida do cateto adjacente.	t ₅ . Aplicar t ₂ . Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
	t ₈ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₅ .
T _{4.3} . Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto adjacente.	t ₆ . Aplicar t ₃ . Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
	t ₁₂ . Aplicar t ₆ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus aproximado do ângulo concernente.
T _{4.4} . Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida da hipotenusa.	t ₄ . Aplicar t ₁ . Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
	t ₇ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₄ .
	t ₁₀ . Aplicar t ₄ e depois consultar na tabela trigonométrica um valor aproximado em graus do ângulo concernente.
T _{4.5} . Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto oposto.	t ₆ . Aplicar t ₃ . Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
T _{4.6} . Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e da hipotenusa.	t ₅ . Aplicar t ₂ . Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

Fonte: autoria própria.

Além do exposto no Quadro 4, também podemos perceber um número bem elevado dos tipos de tarefas: T2 - Calcular o cosseno de um ângulo do triângulo retângulo, associada às técnicas t₂, t₁₁ e t₁₄ e t₃ - Calcular a tangente de um ângulo do triângulo retângulo, associadas às técnicas t₃ e t₁₅ (Quadros 1, 2 e 3).

Sobre os tipos de tarefas e técnicas supramencionadas, em seguida, apresenta-se de que forma e em que medida essas foram retomadas na preparação da aula de revisão (nível +1). Sublinhamos que esta aula de revisão antecedeu a avaliação final⁶. De sorte que, além da análise da OM da aula em tela, põem-se em relevo o trabalho documental e a identificação dos fatores decisórios, tendo em vista o que a docente já havia posto em prática sobre o ensino do tema (nível +2).

O projeto da aula de revisão e as decisões didáticas da professora

No trabalho documental do projeto da aula de revisão (nível +1), a professora propôs nove tarefas (dispostas em uma ficha com seis itens de exercícios), retomando os recursos utilizados no nível + 2 (LD Matemática - 9º ano do EF (BIANCHINI, 2011); LD Suplemento Especial de Matemática (PAIVA, 2010) e *site* Mundo Educação).

No Quadro 5, apresenta-se o panorama das decisões didáticas da professora à luz dos fatores que as influenciaram no projeto da referida aula.

Quadro 5: Panorama das decisões didáticas (aula de revisão)

Tipos de fatores	Ações relativas à tomada de decisões															
	Fatores epistêmicos															
ED	T _{4.1}	T _{4.2}	T _{4.3}	T _{4.4}	T _{5.1}	T1	T2	T3	T _{4.5}	T _{4.6}	T _{5.2}	T _{5.3}				
EA	t ₇	t ₅	t ₉	t ₄	t ₇	t ₁	t ₂	t ₃	t ₆	t ₈	t ₁₀	t ₁₁	t ₁₂	t ₁₃	t ₁₄	t ₁₅
EI	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
EP	D	G	I													
Fatores ligados à história didática																
HDcl	Hip	CatOp	CatAd	Ang												
HDlg	DifRad	DifRes														

Fonte: autoria própria.

Sublinhamos no Quadro 5, com relação aos fatores epistêmicos, os conhecimentos sobre o que é a disciplina (ED) - conhecimentos que o professor tem sobre o domínio ao qual pertence o objeto a ensinar e conhecimentos sobre o que é aprender (EA) - conhecimentos que o professor tem sobre o modo como se aprende Matemática e, mais precisamente, o objeto a ensinar, aqui representados respectivamente pelos tipos de tarefas e de técnicas escolhidos pela professora, à luz dos exercícios selecionados.

Percebe-se no Quadro 5 que, dentre os cinco tipos de tarefas propostas para o estudo do tema, a professora fez a escolha de dois tipos: T4 e T5. Sobretudo dos subtipos de T4.

⁶ Consideramos que o estudo da avaliação do tema excede o propósito da presente pesquisa. De forma que não o aprofundamos na apresentação deste trabalho.

Quanto aos tipos de técnicas, foram escolhidas quatro dentre quinze, daquelas vivenciadas em sala de aula (Figura 2).

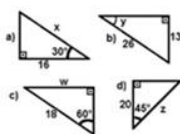
- T_{4.1}. Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e a medida do cateto oposto → t₇. Fazer um desenho que represente o problema, depois t₄.
- T_{4.2}. Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e a medida do cateto adjacente → t₅. Aplicar t₂. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
- T_{4.3}. Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto adjacente → t₉. Fazer um desenho que represente o problema, depois t₆.
- T_{4.4}. Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida da hipotenusa → t₄. Aplicar t₁. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida pelo produto dos termos da proporção. Calcular o produto dos meios pelos extremos. E, t₇.
- T_{5.1}. Calcular a medida de um ângulo conhecendo as medidas da hipotenusa e do cateto oposto → t₄.

Figura 2 - Ficha de exercícios do projeto de aula (nível +1)

LISTA DE EXERCÍCIOS DE REVISÃO

ALUNO _____ 1º _____

1. Determine as medidas nos triângulos abaixo:



2. Um cabo de aço de 10m de comprimento é esticado do topo de um poste a um ponto de um terreno plano horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo mede 30°. Determine a altura do poste.

3. Um paraquedista salta de um avião quando se encontra a 1500m de altura. Devido a ação do vento, o paraquedista cai sob um ângulo de 30° em relação a altura. Qual a distância percorrida por ele do momento do salto até atingir o solo?

4. Um ônibus sobe uma rampa que forma com a horizontal um ângulo de 30°. Tendo percorrido 500m, o ônibus se encontra a que altura em relação a horizontal.

5. Um avião de caça levanta voo formando um ângulo de 50° em relação à pista. Calcule a altura que o avião se encontra após percorrer 3,5km. (Dado: $\sin 50^\circ = 0,7$; $\cos 50^\circ = 0,6$ e $\operatorname{tg} 50^\circ = 1,1$).

6. Uma torre vertical, construída sob o plano horizontal, tem 25m de altura. Um cabo de aço esticado liga o topo da torre ao plano, fazendo com este um ângulo de 60°. Qual o comprimento do cabo de aço?

Fonte: protocolo de pesquisa com a professora.

A propósito das escolhas dos tipos de tarefas, a professora afirmou: “busco trabalhar na classe o quanto possível a diversidade de tipos de problemas”. Identificamos assim que a decisão didática da professora em propor o 1º exercício (Figura 2) ocorreu também pela influência do fator epistêmico relacionado ao conhecimento disciplinar (ED), essencialmente, por ter: “cálculo da medida da hipotenusa e dos catetos em diferentes posições dos triângulos”.

Sobre os fatores epistêmicos relativos ao conhecimento sobre como ensinamos (EP), a professora indicou, durante as entrevistas, as modalidades de trabalho dos alunos (nível +2): em dupla (D), individual (I) ou em grupo (G) (Quadro 5). Para a aula prevista, ela decidiu que os alunos seriam organizados em duplas, a fim de que eles se ajudassem diante de suas dificuldades. Além disso, suas escolhas se traduzem em fatores epistêmicos relativos aos conhecimentos do currículo e dos recursos institucionais (EI), a propósito do ENEM, presente em sua preocupação em selecionar exercícios, como ela afirmou de: “aplicação de fórmulas; mas, sobretudo, contextualizados”.

De outra forma, a decisão da professora ao propor os tipos de tarefas T_{4.2} e T_{4.4} relacionadas às técnicas esperadas t₄ e t₅ (Figura 2, Quadro 5) foi baseada no fator ligado à história didática interaluno genérico (DifRad-HDIg, Quadro 5), ao afirmar que: “Os alunos de modo geral têm dificuldades nos cálculos algébricos com radicais, sempre acontece isto. Então gosto de propor problemas envolvendo $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$.”

Na Figura 3, apresenta-se outro fator ligado à história didática interaluno genérico (DifRes-HDIg), quando a professora decidiu suprimir as alternativas do sexto exercício. Pois, para ela, os alunos de modo geral, ao verem as alternativas, tendem a não buscar desenvolver o cálculo, o que os leva a apenas “marcar a que lhe aparenta ser correta”.

Figura 3 - Trabalho documental do projeto de aula (nível +1)

LISTA DE EXERCÍCIOS DE REVISÃO

ALUNO _____ Nº _____

- Determine as medidas nos triângulos abaixo:
 - 1. Não modificou
- Um cabo de aço de 10m de comprimento é esticado do topo de um poste a um ponto de um terreno plano horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo mede 30° . Determine a altura do poste.
 - 2. Suprimiu o desenho.
- Um paraquedista salta de um avião quando se encontra a 1500m de altura. Devido a ação do vento, o paraquedista cai sob um ângulo de 30° em relação à altura. Qual a distância percorrida por ele do momento do salto até atingir o solo?
 - 3. Suprimiu o desenho.
- Um ídolo sobre uma rampa que forma com a horizontal um ângulo de 30° . Tendo percorrido 500m, o ídolo se encontra a que altura em relação a horizontal?
 - 4. Suprimiu o desenho.
- Um avião de caça levanta voo formando um ângulo de 50° em relação à pista. Calcule a altura que o avião se encontra após percorrer 1,5km. (Dado: $\sin 50^\circ = 0,7$; $\cos 50^\circ = 0,6$ e $\tan 50^\circ = 1,1$).
 - 5. Suprimiu o desenho.
- Uma torre vertical, construída sob o plano horizontal, tem 25m de altura. Um cabo de aço esticado liga o topo da torre ao plano, fazendo com este um ângulo de 60° . Qual o comprimento do cabo de aço?
 - 6. Suprimiu as alternativas

Fonte: autoria própria.

Na Figura 3, a propósito da supressão dos desenhos dos exercícios (2, 3, 4 e 5), constatou-se a influência do fator ligado à história didática interaluno da classe-alvo (HDIc - Quadro 5), na medida em que a professora pontuou as dificuldades específicas dos alunos da turma em: interpretar o enunciado dos problemas e por consequência saber identificar o seno e o cosseno dos ângulos:

Professora: Tem alunos nesta turma que não conseguem identificar a partir do ângulo, o que corresponde ao cateto oposto ou ao adjacente. Eles não conseguem calcular bem o seno ou o cosseno. Assim, eu insisto no desenho da figura relativa ao enunciado dos problemas para fazer com que avancem na compreensão dos conceitos de: hipotenusa, catetos do triângulo e razões trigonométricas.

De modo geral, no processo de concepção da ficha de exercícios (Figura 3), a professora modificou cinco dos nove exercícios selecionados nos dois LD e no site «Mundo Educação». Como vimos, as modificações feitas pela professora foram concernentes à supressão das alternativas do sexto exercício e de alguns ostensivos (desenho dos exercícios 2, 3, 4 e 5), o que nos remete consideravelmente a tratar o trabalho documental docente como uma fonte promissora de novas pesquisas acerca da exploração do uso de recursos e de decisões didáticas adjacentes no planejamento do ensino de Matemática.

Considerações finais

O principal interesse da pesquisa reportada neste artigo foi estudar o trabalho documental e a tomada de decisões didáticas, a forma como os professores tomam as decisões e sob a influência de quais fatores didáticos estas decisões são tomadas. Consideramos que este estudo demonstra como um projeto de aula (nível +1) mobiliza vários recursos e conhecimentos profissionais docentes, bem como traz indícios de como este se inter-relaciona com outros níveis de sua atividade (+3, +2, 0 e -1). Embora, notadamente, tenhamos nos detido em aprofundar a análise sobre o nível +2.

O estudo apresentado sobre o ensino de razões trigonométricas revela que a identificação da influência de fatores epistêmicos e aqueles relacionados à história didática permitem compreender melhor as limitações a que o professor está sujeito, suas intenções e memórias do trabalho com os alunos, entre outros aspectos de sua atividade.

Grosso modo, consideramos que a articulação teórica entre a Abordagem Documental do Didático, o modelo de níveis da atividade do professor e a TAD enriqueceram nossa análise sobre as decisões didáticas da professora no ensino de razões trigonométricas, na medida em que buscamos voltar nosso olhar sobre os recursos e a OM em jogo, tanto na

construção da sequência (nível +2), quanto da aula de revisão (nível +1). Ainda que se trate de um estudo de caso, cremos que esta pesquisa possa ser estendida a outros cenários de investigação.

Referências

BESSOT, A. *et al.* Décisions didactiques prises par des enseignants de sciences dans la conception de séquences d'enseignement. In: MATHERON, Y. et al. (Dir.). **Problèmes du rapport scolaire et social aux mathématiques**: identification des causes et propositions de solutions. Lyon: l'IFE, 2013.

BIANCHINI, E. **Matemática**. 9º ano. São Paulo: Moderna, 2011.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, n.19, v.2, p.221-266, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 2.ed. São Paulo: Ática, 2014.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Des ressources aux documents, travail d'enseignant et genèses documentaires. In: GUEUDET, G.; TROUCHE, L. (Eds.). **Ressources vives**: le travail documentaire des professeurs en mathématiques. Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP, 2010. p. 57-74.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Vers de nouveaux systèmes documentaires pour les enseignants de mathématiques? In: BLOCH; CONNE, F. **Actes de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques**. Saint- Livrade: Pensée Sauvage, 2007.

HAMMOUD, R. **Le travail collectif des professeurs en chimie comme levier para la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles**: contribution au développement de l'approche documentaire du didactique. 2012. 389f. Thèse de doctorat. Sciences de l'Education. Université Claude Bernard - Lyon I; Université Libanaise, 2012.

LIMA, I. ; TRGALOVA, J. Connaissances des professeurs susceptibles d'influencer leurs décisions didactiques. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, **Anais...**Recife: UFRPE, 2008, p. 1-12.

PAIVA, M. **Suplemento Especial de Matemática**. Ensino Médio.v.1. Caderno do estudante. São Paulo: Moderna, 2010.

MARGOLINAS, C. La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In: SIMMT, E.; DAVIS, B. (Eds.). **Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques**. Edmonton: CMESG/GCEDM, 2005. p.1-21.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, conhecimentos Analyse de l'activité du professeur. In: DORIER, J.-L. et al. (Eds.). **Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage: 2002. p. 141-156.

MARGOLINAS, C.; WOZNIAK, F. Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur: le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In:

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. (Eds.). **Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques.** Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP, 2010. p.223-269.

SABRA, H. L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective: incidents, conhecimentos et recursos mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, n.36, v.1, p.49-95, 2016.

TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1., 2016, Bonito. **Anais...** Bonito, 2016, p.1-32.

ANEXO

Quadro 6: Ensino de Razões Trigonométricas e sua organização matemática (10 aulas)

A	Tarefas	NT	Técnicas	Nt
1	T ₁ . Calcular o seno de um ângulo do triângulo retângulo.	1	t ₁ . Aplicar a definição do seno em um triângulo retângulo.	1
	T ₂ . Calcular o cosseno de um ângulo do triângulo retângulo.	2	t ₂ . Aplicar a definição do cosseno em um triângulo retângulo.	2
	T ₃ . Calcular a tangente de um ângulo do triângulo retângulo.	1	t ₃ . Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.	1
2	T ₁	2	t ₁	2
	T ₂	2	t ₂	2
	T ₃	2	t ₃	2
	T _{4.4} . Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida da hipotenusa.	2	t ₇ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₄ .	2
3	T ₁	4	t ₁₃ . Aplicar t ₁ e depois identificar na tabela trigonométrica de ângulos notáveis o valor do ângulo concernente.	4
	T ₂	4	t ₁₄ . Aplicar t ₂ e depois identificar na tabela trigonométrica de ângulos notáveis o valor do ângulo concernente.	4
	T ₃	4	t ₁₅ . Aplicar t ₃ e depois identificar na tabela trigonométrica de ângulos notáveis o valor do ângulo concernente.	4
4	T ₂	2	t ₁₁ . Aplicar t ₅ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus aproximado do ângulo concernente.	2
	T ₃	2	t ₃	2
	T _{4.3} . Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto adjacente.	2	t ₁₂ . Aplicar t ₆ e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus aproximado do ângulo concernente.	2
5	T _{4.1} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto oposto.	2	t ₇	2
	T _{4.3}	1	t ₆ . Aplicar t ₃ . Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	1

	T _{4.4}	1	t ₄ . Aplicar t ₁ . Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	1
	T _{4.5} . Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e a medida do cateto oposto.	1	t ₆	1
	T _{4.6} . Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo conhecendo a medida do ângulo e hipotenusa.	1	t ₅ . Aplicar t ₂ . Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	1
6	T _{4.2} . Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e a medida do cateto adjacente.	1	t ₅	1
	T _{4.3}	1	t ₆	1
	T _{4.4}	1	t ₄	2
	T _{5.1} . Calcular a medida do ângulo conhecendo as medidas da hipotenusa e do cateto oposto.	1		
7	T _{4.3}	2	t ₆	2
	T _{4.4}	1	t ₄	1
8	T _{4.2}	3	t ₈ . Fazer um desenho que represente o problema, depois t ₅ .	3
	T _{4.4}	2	t ₁₀ .Aplicar t ₄ e depois consultar na tabela trigonométrica um valor aproximado em graus do ângulo concernente.	2
	T _{5.1}	1	t ₁	1
9	T _{4.1}	1	t ₇	3
	T _{4.4}	2		
	T _{5.2} . Calcular a medida do ângulo conhecendo as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente.	1	t ₁₃	1
	T _{5.3} . Calcular a medida de um ângulo conhecendo as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente.	1	t ₁₅	1
10	T _{4.4}	4	t ₄	1
			t ₇	3
	T _{4.2}	2	t ₅	2
	T _{4.1}	1	t ₇	1
	T _{4.3}	1	t ₉	1
	T _{5.1}	1	t ₄	1
	Total	63	Total	63

Fonte: autoria própria.