# RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA AL RESOLVER UN PROBLEMA

**Mª Consuelo Cañadas Santiago**
**Encarnación Castro Martínez**
**Víctor Barrera Castarnado**

## INTRODUCCIÓN

Se presenta en este capítulo un trabajo de investigación en el que se ha estudiado el uso que hacen unos alumnos de educación secundaria del razonamiento inductivo, cuando se les propone resolver un problema que no les resulta familiar. Para ello se ha elegido una tarea para cuya resolución es apropiado utilizar dicho razonamiento. Se han llevado a cabo entrevistas a los alumnos en el momento en el que realizaban la tarea, e ir explicando sus razonamientos. La preparación teórica básica de la investigación, el desarrollo de la actividad, así como los resultados obtenidos, constituyen el contenido de este documento.

## INTERÉS DEL TRABAJO

Distintas razones nos han animado a realizar este trabajo. Una es de tipo personal e influyó decisivamente en el momento inicial; otra es de tipo curricular; y una tercera razón está relacionada con el carácter sociocultural que se le atribuye a la educación matemática.

La idea inicial que impulsó este trabajo fue una reflexión sobre el papel que juega la demostración en la formación de los profesores de matemáticas de secundaria, y el uso que posteriormente se hace de la demostración en las aulas de secundaria para la formación matemática de los alumnos. Consideramos que existe un gran salto entre estos dos niveles educativos en lo que se refiere al uso de la demostración y los procesos de razonamiento utilizados, salvando incluso las diferencias formativas propias de dichos niveles. Los profesores de matemáticas de secundaria realizan, durante su formación, una gran cantidad de demostraciones de teoremas y propiedades utilizando distintos tipos de razonamiento. Nuestra inquietud está en conocer si el bagaje de conocimiento que obtienen sobre demostración y razonamiento, tiene posteriormente reflejo en su trabajo como profesores. Unido esto a nuestro interés por el razonamiento inductivo y la validez que los alumnos otorgan a propiedades obtenidas mediante un proceso inductivo, nos ha llevado a centrar el trabajo.

Por otra parte, en los currícula de secundaria se dan indicaciones para la selección de contenidos, y entre ellas se dice que debe reforzarse el uso del razonamiento empírico-inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo. Los alumnos al final de la enseñanza secundaria se hallarán “con suficiente dominio de las operaciones del pensamiento abstracto como para comprender los elementos básicos del método científico: la formulación de hipótesis, la observación controlada y la experimentación, la comprobación de las hipótesis, la elaboración de explicaciones y de teorías más o menos estructuradas” (MEC, 1989, p. 74). Se reconoce la importancia del razonamiento en general, del razonamiento inductivo en particular y de las acciones vinculadas directamente con el razonamiento inductivo. En los objetivos generales que señala el Diseño Curricular Base para secundaria se encuentran acciones relacionadas con el razonamiento matemático inductivo, entre las que están: la incorporación de modos de argumentación habituales, la exploración sistemática de alternativas, la tenacidad y la perseverancia en la búsqueda de soluciones, y el trabajo con formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas. Uno de los principios básicos de enseñanza presentes en el Diseño Curricular Base es la necesidad de partir del nivel de desarrollo del alumno, haciendo que la intervención educativa parta de las posibilidades de razonamiento y de aprendizaje que posean en los distintos niveles de su desarrollo evolutivo. Todo ello hace necesario conocer las capacidades que poseen los alumnos en cada nivel. Para la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se aconseja tener en cuenta la naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad. Desde esta perspectiva epistemológica, se insta a tomar ejemplo del proceso histórico en la enseñanza de las matemáticas, seguir los descubrimientos y considerar que el razonamiento empírico-inductivo ha jugado un papel tan importante o incluso más activo que el razonamiento deductivo en la creación de nuevos conceptos.

En los Estándares Curriculares del National Council of Teachers of Mathematics también se evidencian la necesidad y la importancia del razonamiento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La noción de matemáticas que subyace en dicho documento está basada en la idea de que hacer matemáticas es algo más que adquirir y dominar un conjunto de destrezas, "comporta métodos de investigación y razonamiento, medios de comunicación y nociones sobre su contexto" (NCTM, 1991, p.5). Los objetivos generales de los Estándares potencian que los estudiantes desarrollen hábitos mentales matemáticos por lo que el razonamiento matemático está presente en dichos objetivos. Uno de los Estándares para la educación secundaria presenta las matemáticas como razonamiento, tratando de cumplir tres objetivos: a) todos los estudiantes han de tener experiencia con actividades que conduzcan a apreciar el papel que cumplen los modos de razonamiento inductivo y deductivo, en las matemáticas y en otras situaciones fuera de éstas; b) ampliar el papel del razonamiento y subrayar su importancia en todos los cursos de matemáticas; c) prestar una mayor atención a la demostración por inducción. Se afirma que en secundaria, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de: i) Elaborar y comprobar conjeturas. ii) Formular contraejemplos. iii) Seguir argumentos lógicos. iv) Juzgar la validez de un argumento. v) Construir argumentos sencillos válidos. Todo ello para que los futuros universitarios sean capaces de construir demostraciones de enunciados matemáticos, incluyendo demostraciones indirectas y demostraciones usando el principio de inducción. Estas capacidades que se proponen desarrollar están relacionadas con el razonamiento inductivo.

Desde la perspectiva sociocultural de la educación matemática, se da una visión que muestra la importancia de la formación de los individuos como parte integrante de la sociedad. Se aboga por una educación crítica que facilite el desarrollo de una alfabetización matemática que incluya conocimiento y habilidades con fines tecnológicos, y conocimiento reflexivo que ayude en evaluación y en la discusión de las consecuencias de una actuación determinada. Para Skovsmose (1999) las matemáticas dan forma a nuestra sociedad por lo que se ha de llevar a cabo una alfabetización matemática que considere las reflexiones individuales y colectivas para conseguir el desarrollo de una educación matemática crítica en el contexto social, político y económico. Se trata de considerar el papel de las matemáticas en la sociedad y aprovechar su potencial formativo. Llevar esta teoría a la práctica conlleva que los profesores busquen maneras de convencer a los alumnos de la superioridad de la lógica matemática, que los alumnos presenten ideas y que se les dé la oportunidad de argumentar y experimentar sus propias conjeturas. Estas reflexiones y argumentaciones que se demandan desde la perspectiva sociocultural pueden ser abordadas, aunque no única ni exclusivamente, desde el trabajo con el razonamiento inductivo.

## INVESTIGACIONES SOBRE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Es de gran interés para los profesionales de la enseñanza, en general, conocer los razonamientos que siguen los alumnos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Conocer la etapa evolutiva en la que se encuentran los alumnos permitiría a los educadores ayudar a sus alumnos a avanzar en los razonamientos y a ejercer con mayor éxito su papel de guías en el proceso educativo (Balacheff, 2000). En los niveles educativos medios, es importante conocer el razonamiento que los propios alumnos sacan a la luz, considerar los niveles de razonamiento que poseen para apoyar de forma adecuada el desarrollo de su pensamiento matemático (DeGroot, 2001; Flores, 2002). Todo esto ha propiciado que se realicen investigaciones centradas en los procesos de razonamiento de los sujetos y que se señale la necesidad de estudios centrados en la transición de una forma de razonamiento a otra (Simon, 1996; Pedemonte, 2000).

Centrándonos en el razonamiento inductivo, Miyazaki (2000) considera que los alumnos deberían ser introducidos gradualmente desde las comprobaciones con casos particulares hasta las demostraciones formales, establece estadios, o pasos, en estudiantes de niveles inferiores a secundaria, desde una prueba inductiva hasta la demostración algebraica en matemáticas e indica que estos estadios proporcionan a los profesores una herramienta útil y fiable para ayudar a desarrollar y poder evaluar las habilidades de los alumnos en la realización de pruebas.

El razonamiento inductivo en secundaria es objeto de estudio para Neubert y Binko (1992, p.20) quienes, como resultado de sus investigaciones, indican tres metas que se pueden conseguir con el trabajo con el razonamiento inductivo: aprender el contenido de la disciplina, practicar estrategias de razonamiento y desarrollar la seguridad en la habilidad de razonamiento Fernández y Anhalt (2001) defienden que el principal foco de atención debería estar en fomentar las discusiones e investigaciones que posibiliten a los alumnos de secundaria construir, describir, representar patrones, desarrollar y aplicar las relaciones, hacer y verificar reglas o generalizaciones, y explorar propiedades matemáticas. Vuelven a aparecer aquí acciones implicadas en el proceso de razonamiento inductivo. Cuando se trata de ver este fenómeno en niños pequeños, Smith (2002) llega a la conclusión de que el estudio de Inhelder y Piaget de 1963 es prácticamente el único sobre el razonamiento inductivo llevado a cabo, y ha sido con niños de corta edad.

Se constata, por un lado, que son necesarios más trabajos de investigación que centren su interés sobre los procesos de razonamiento que llevan a cabo los estudiantes y, por otro, que no se han encontrado trabajos que indaguen sobre el razonamiento inductivo en alumnos de secundaria. Además, es interesante que los resultados de estos trabajos lleguen a los profesores, pues se considera importante para el aprendizaje de los sujetos el hecho de que el profesor de matemáticas conozca cómo razonan sus alumnos.

## OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La visión general aportada por estas investigaciones realizadas en el ámbito del trabajo que nos preocupa, nos lleva a plantear el siguiente objetivo.

**Objetivo general**

Estudiar la utilización que hacen alumnos de secundaria del razonamiento inductivo cuando se enfrentan a la realización de tareas matemáticas no rutinarias.

Para hacer operativo este objetivo general, lo desglosamos en elementos más concretos, en interrogantes o preguntas de investigación a las que buscamos dar respuesta una vez realizado el trabajo.

**Preguntas de investigación**

Cuando los sujetos realizan una tarea matemática en la que el razonamiento inductivo está involucrado:

1. ¿Comprenden los entrevistados la tarea que se les propone?
2. ¿Aparece dicho razonamiento de manera espontánea?
3. ¿Trabajan con casos particulares? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿hasta cuando los utilizan?
4. ¿Se llega a una generalización en todos los casos o se hace un razonamiento parcial?
5. Si se llega a una generalización, ¿es por medio de los casos particulares? ¿Lo hacen intuitivamente? ¿Formulan conjeturas?
6. Si formulan conjeturas, ¿las prueban con nuevos casos particulares?
7. ¿Qué criterios utilizan los estudiantes para validar las conclusiones a las que llegan?
8. ¿Quedan convencidos los alumnos con sus propios razonamientos?
9. ¿Qué tipo de representación utilizan?

**Trabajos relacionados con las cuestiones planteadas**

Como ya hemos comentado, no se han encontrado trabajos sobre razonamiento inductivo con estudiantes de secundaria, por lo que para plantear las preguntas de investigación a partir del objetivo general, utilizamos ideas de algunos trabajos con una temática más general pero relacionada con nuestro interés investigador. Muchos de estos trabajos relacionan razonamiento con demostración. Hay trabajos sobre demostración que se realizan desde una aproximación psicológica y se centran en los procesos de razonamiento y comprensión (Neubert, y Binko, 1992, Goetting, 1995; Zack, 1997; Miyazaki, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; DeGroot, 2001; Ibáñez y Ortega, 2001). Otros trabajos están enfocados al estudio teórico del razonamiento (DeVilliers, 1993; Hanna, 1989; 2000; Cañadas, Castro y Gómez, 2002). Entre los trabajos teóricos, se encuentra el trabajo de DeVilliers (1993), quien trata de delimitar el papel y la función de la demostración en matemáticas. En los trabajos de Hanna (1989; 2000) se llega a la conclusión de que una de las principales funciones de la demostración es fomentar la comprensión. El papel de la demostración en matemáticas y características como rigor y modo de razonamiento están fuertemente vinculados. Se ha concluido que cuanto mayor razonamiento inductivo involucra una justificación, menos rigurosa es considerada, y cuanto más razonamiento deductivo involucra, más rigurosa y formal se le considera (Cañadas, Castro y Gómez, 2002).

El primer grupo de trabajos hacen referencia a los razonamientos llevados a cabo por estudiantes de diferentes niveles educativos. Neubert y Binko (1992) ofrecen una visión general del razonamiento inductivo a diferencia con el deductivo y realizan una reflexión sobre la importancia del razonamiento inductivo en educación secundaria. Hay una serie de investigaciones que se centran en el razonamiento o la justificación desde la concepción que los estudiantes tienen de las explicaciones o de las pruebas que presentan. En este apartado consideramos los trabajos de Goetting (1995) y de Zack

(1997). Sobre el razonamiento de los estudiantes de matemáticas en secundaria, Miyazaki (2000) establece niveles en el recorrido que un alumno hace desde que realiza una prueba inductiva hasta que hace una demostración algebraica. DeGroot (2001) trabaja también con estudiantes de secundaria y analiza las respuestas que dan a varias actividades, analiza el proceso por el que los estudiantes pasan de la mera descripción de lo que observan a una prueba o una demostración. Ibáñez y Ortega (2001) han trabajado con alumnos de primer curso de Bachillerato, parten de la diferenciación entre el razonamiento inductivo y el deductivo y presentan un estudio sobre los esquemas de prueba con alumnos de este nivel educativo.

## MARCO TEÓRICO

Vamos indicar cuales son los términos clave de este trabajo y precisar el significado que a los mismos se les va a dar. Lo hacemos partiendo del uso que han hecho algunos investigadores desde la educación matemática y contrastándolo con una visión más general recogida en diccionarios y enciclopedias. Se presentan estos términos clave a continuación, en orden alfabético.

### Argumento/Argumentación

Rivadulla (1991) entiende que el argumento es el "razonamiento en el que se pretende apoyar una afirmación determinada" (p.20). Duval (1999) añade a lo anterior la condición de que la justificación o refutación sea espontánea y define argumentación como "toda justificación o refutación espontánea de una declaración en una discusión o debate" (p. 144). Ferrater (1988) considera que el argumento es el razonamiento mediante el cual se intenta probar o refutar una tesis, convenciendo a alguien de la verdad o falsedad de la misma. Para Lithner (2000) la argumentación es la confirmación, la parte del razonamiento que pretende convencer a uno mismo o a alguien más de que el razonamiento es apropiado. Se observa la relación estrechamente establecida entre argumento y argumentación, como la acción de argumentar y razonar. Además se utiliza el razonamiento con la intención de probar y convencer. Duval afirma que la argumentación se realiza cuando se trata de convencer a alguien, expresándonos en la lengua natural, de la aceptabilidad de nuestra declaración o la insostenibilidad de la suya. Aparece la función de convicción, asociada a la argumentación, que señalan algunos autores como Fetísov (1980), Tall (1989), Hanna (1989) y Volmik (1990) como una de las funciones más importantes que cumple la argumentación. La argumentación en los términos expuestos es equivalente a lo que Balacheff (2000) llama explicación. En la explicación, el sujeto locutor es quien garantiza la validez de una proposición. La base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

Algunos autores distinguen entre diferentes tipos de argumentación. Díez y Moulines (1997) hablan de argumentación deductiva e inductiva e indican que la diferencia es intencional Según estos autores, en los argumentos deductivos se pretende que la verdad de las premisas haga segura la verdad de la conclusión, mientras que en la argumentación inductiva sólo se persigue este apoyo en cierto grado. Los argumentos inductivos son aumentativos, esto es, la conclusión contiene más información que las premisas. Pedemonte (2000) distingue tres tipos de argumentación: argumentación deductiva, argumentación abductiva y argumentación inductiva. En una argumentación deductiva el proceso consiste en deducir una afirmación de unos datos, aplicando principios que permiten la reafirmación de ésta. En la argumentación abductiva, la afirmación se deduce antes de que se identifiquen los datos, el principio permite la reafirmación de una sentencia aunque todos los datos no estén disponibles. En la argumentación inductiva, la afirmación se deduce como caso genérico a partir de casos específicos.

En estas aproximaciones de argumento y argumentación que vamos a considerar equivalentes, se ven reflejadas dos ideas fundamentales. En primer lugar, la finalidad que persigue la argumentación como forma de razonamiento es la de probar o refutar una afirmación determinada. Y en segundo lugar, el proceso que se lleva a cabo para conseguir este objetivo es el de convencer a alguien.

**Conjetura**

Tomamos dos explicaciones procedentes de fuentes distintas para fijar el significado de conjetura. La primera explicación procede del diccionario de Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990), que considera que una conjetura es la "proposición que se prevé verdadera, pero que se encuentra todavía pendiente de una demostración que la confirme o que, por el contrario, la rechace o modifique". La segunda explicación procede del diccionario de la Real Academia de la Lengua (1992), el cual considera que la conjetura es "el juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones". En el primer caso se hace referencia explícita a una expresión verbal como es una proposición, mientras que en el segundo caso el énfasis se pone en la idea. Combinando estas dos explicaciones, consideramos como conjetura el enunciado de un juicio formado a partir de indicios y observaciones, que se prevé verdadero pero que no ha sido sometido a un proceso de demostración que confirme o rechace su veracidad. La conjetura es una primera aproximación a un hecho y de la cual no se tiene certeza hasta que se confirme o se rechace.

**Inducción e inducción completa**

Se distingue entre inducción e inducción completa, también llamada inducción matemática. Se considera que la inducción es la forma común que tienen todas las ciencias para descubrir leyes generales partiendo de evidencias particulares. La inducción matemática es una forma de demostrar propiedades matemáticas y por tanto sólo se utiliza en la ciencia matemática. Según Pólya (1979), la coincidencia en el nombre se debe a que, a menudo, aquella propiedad que se pretende demostrar matemáticamente por inducción completa se ha encontrado y enunciado después de un proceso de inducción. De ahí que aparezcan los dos procedimientos en los mismos problemas matemáticos.

**Inducción**

La característica general atribuida a la inducción es que se trata de un razonamiento que conduce al establecimiento de conjeturas, partiendo de la observación y considerando la regularidad de los fenómenos observados. En este sentido, Fetísov (1980) indica que la inducción es un tipo de razonamiento que, partiendo de conocimientos que son verdades particulares, da lugar a una verdad general. O, dicho de otro modo, observando lo común que presentan varios fenómenos, se infiere la ley que los explica. Rivadulla (1991) considera la inducción como el procedimiento que permite reconocer como válidos los principios explicativos. Según este enfoque, la inducción conduce de casos particulares de la ley general a la ley misma. Por medio de la inducción intuitiva aprendemos lo universal en lo particular. Esta misma idea de ampliación es retomada por Díez y Moulines (1997) quienes, al hablar de inducción, se refieren a todo tipo de inferencia ampliativa, entendiendo que esta inferencia se produce cuando la hipótesis excede al contenido de los datos. También señalan que la caracterización que frecuentemente se hace de la inducción como "paso de lo particular a lo general" expresa sólo que la conclusión contiene información nueva con respecto a las premisas. Por su parte, Pólya (1979) llama inducción al procedimiento que usan los científicos para tratar con la experiencia. La inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. Según este autor, los pasos dados en un proceso inductivo son: observar alguna semejanza y hacer alguna generalización mediante la formulación de una conjetura. Dicha conjetura se formula cuando se observa alguna evidencia que la sugiere, esta viene apoyada por casos particulares, es decir, encontrada por inducción.

La inducción se apoya en acciones “visibles” como la generalización, la particularización y la analogía (Pólya, 1966). La generalización hace referencia a pasar de la consideración de un objeto particular a una clase que lo contenga. A partir de una regularidad en los hechos observados, se trata de generalizar en un intento de sistematizar dicha regularidad. Por ejemplo, trasladar una propiedad de los triángulos a los polígonos de un número arbitrario de lados. En ocasiones, para llegar a hacer la generalización se utilizará la analogía. La particularización es el paso de una clase total a un objeto contenido en la misma. Siguiendo el ejemplo tomado anteriormente, la particularización es trasladar al triángulo equilátero o al cuadrado, alguna propiedad de los polígonos regulares de n lados. A veces, estas dos acciones están estrechamente unidas. De hecho, la generalización se pone a prueba viendo si funciona para nuevos casos particulares.

**Inducción matemática o inducción completa**

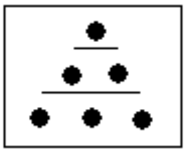
La inducción matemática es una demostración. Existen propiedades matemáticas descubiertas por un proceso de inducción se pueden demostrar por inducción completa. Según el enfoque que hemos dado a nuestro trabajo y siguiendo a autores tan influyentes como Pólya y Duval, la inducción matemática no es un tipo de razonamiento y, menos aún, una forma de razonamiento inductivo. Sin embargo, creemos conveniente hacer algunas aclaraciones generales sobre este proceso que se situaría como la fase final, de una investigación inductiva. La inducción matemática fue elaborada por Peano y por Poincaré como un principio, el principio de inducción matemática; y fue apoyada en otro principio, el principio de razonamiento por recurrencia. La demostración matemática por inducción completa se basa en dos lemas y se presenta de la siguiente forma: sea una proposición P(n) en donde n indica que la proposición toma valores para un número infinito de casos, todos ellos ordenados. El primer lema afirma que la proposición es verdad para el primero de dichos casos, si n hace referencia al conjunto de los números naturales, el primer caso es cuando n=1. Este lema tiene una comprobación fácil. El segundo lema afirma que si la proposición es verdad para un valor cualquiera de dichos casos, ha de ser verdad para el valor siguiente. En la situación de los números naturales que estamos considerando, si suponemos que la proposición es cierta para n=k, ha de ser cierta para n=k+1. Este lema requiere apoyarse en propiedades matemáticas que lleven a su comprobación. A veces, hay que realizar un razonamiento deductivo basado en propiedades que no son evidentes La inducción matemática se considera una forma muy potente cuando se trata de demostrar propiedades en las que interviene el conjunto de los números naturales u otro de similares características. En la práctica, la inducción matemática consiste en comprobar que una propiedad la cumple el primer elemento, o elemento mínimo de un conjunto bien ordenado y que también la cumple un elemento del conjunto si la tienen todos los que le preceden. Cumpliéndose esas dos condiciones, se obtiene que todos los elementos de ese conjunto tienen la propiedad considerada.

**Justificación**

El Diccionario de la Real Academia Española (1992) considera que una justificación es la “prueba convincente de una cosa”. Justificación es la “serie de operaciones que se llevan a cabo para reconstruir lógicamente teorías científicas” (Ferrater, 1988). “Encontrar qué cosa es la causa o el motivo de otra, o la explicación que hace que otra no sea o parezca extraña, inadecuada, inoportuna, censurable o culpable" (Moliner, 1986). Marrades y Gutiérrez (2000) consideran que una justificación es cualquier razón dada para convencer y distinguen entre las justificaciones empíricas, que son las que usan ejemplos como el principal elemento de convicción, y las justificaciones deductivas, en las que la validación de las conjeturas se hacen de un modo genérico. Se aprecia que el término justificación aparece ligado a otros términos como explicación, prueba, argumentación, y demostración, todos ellos expresan acciones realizadas con la intención de convencer, que será el objetivo último del trabajo que pedimos a los sujetos participantes en la fase empírica de este trabajo.

**Patrón**

La noción de patrón está sustentada por la idea básica de "situación repetida con regularidad" (Steen, 1988, p. 611; Stacey, 1989, pp. 147-149; Castro, 1995, p. 33). En una consideración tan amplia de patrón caben situaciones matemáticas diferentes como: a) situación de generalización de una propiedad matemática partiendo de la repetición de casos concretos. Por ejemplo, llegar a la propiedad conmutativa de la suma de números naturales a+b=b+a después de ver gran cantidad de casos en los que cambiando el orden de los sumandos el resultado es el mismo; b) situación de reiteración en la que el patrón se forma a partir de un núcleo generador, en algunos casos el núcleo se repite, en otros el núcleo crece de forma regular. Disponer en hilera una bola blanca, una azul y una roja; una blanca, una azul y una roja y seguir así reiteradamente constituye un caso patrón repitiendo el núcleo que en este caso es el trío de bolas roja, blanca y azul.



Dibujar los números triangulares desde el primero, de manera sucesiva, añadiéndole cada vez una fila en la base con un punto más, es un caso de patrón en el que el núcleo va aumentando progresivamente.

Existe una corriente de opinión que considera que las matemáticas son la ciencia de los patrones ya que su principal función es estudiar las regularidades, encontrándose estas regularidades en el medio natural, social o en la propia matemática (Devlin, 1994; Castro, 1995). Crear y reconocer patrones es una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos, sobre todo en aquellos casos en los que las cuestiones pueden ser resueltas examinando casos especiales, organizando los datos sistemáticamente, determinando un patrón y utilizando el patrón construido para dar respuesta (Stacey, 1989; NCTM, 1991; Castro, 1995).

**Prueba**

El término prueba aparece con frecuencia en los trabajos en los que se distinguen diferentes tipos de argumentación atendiendo al rigor (Cañadas, Castro, Gómez, 2002). Entre estos trabajos, destacamos el de Balacheff (2000), quien distingue entre explicación, prueba y demostración. Este autor sitúa la explicación al nivel del sujeto que trata de dar validez a una proposición. En este sentido, explicación es equivalente al razonamiento considerado por Rivadulla (1991) o a la justificación de Duval (1999). El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura validez de una proposición es aceptado por una comunidad. Esta posición no es definitiva y una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. No ocurre así con la demostración, que una vez realizada, es aceptada por todas las comunidades ante las que se presente. Nosotros seguiremos la distinción indicada por Balacheff y consideraremos el término prueba para hacer referencia a las explicaciones y argumentaciones que los alumnos hacen para tratar de convencer de la validez de sus propias conjeturas matemáticas. De este modo, consideramos el término prueba sinónimo de justificación.

**Razonamiento**

María Moliner (1988) considera razonamiento como la "serie de ideas encadenadas que conducen a una conclusión" y razonar "deducir unas ideas de otras para llegar a cierta conclusión, dar las razones o motivos de cierta cosa, justificar algo".

Se puede contemplar el término razonamiento desde dos puntos de vista, el psicológico y el lógico (Ferrater, 1988). En el primer caso, el razonamiento está ligado al pensamiento humano, la habilidad de razonar se relaciona con el pensamiento. Por ello, el razonamiento se considera propio de los seres humanos y se estudia desde la teoría del pensamiento, como una forma de pensar adoptada para producir afirmaciones y alcanzar conclusiones (Lithner, 2000). En el segundo caso, se trata de un proceso formal y puede designar tanto las operaciones lógicas deductivas como las inductivas. Dewey (1989) considera que el razonamiento es el modo de encadenar conceptos, habla de pensamiento reflexivo y le asigna la función de "transformar una situación en la que se experimenta oscuridad, duda, conflicto o algún tipo de perturbación, en una situación clara, coherente, estable y armoniosa" (p.98).

**Razonamiento inductivo**

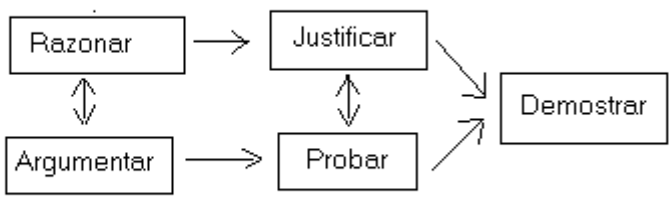
Una clasificación de razonamiento heredada de la filosofía clásica distingue entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas. El razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión que está, en mayor o menor grado, apoyada por unas premisas. Se consideran otros tipos de razonamiento además de los anteriores, Simon (1996) trata un tercer tipo, el razonamiento transformacional, que consiste en promulgaciones mentales o físicas de una operación o conjunto de operaciones sobre un objeto o conjunto de objeto que permite prever los resultados de las transformaciones que sufren los objetos bajo el conjunto de las operaciones. Lo más significativo de la posición de Simon es la consideración del razonamiento como un proceso dinámico. Se observa cierta similitud entre el trabajo de Simon (1996) y el de Pedemonte (2000), quien considera tres tipos de argumentación: inductiva, deductiva y abductiva. Por su parte, Duval (1999) distingue entre diferentes tipos de razonamiento vinculados intrínsecamente al lenguaje, ya sea éste natural o formal: el silogismo aristotélico, la deducción a partir de axiomas y definiciones, el razonamiento por reducción al absurdo, las inferencias semánticas y la argumentación. En todos los casos se trata de movilizar proposiciones, de una o varias proposiciones se deriva otra proposición. Duval no incluye la inducción, ya que ésta se basa en experiencias con los objetos a los cuales hacen referencia las proposiciones. La observación de dichas experiencias proporcionan regularidades, constataciones perceptivas y anticipaciones.

Gran parte de los autores que hemos consultado consideran el inductivo y el deductivo como los dos grandes bloques de razonamiento y la distinción la hacen teniendo en cuenta el tipo de conclusión que se alcanza. Si en la conclusión queda incluida la información que viene dada, la inferencia será deductiva y la conclusión tendrá valor de verdad. Si la conclusión va más allá de lo dado, la inferencia es inductiva y su conclusión será probable. Se sostiene que un razonamiento inductivo es fuerte solo si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas (Santamaría, 1995; González, 1998). Por tanto, el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión. Díez y Moulines (1997) indican que el carácter de los argumentos inductivos son aumentativos, esto es, la conclusión contiene más información que las premisas. Sólo se pretende que la verdad de las premisas haga "probable" la conclusión. En ocasiones, se ha considerado que lo inductivo se caracteriza por el "paso de lo particular a lo general". Sin embargo esto expresa sólo que la conclusión contiene información nueva con respecto a las premisas. Neubert y Binko (1992) consideran el razonamiento inductivo como el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico. Estos autores distinguen entre el razonamiento inductivo en distintos contextos y, en el caso específico de las matemáticas, lo relacionan con el reconocimiento de patrones y su aplicación a conjuntos de números, símbolos o figuras, y lo consideran fundamental en el desarrollo de la habilidad para generalizar, para formular propiedades matemáticas.

Consideramos el trabajo de Pólya como uno de los más influyentes para nuestra investigación. Es un autor que establece de forma precisa lo que se considera razonamiento inductivo en educación matemática y lo considera como el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico. Pólya defiende en sus trabajos el uso de dicho razonamiento en la enseñanza de las matemáticas, expresa que se suele llamar inducción al procedimiento que usan los científicos para tratar con la experiencia, y también que la inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos.

**Relación entre distintos términos**

Se observa que hay distintas acepciones para los términos analizados hasta el momento. A su vez, hay similitudes y diferencias entre ellos y resulta muy complicado hablar de uno de los términos sin hacer referencia a uno o varios de los otros. Para este trabajo vamos a considerar equivalentes en su significado los verbos argumentar y razonar, en ambos casos se trata de dar razones que expliquen un hecho. Así mismo, argumento y razonamiento, que hacen referencia a las acciones indicadas por los verbos anteriores. Vamos a utilizar, mayoritariamente, la expresión razonamiento. También justificar y probar los vamos a considerar equivalentes. Comparten con razonar y argumentar el dar razones para explicar un hecho, pero además se añade que se hace con intención de convencer a otra persona de lo que uno cree, mediante la utilización de dichas razones. De estos dos términos vamos a emplear justificar en casi todas las ocasiones. Por demostración entenderemos una justificación que satisfaga los requisitos exigidos por la comunidad de matemáticos profesionales, de tal forma que dé a tal justificación carácter general. Hemos establecido una escala entre tres de estos términos: razonar, justificar y demostrar; o sus equivalentes, argumentar, probar y demostrar. La idea es que al avanzar en dicha escala, las exigencias que se imponen a la acción, aumentan. El esquema siguiente muestra esta idea.




(Cañadas, 2002, p. 38-39)

**Recurrencia**

La recurrencia es la "propiedad de aquellas secuencias en las que cualquier término se puede calcular conociendo los precedentes" (Diccionario de la Real Academia Española). Fundamentalmente, en matemáticas, la recurrencia aparece en una secuencia totalmente ordenada $S_1,S_2,S_3,S_4...S_k...$ en la que es posible conocer cada uno de los términos en función de los anteriores. Para esto son necesarias dos condiciones. La primera condición es que el primer término de la secuencia sea conocido. La segunda condición es que debe haber cierta relación genérica que relacione cualquier término con los términos precedentes. Cumplidos los dos requisitos, se pueden obtener los términos de la sucesión uno después del otro, progresivamente, por recurrencia (Pólya, 1967).

**Resolución de problemas**

Un problema es “una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución” (Lester, 1983).

La resolución de problemas es considerada por Segovia y Rico (2001) como un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor. “La resolución de problemas matemáticos es una actividad altamente formativa por los conocimientos, las destrezas y los tipos de razonamiento que en ella se ponen en juego” (Callejo, p. 91).

Los problemas matemáticos se pueden clasificar atendiendo al razonamiento que tiene que realizar el sujeto. En este sentido, hay problemas cuya resolución se apoya en un razonamiento de carácter deductivo y otros problemas cuyo razonamiento básico es de carácter inductivo. Nuestro trabajo se centra en los problemas matemáticos que se basan en razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2002a).

**Acciones asociadas al razonamiento inductivo desde un punto de vista educativo**

En el caso de la educación matemática, el razonamiento inductivo aparece como un tipo de razonamiento en el que se parte de hechos particulares y se busca la generalidad de los hechos que acontecen. Según Polya (1945), los pasos a seguir en un proceso de razonamiento inductivo son:

- Trabajo con casos particulares.
- Formulación de conjetura.
- Justificación de la conjetura.
- Comprobación con nuevos casos particulares.

El primer paso es la observación de alguna semejanza matemática en casos particulares o hechos matemáticos concretos. Posteriormente se busca una generalización de dicha semejanza para el resto de los hechos posibles de la misma categoría, o sea, establecer una regla general o propiedad. Ésta es un juicio general claramente formulado pero que es meramente conjetural o tentativo, es sólo un intento de alcanzar la verdad. Tras la comprobación de la conjetura con ejemplos, se busca un examen más justo de la misma y, si es oportuno, se procederá a su demostración. Finalmente se prueba la conjetura con nuevos ejemplos particulares o hechos de dicha categoría para comprobar si sigue funcionando.

Neubert y Binko (1992) proponen un esquema similar al de Polya en el proceso que sigue un razonamiento inductivo: observación, surgimiento de preguntas, desarrollo de generalizaciones y aplicaciones de éstas a nuevas situaciones para ver si se mantienen.

Para este trabajo hemos considerado que un proceso inductivo abarca los tres puntos anteriormente indicados, y que la demostración de la conjetura cae fuera del razonamiento inductivo. De hecho, en muchos casos, la inducción matemática estará sustentada por razonamiento deductivo. Además de las acciones señaladas por Pólya consideramos otras no específicas del razonamiento inductivo, pero que se ponen de manifiesto cuando se trabaja con el mismo. Entre estas acciones están la abstracción, necesaria para la generalización, la aplicación de conocimiento matemático o la elaboración de un discurso coherente. Las acciones características del razonamiento inductivo están relacionadas entre sí y acompañadas de ciertas estrategias de organización de los datos, como puede ser la realización de tablas que ayuden a apreciar las regularidades (Cañadas y Castro, 2002b). Todo ello nos lleva a establecer los “pasos” que consideramos en una situación de razonamiento inductivo en la resolución de un problema.

- observación de casos concretos

- organización de los casos concretos trabajados
- predicción o búsqueda de regularidades o patrones
- formulación de conjeturas o hipótesis
- verificación de conjeturas o hipótesis
- generalización de argumentaciones.

## METODOLOGÍA

Las preguntas de investigación planteadas requieren que la información necesaria para darles respuesta sea recogida a medida que los estudiantes trabajan en la resolución del problema. Esta información tiene que venir directamente de la reflexión llevada a cabo durante el trabajo. Consideramos que la entrevista semiestructurada es la forma adecuada de acercarnos al razonamiento de los estudiantes ya que permite recoger la información de un modo controlado, mientras que trabajan. Los datos obtenidos de esta forma son las transcripciones de dichas entrevistas y las notas de la entrevistadora, por tanto, datos de tipo cualitativo.

### Sujetos

Los sujetos que han participado en la parte empírica de este trabajo eran, en el curso 2001-2002, estudiantes de los últimos cursos de Secundaria (3º y 4º) y los dos cursos de Bachillerato, tal y como planteamos en el objetivo general de la investigación. El tipo de problema propuesto debía ser acorde con las capacidades cognitivas de los alumnos del nivel educativo elegido. Para ello, se consideraron recomendaciones hechas desde investigaciones realizadas previamente así como desde los documentos curriculares vigentes. Los sujetos elegidos son doce: tres de 3º y tres de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, tres de 1º y tres de 2º de Bachillerato. De cada uno de los cursos, se han tomado para entrevistar a tres alumnos atendiendo a dos variables: las calificaciones y el género. En cuanto a las calificaciones, un estudiante con resultados académicos bajos, otro con resultados académicos medios y otro con resultados académicos altos. El género no tenía ningún interés para nuestro trabajo pero decidimos controlar esa variable y entrevistamos a 6 chicos y a 6 chicas. El grupo elegido de 12 alumnos es, por tanto, intencional, ya que se ha tratado de conseguir variedad en las respuestas y, por tanto, mayor riqueza en los datos.

Los sujetos son alumnos de un centro público de Granada (I.E.S. Padre Manjón), que está ubicado en una zona céntrica de la ciudad. Las familias a las que pertenecen los estudiantes son de un nivel socioeconómico y cultural medio-alto o alto. El 66.2% de los padres y un 56.5% de las madres de los alumnos poseen estudios universitarios. Las expectativas de la mayoría de estos alumnados es realizar estudios superiores.

### Recogida de información

La grabación audio de la entrevista semiestructurada ha permitido recoger el dialogo entre la investigadora y los sujetos que tomaron parte en la experiencia. La entrevistadora (que en este caso es la investigadora) llevaba organizada la entrevista y preparadas las preguntas que iba a plantear a los estudiantes, pero con libertad para modificarlas (excepto las que se referían a la presentación y propuesta del problema) si durante el desarrollo de la misma se daba alguna situación que así lo aconsejara. Las entrevistas se realizan individualmente en una habitación aislada en las dependencias del centro y la duración de las mismas es como máximo de una hora. Estas entrevistas proporcionan información desde tres fuentes:

- Las grabaciones audio de las entrevistas, que posteriormente se transcriben.
- Los folios en los que los sujetos trabajan.
- Las notas que la entrevistadora toma durante el desarrollo y después de cada una de las entrevistas

**Tarea**

Para ser coherentes con la metodología planteada hasta el momento, debíamos proponer a los estudiantes un trabajo en el que aflorara el razonamiento inductivo y nos ayudara así a dar respuesta a las preguntas de investigación, sin perder de vista el nivel educativo al que nos dirigíamos, alumnos de secundaria. En este sentido, contábamos con algunas actividades candidatas para nuestro trabajo y que ya habían sido trabajadas en investigaciones anteriores desde diferentes perspectivas (Reid, 1993; Szetela, 1999; Edwards, 1999; Sáenz, 2001; Segarra, 2001; Reid, 2002). Finalmente, y teniendo en cuenta las características específicas, que quedan explícitas en las preguntas de investigación, la tarea propuesta a los estudiantes fue la siguiente:

| |
|---|
| Determinar el mayor número de regiones que se obtienen al trazar rectas sobre un plano. |

Esta tarea constituye un verdadero problema para los estudiantes ya que es una cuestión alejada de las actividades a las que están acostumbrados en clase, con un resultado desconocido para ellos y a la que tienen que hacer frente con una estrategia elaborada por ellos mismos.

<u>Análisis del problema propuesto</u>

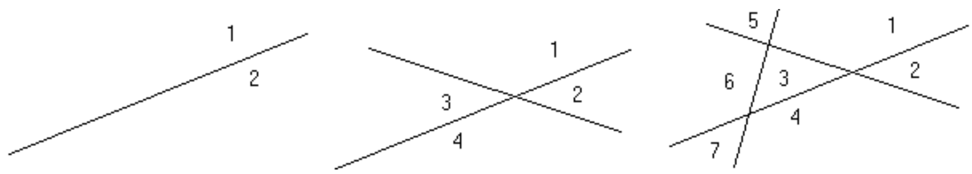
Se trata de un problema matemático de carácter inductivo. En su resolución aparecen, de forma natural, conceptos geométricos como región, plano, rectas y posiciones de las rectas en el plano (que pueden ser paralelas o cortarse). Además, el problema involucra las representaciones de dichos conceptos. El problema también involucra conceptos aritméticos, ya que es una situación de conteo que requiere cierta sistematicidad; y conceptos algebraicos en el caso de que se haga una generalización y se exprese de forma algebraica.

Hay que hacer notar que en el planteamiento del problema no se indica el número de rectas requeridas, no se hace mención a ningún número, ni a la situación general de n rectas. Esto se hizo así intencionadamente para no proporcionar datos que interfiriesen en el trabajo espontáneo de los sujetos.

<u>Resolución del problema</u>

El éxito en la resolución del problema depende, en parte, de la estrategia para obtener y organizar la información. La representación gráfica de las rectas en el plano tomando todas las posibilidades de corte entre ellas, facilita el trabajo con los casos particulares. La recogida y organización en una tabla de la información que se va obteniendo facilita el descubrimiento de alguna regularidad, si existe. El trabajo así organizado permite plantear conjeturas con mayor probabilidad de éxito.

Una estrategia posible para resolver este problema inductivamente es empezar trazando una recta y contar las regiones que se obtienen. El siguiente paso puede ser trazar una segunda recta, paralela o secante a la primera. Al contar las regiones en el caso de las rectas paralelas, se obtienen tres regiones en el plano, si las rectas se cortan, se obtienen cuatro regiones. Por tanto, hay que descartar la situación de rectas paralelas ya que el problema indica expresamente que se consiga el máximo número de regiones. Hasta ahora hemos trabajado los dos primeros casos particulares y sería conveniente ordenar la información, aunque aún no se aprecia ninguna regularidad. Para el tercer caso particular se consideran tres rectas, las dos iniciales y una nueva. Para la posición de esta tercera recta caben varias posibilidades. Partiendo de que consideramos fija la posición de las dos primeras rectas para la que hemos obtenido el máximo número de regiones, la tercera recta puede pasar por el punto de corte de las anteriores o no, ser paralela a una de las anteriores, o no. Se descartan las opciones de que la tercera recta pase por el punto de corte y de que sea paralela a alguna de las anteriores ya que se reduce el número de regiones. Se llega a la conclusión de que la tercera recta ha de cortar a las dos ya trazadas. La representación de los tres primeros casos particulares aparece en el gráfico siguiente:




primer caso: 1 recta
2 regiones

segundo caso: 2 rectas
4 regiones

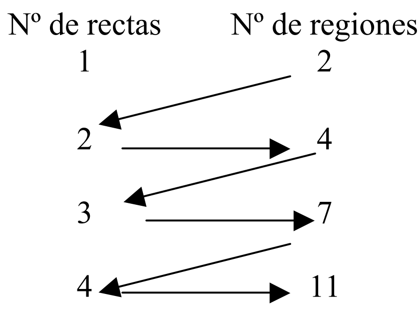
tercer caso: 3 rectas
7 regiones

Contando las regiones obtenidas en los cuatro primeros casos particulares, se puede llevar la información a una tabla:

| Nº de rectas | Nº de regiones |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 11 |
| .<br>.<br>. | .<br>.<br>. |

*Tabla 1*

La tabla no muestra cómo es la respuesta exactamente al problema pero sí nos conduce a ella. Se puede apreciar que al aumentar el número de rectas de uno en uno, el número de regiones aumenta sumando el número de rectas trazado con el número de regiones obtenido en el caso anterior. Esta sería la ley que rige la recurrencia y un esquema de la misma sería el que se muestra a continuación:




Hay varios procedimientos para llegar a la expresión general que determina el número máximo de regiones que se obtienen al trazar n rectas sobre el plano. Según el proceso de razonamiento seguido hasta el momento, atendiendo a la columna de la izquierda y utilizando la ley de recurrencia se llega a que el número máximo de regiones que se obtienen en el plano al trazar n rectas es el número de regiones obtenido al trazar n-1 rectas sumado con el número de rectas (n). Esto es equivalente a calcular la suma de los n primeros números naturales y sumarle 1, con lo que obtenemos la siguiente expresión: $\frac{n(n+1)}{2}+1$. Se puede demostrar por inducción completa que la igualdad $1+1+2+3+4+5+...+n = \frac{n(n+1)}{2}+1$ es cierta para todo valor de n, siendo n un número natural.

Centrándonos ahora en la columna derecha de la tabla, aparece una sucesión ligada a la de los números naturales cuyo primer término es $a_1 = 2$, el segundo es $a_2 = 4$, el tercero es $a_3 = 7$, el cuarto es $a_4 = 11$, etc. Llamando $a_n$ al término n-ésimo de esta sucesión, dicho término representaría el número máximo de regiones obtenido al trazar n rectas. La relación de recurrencia está determinada por la expresión $a_n = n + a_{n-1}$.

Consideramos que es posible que los alumnos que participan en la actividad lleguen hasta este punto en la resolución del problema, aunque también pudieran avanzar más.

Los términos de la sucesión 2, 4, 7, 11,... (de la columna de la derecha) exceden en uno a los términos de la sucesión de los números triangulares (1, 3, 6, 10,...), con lo que $a_n = 1+T_n$, expresión equivalente a la que obtuvimos anteriormente: $a_n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$.

## ANÁLISIS DE DATOS

La trascripción de las entrevistas realizadas a los sujetos ha dado lugar a parte de la información cuyo análisis se ha llevado a cabo con la ayuda del programa informático Nud*ist revision 4 (N4) de análisis cualitativo de datos. Este programa facilita ver la información de manera estructurada y hace posible organizar las situaciones que se tienen transcritas de forma que permite descubrir detalles, patrones y relaciones que de otra forma resultaría más complicado.

Atendiendo a los interrogantes planteados en la investigación, a algunos de los trabajos de investigación mencionados y a las observaciones recogidas durante las entrevistas, se definen seis categorías con unas subcategorías asociadas.

**Categorías utilizadas**

*(1) Comprensión del enunciado de la tarea*

- El entrevistado plantea preguntas
- El entrevistado hace una interpretación incorrecta
- Considera o pierde el enunciado en sus razonamientos
- La entrevistadora resuelve dudas

*(2) Trabajo con casos particulares*

- Sistemático
- No sistemático
- Organiza
- La entrevistadora lo propone

*(3) Formulación de conjeturas*

- Relación simple
- Proporcionalidad directa
- Relación de recurrencia
- La verifica
- Emplea conocimiento escolar

*(4) Grado de concreción de la tarea*

- Casos particulares
- Caso general
- Comprobación posterior

*(5) Autoconvencimiento del entrevistado*

- Lo ve evidente

- Ve la necesidad de justificación
- Se basa en casos particulares

*(6) Formas de representación empleadas*

- Oral
- Escrita
- Lenguaje algebraico
- Mental
- Gráfica

**Comprensión del enunciado de la tarea**

La reacción de todos los estudiantes al plantearles la tarea es similar: al comenzar la actividad están nerviosos y apenas hablan, pero pronto toman confianza y se expresan con naturalidad aunque muestran duda e inseguridad. Consideramos que esta actitud se debe principalmente a que se enfrentan a una tarea a la que no están acostumbrados y no tienen una "receta" para resolverla. Tienen dificultades en la comprensión e interpretación del enunciado. Suponemos que debido a esto no saben cómo empezar a actuar y la entrevistadora ha de resolver muchas dudas que se van planteando, a veces la misma duda de forma reiterada. En unos casos las dificultades señaladas están relacionada con la comprensión de conceptos con los que no han trabajado anteriormente, o lo han hecho poco; en otros casos se debe a dificultades en el proceso de realización, trazar rectas y contar las regiones.

**Trabajo con casos particulares**

El trabajo con los casos particulares se considera el primer paso en el proceso inductivo. En la siguiente tabla se recogen los resultados del trabajo que realizan los estudiantes con los casos particulares, así como las subcategorías consideradas en esta categoría.

| C. Particulares<br>Sujeto | Espontáneo | Núm. de casos | Sistemático | Organiz. |
|---|---|---|---|---|
| 3ESO3 | | 4 | X | |
| 3ESO2 | X | 5 | | X |
| 3ESO1 | X | 4 | | X |
| 4ESO3 | | 3 | | X |
| 4ESO2 | | 4 | | |
| 4ESO1 | X | 4 | X | X |
| 1BACH3 | X | 5 | | X |
| 1BACH2 | X | + de 5 | X | |
| 1BACH1 | | 5 | | X |
| 2BACH3 | | 4 | X | |
| 2BACH2 | X | 5 | X | X |
| 2BACH1 | X | 3 | X | |

*Tabla 2*

De los doce sujetos, siete comienzan su trabajo con casos particulares por iniciativa propia. Por tanto, en estos alumnos surge el trabajo mediante el proceso inductivo de manera espontánea una vez que entienden el enunciado de la tarea. El resto de los sujetos también trabajan con casos particulares, pero animados por la entrevistadora. Todos los alumnos comienzan con el trazado de 1 ó 2 rectas. Finalmente, el número de rectas con el que trabajan todos, excepto uno, varía entre 0 y 5.

Tal y como se observa en la tabla 2, sólo algunos son sistemáticos en el trabajo con los casos particulares. Esta sistematicidad consiste en todos los casos excepto en uno, en ir aumentando el número de rectas trazadas de una en una e ir considerando en sus razonamientos los datos obtenidos. La organización de estos datos se considera una estrategia para conseguir la resolución del problema. De todos los sujetos que siguen esta estrategia, sólo un sujeto de 4º de ESO organiza la información por iniciativa propia. El resto de los sujetos que organizan la información lo hacen a propuesta de la entrevistadora.

**Formulación de conjeturas y grado de concreción de la tarea**

En general, todos los sujetos tratan de dar respuesta a la tarea propuesta que consiste, en primera instancia, en formular algún tipo de conjetura. Un grupo elevado de alumnos, ocho de doce, consideran que el número de regiones que se pueden encontrar es infinito, puesto que pueden trazar un número infinito de rectas en el plano, que es ilimitado. Estos sujetos muestran no haber interpretado correctamente el enunciado, ya que se trata de establecer una relación entre el número de regiones y el número de rectas. Una vez dejado aclarado esto por la entrevistadora, todos los entrevistados reconocen alguna relación entre el número de rectas y el número de regiones distinta de la anterior. Doce sujetos indican que cuantas más rectas se tracen, más regiones se obtienen (lo hemos expresado en la tabla como "relación simple"). Esta idea ha evolucionado en algunos casos a lo largo de la entrevista y han llegado a la formulación de diferentes conjeturas que se apoyan en los casos particulares con los que han trabajado, en los conocimientos previos y en sus propias intuiciones.

| Conjeturas / Sujeto | Infin. | Rel. simple | Lineal | | | Recurr. | Generaliz. no recurrente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | N+1 | 2n | Reg. de tres | | |
| 3ESO3 | | X | | X | | | |
| 3ESO2 | | X | | X | | | |
| 3ESO1 | | X | X | X | X | | |
| 4ESO3 | X | X | | X | X | X | |
| 4ESO2 | X | X | | | | | |
| 4ESO1 | X | X | X | | | X | X |
| 1BACH3 | | X | | X | | X | |
| 1BACH2 | X | | | X | | X | |
| 1BACH1 | X | X | | X | | | |
| 2BACH3 | X | X | | X | X | X | |
| 2BACH2 | X | | | X | | X | |
| 2BACH1 | X | X | | X | | X | |

*Tabla 3*

Algunos sujetos han planteado una conjetura basada en una relación lineal en las formas n+1, 2n o planteando una "regla de tres". En la tabla se ve que la más frecuente de las tres es la del doble (2n), posiblemente influenciados por el hecho de que para una recta aparecen dos regiones. Siete sujetos han visto la recurrencia de la secuencia y han tratado de expresar la relación basándose en ella. Un sujeto, 4ESO1, ha llegado a obtener la expresión general, que establece la relación, en forma algebraica. Este sujeto, así como los que han llegado a la expresión por recurrencia, ha ido evolucionando y cambiando de parecer en el planteamiento de sus conjeturas a medida que las volvían a probar para nuevos casos y tenía que rechazarlas. Los siete sujetos que reconocen la recurrencia han conseguido establecer un patrón y cuatro de ellos habían considerado previamente la razón 2 entre el número de rectas y el número máximo de regiones. El proceso que les llevó a pasar de esta primera relación a la de recurrencia fue intentar probar su conjetura inicial con varios casos particulares y observar la diferencia que había entre el número máximo de regiones que habían obtenido en dos casos particulares consecutivos. Estos sujetos reconocen que hay un inconveniente debido a que para conocer un término cualquiera de la secuencia es necesario conocer, de antemano, todos los que lo preceden, esto supone una dificultad casi insalvable cuando el término es alto y no se dispone de una máquina para hacer el cálculo, hacen intentos para encontrar el término general de una sucesión pero sólo un sujeto lo hace con éxito. El hecho es que intuyen que les falta una expresión diferente a la recurrente pero no llegan a ella. Todo el proceso así como este logro lo consideramos de gran interés teniendo en cuenta el nivel educativo de los sujetos elegidos para esta experiencia. El comentario más generalizado de los sujetos que establecen alguna relación pero no llegan a la generalización es que necesitarían más casos particulares para poder asegurar la existencia de un patrón.

**Autoconvencimiento del entrevistado**

Ninguno de los sujetos expresa la necesidad de justificar las respuestas dadas (sus conjeturas), es la entrevistadora quien los guía hacia este trabajo. Cuando la entrevistadora les pregunta por la justificación de sus conjeturas, recurren a los casos particulares. En los casos en los que las conjeturas no eran ciertas, el trabajo con los casos particulares les sirve para falsarlas. Incluso ocurre esto en los casos en los que llegan a la generalización. Los entrevistados que recurren al lenguaje algebraico, empleando como variables $n$ o $x$, validan sus conjeturas dando valores a la variable que han considerado y comparan esos datos con los resultados que obtienen de sus representaciones gráficas. El problema presenta dificultad de comprobación cuando el número de rectas es mayor que cuatro, que es el número con el que los alumnos han llegado a conjeturas para el caso general. Éste es un factor que hace que no estén del todo convencidos de sus propios razonamientos. Tres sujetos (de los siete que habían llegado a una conjetura para el caso general) intentan probar su generalización con nuevos casos particulares.

**Representaciones empleadas**

Todos los sujetos que llegan a establecer una relación para el caso general, lo hacen utilizando el lenguaje algebraico, ya sea oral o escrito.

Las dificultades que aparecen sistemáticamente surgen al tratar de expresar por escrito la relación que indican de forma oral. En ningún momento se les había pedido a los estudiantes que expresaran por escrito sus conjeturas y se observa, en sus producciones, que la tendencia generalizada de los sujetos que llegan a formular alguna conjetura es escribirla de forma simbólica.

## CONCLUSIONES

Además de las enseñanzas que se reflejan en los apartados anteriores, sacamos algunas consecuencias de carácter más general. Los problemas que se plantean a los estudiantes, cuando no están relacionados directamente con el contenido estudiado suponen un desconcierto para ellos, pero también un reto que hay que el profesor ha de ayudar a superar. Así se observa, en el punto anterior, que todos los entrevistados presentan dificultades para entender qué quiere el entrevistador que hagan, no comprenden, en principio, el enunciado de la tarea. No obstante, son capaces de trabajar y dedicarse a ella llegando a obtener buenos resultados si una persona competente (en este caso la entrevistadora) les sirve de guía. Consideramos que el aprendizaje basado en que el alumno vaya haciendo descubrimientos pasa por el siguiente principio: se ha de proponer a los estudiantes situaciones que constituyan un reto para ellos, no resolverles la situación rápida y directamente pero tampoco dejarles solos ante el reto, ya que si no consiguen seguir adelante, se desalientan y si dan la tarea por terminada y no se les corrige de inmediato, pierden interés en la misma.

Por otra parte, el proceso para resolver tareas en las que el razonamiento inductivo está presente, no es intuitivo, es necesario dedicar tiempo escolar a las mismas para que los estudiantes adquieran la habilidad y formación necesarias, si se pretende potenciar este tipo de trabajo. La utilización de casos particulares es frecuente cuando tratan de justificar alguna propiedad, pero cuando enuncian una propiedad que creen haber descubierto no consideran necesario volver a hacer comprobación alguna. Este hecho así como la organización de la información que se obtiene, de manera adecuada consideramos que ha de ser objeto de mayor atención desde la enseñanza.

**REFERENCIAS**


Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Cañadas, C., Castro, E., Gómez, P. (2002). Didactical reflections about some proofs of the Pythagorean proposition. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education, England*, 177-184.

Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria.* Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C., Castro, E. (2002a). Errores en la resolución de problemas de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, Moreno, A. y M. Peñas (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, 147-153.

Cañadas, M. C., Castro, E. (2002b). La importancia del razonamiento en la formación de profesores. Comunicación en *Jornadas sobre Formación Inicial de Profesores*. Granada.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

DeGroot, C. (2001). From description to proof. *Mathematics Teaching in the Middle School 7*, 4, 244-248.

DeVilliers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Ediciones Paidós.

*Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. (1990). Madrid: Espasa-Calpe.

*Diccionario de la Real Academia Española*. (1992). Vigésima primera edición. Madrid: Espasa-Calpe.

Díez, J. A., Moulines, C. U. (1997). *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel Filosofía.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

Edwards, L. D. (1999). Odds and Evens: Mathematical Reasoning and Informal Proof among High School Students. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* (4), 489-504.

Fernández, M. L., Anhalt, C. O. (2001). Transition toward algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7* (4), 236-241.

Ferrater, F. J. (1988). *Diccionario de Francisco José Fernández Ferrater*. Madrid: Alianza Editorial.

Fetísov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría. Lecciones populares de matemáticas.* Moscú: Editorial MIR.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching children mathematics*, 269-274.

Goetting, M. (1995). *The college student´s understanding of mathematical proof.* Doctoral Disseration. University of Maryland, U.S.A.

González, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Madrid: Editorial Trotta.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, France, 45-51.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 5-23.

Ibáñes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid, España.

Ibañes, M., Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas, 28*, 39-59.

Lester, F. (1983). Trensds and Sigues in Mathematical Problem-Solving Research. En Lesh y Landau (Eds). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press. London

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 165-190.

Marrades, R., Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 87-125.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1989). *Diseño Curricular Base. Educación SecundariaObligatoria I.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *EducationalStudies in Mathematics, 41*, 47-68.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de María Moliner.* Madrid: Editorial Gredos.

NCTM. (1991). *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Neubert, G. A., Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington D.C.: National Education Association.

Pedemonte, B. (2000). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen. *Proceedings of the 25$^{th}$ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Holland, 33-40.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1967). *Le découverte des mathématique*s. París: DUNOD.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problema*s. México: Trillas.

Reid, D. (1993). Pre-formal, formal and formulaic proving. *Proceedings of the Canadian Mathematics Education*, 153-156. Toronto, Ontario. Editor: Quigley, Martyn.

Reid, D. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematics Behavior, 20*, 527-547.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica*. Barcelona: Antrophos, Editorial del Hombre.

Sáenz, C. (2001) Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. *Actas del V Simposio SEIEM*, Septiembre Almería, pp. 59-79.

Santamaría, C. (1995). *Razonamiento y comprensión*. En M. Carretero, J. Almaraz y P. Fernández (Eds.).

Segarra, L. (2001). *Problemates. Colección de problemas para todas las edades*. Editorial GRAÓ: Barcelona.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197-210.

Skovsmose, O. (1990). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Smith, L. (2002). *Reasoning by Mathematical Induction in Children's.* Pergamon: Netherlands.

Stacey, K. (1989). Finding and using Patters in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics.* p. 147-164

Steen, L. (1988). The Science of patterns. *Science*. p. 611-616

Szetela, W. (1999). Triangular Numbers in Problem Solving. *The Mathematics Teacher, 92*, 820-824.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching* 127, 23-40.

Volmik, J. D. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagora*s, 7-10.

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong": Proof at the elementary school level. En E. Penkonen (Ed.). *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Finland,* 291-298.