

# O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas

Marlene Aparecida do Prado  
Norma Suely Gomes Allevalo

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo descrever e analisar uma investigação sobre o ensino de Geometria através da Resolução de Problemas, desenvolvendo reflexões sobre as possibilidades para a aplicação em sala de aula. Particularmente, os conteúdos abordados foram retas, semirretas e segmentos de retas. Na pesquisa, de natureza qualitativa, foram utilizados como procedimentos metodológicos a observação participante, a análise documental e questionários. A pesquisa de campo foi realizada com alunos de 7ª série, ou 8º ano, do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada em São Paulo/SP. Na pesquisa de campo, foram aplicados questionários com questões objetivas e abertas e, posteriormente, aplicadas sequências didáticas, elaboradas e analisadas utilizando a Engenharia Didática. Tais sequências foram desenvolvidas em sala de aula por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que tem o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. O conteúdo que se visava atingir era o Teorema de Tales. Durante a aplicação das sequências, diante da dificuldade que os alunos tiveram nas resoluções dos problemas e da falta de pré-requisitos, o professor precisou oferecer aos alunos alguns recursos necessários para a resolução dos problemas, teve que manter muito diálogo e tentou conservar o interesse dos alunos pelas atividades. Com a confrontação entre a *análise a priori* e a *posteriori* das atividades realizadas, percebemos que os alunos construíram conhecimento sobre os conteúdos propostos, aprenderam a trabalhar colaborativamente e ganharam autonomia quando tentavam resolver os problemas.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Resolução de Problemas. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Geometria.

## Teaching-Learning-Evaluation of Geometry through Problem Solving

## ABSTRACT

The purpose of the present work is to describe and analyze an investigation on Geometry teaching through Problem Solving by developing reflections about the possibilities of applying it in class work. Particularly, the involved contents are lines and line segments. In the present research,

---

**Marlene Aparecida do Prado** é Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, docente da Rede Pública Estadual e Municipal de São Paulo. Endereço para correspondência: Rua Caetano Aletto, 29, Jardim Mauá. – 09351-510 – Mauá/SP. Email: marlene.profma@gmail.com

**Norma Suely Gomes Allevalo** é Doutora em Educação Matemática, docente e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP. Endereço para correspondência: Rua Cônego Manuel Vaz, 584, AP.81 – 02019-050 – São Paulo/SP. Email: normallev@uol.com.br

which is a qualitative one, the methodological procedures included participating observation, document analysis and questionnaires. The field research was conducted with eighth grade students from a state public school in São Paulo/SP. In the field research, we applied questionnaires containing open objective questions followed by didactic sequences which were developed and analyzed through Didactic Engineering. Such sequences were developed in classroom regarding the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through problem solving, in which the problem is the starting point and the orientation to learn new Math concepts and contents. The focused content was Thales theorem. During the sequence application the students had difficulties in problem solving and they lacked prerequisites. So, the teacher had to offer them some necessary resources for problem solving, keep extensive talk and try to keep the students' interest in the activities. By confronting a priori and a posteriori analyses of the developed activities, we noticed that the students built knowledge about the proposed contents, learned how to work cooperatively and achieved autonomy when trying to solve the problems.

**Keywords:** Math Education. Problem Solving. Teaching-Learning-Evaluation. Geometry.

## INTRODUÇÃO

Pelo presente artigo pretendemos aprofundar um pouco mais os conhecimentos na área da Educação Matemática, particularmente sobre o Ensino da Geometria através da Resolução de Problemas, acreditando que ele poderá ajudar a suprir uma deficiência da formação inicial de professores, que muitas vezes não enfatiza a Geometria e nem a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Ao mesmo tempo, esta pesquisa poderá propiciar melhor compreensão de como ensinar Matemática sem enfatizar a repetição e a mecanização, estimulando atitudes de pensar, refletir, analisar e, efetivamente, compreender os conteúdos e saber usá-los.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais e também as orientações estaduais recomendam, na exploração de cada tema matemático, que os professores procurem dar destaque à ideia de problematização, e que, além dos problemas mais utilizados, cuja solução consiste em operar com os dados para se chegar a um resultado, os problemas sejam tratados em cada situação concreta como um fecundo exercício da capacidade de escolher e construir aquilo que for necessário para se obter a resposta a uma questão bem formulada (SÃO PAULO, 2008).

Com relação às pesquisas em Educação Matemática, constata-se que é necessário repensar o ensino da Geometria para que a aprendizagem seja significativa, pois ainda há dificuldades em seu ensino (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992; PAVANELLO, 1993; FONSECA et al., 2005; GUIMARÃES; VASCONCELOS; TEIXEIRA, 2006; COSTA, 2008).

O presente estudo pretende descrever e analisar as investigações sobre uma experiência de ensino de Geometria através da Resolução de Problemas, em que o conteúdo matemático específico trabalhado foi o Teorema de Tales, procurando verificar as possibilidades que emergem dessa aplicação em sala de aula, e como pode ser introduzido nas aulas de Matemática. Apresentando a parte referente a retas, semirretas e segmentos de reta, as análises desenvolvidas mostram como alunos de 7ª série, ou 8º ano, constroem conhecimento através dessa metodologia de ensino.

Nas seções a seguir, apresentaremos uma discussão sobre a importância da Resolução de Problemas, assim como do ensino da Geometria. Então, explicitaremos a metodologia de pesquisa adotada, para então desenvolvermos uma análise de alguns dados coletados a partir da aplicação de seqüências didáticas em aula. Finalmente, teceremos algumas considerações finais sobre este trabalho.

## A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No Brasil, vários estudos voltados à Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática em todos os níveis de ensino vêm sendo desenvolvidos e orientados há vários anos pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Lourdes de la Rosa Onuchic. Onuchic (1999), Allevato (2005), Allevato e Onuchic (2006), assim como outros trabalhos publicados pelas autoras, destacam que a necessidade e a forma de trabalhar com Resolução de Problemas mudaram, e que “hoje a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade de resolução de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2006, p.2).

Os PCN (BRASIL, 1998) indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula; tornam claro o papel da Matemática no Ensino Fundamental, sugerindo objetivos que evidenciem a importância de o aluno valorizá-la como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam ainda que, mesmo no ensino atual, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de Resolução de Problemas, quando é incorporada ao programa, aparece como um item isolado. Costuma ser desenvolvida paralelamente, como aplicação da aprendizagem, a partir de listas de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha e repetição de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos.

Assumindo que problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, passamos, então, a enfocar algumas concepções de pesquisadores matemáticos sobre a Resolução de Problemas. Considerando a história da Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005), encontramos denominações diferenciadas por preposições que caracterizam três tipos de concepções de ensino baseadas em Resolução de Problemas: ensinar **sobre** Resolução de Problemas, ensinar **para** a Resolução de Problemas e ensinar **através** da Resolução de Problemas.

O principal representante da concepção de ensino de Matemática **sobre** a Resolução de Problemas é George Polya (1994), que, em agosto de 1944, apresentou uma série de orientações para o trabalho com Resolução de Problemas no ensino de Matemática. Essa concepção corresponde a teorizar sobre Resolução de Problemas, explicitando fundamentos, regras e passos para realizar essa atividade. Segundo Polya (1994), a resolução de um problema exige quatro etapas: a compreensão da tarefa; a concepção de

um plano que leve à meta pretendida; a execução desse plano; a análise para determinar se a meta foi atingida.

O trabalho de George Polya, não somente no contexto da Resolução de Problemas, mas no âmbito mais amplo da Educação Matemática, foi e ainda é muito importante e, ainda hoje, bastante considerado. Entretanto, essas etapas para resolução de problemas sugerem procurar dados expostos no enunciado e empregar procedimentos previamente conhecidos e escolhidos para a sua resolução. Por isso, o ensino sobre Resolução de Problemas em que se insere seu trabalho é limitado e não se aplica totalmente ao que acreditamos. Consideramos que a resolução de um problema envolve aspectos relacionados ao conteúdo matemático específico proposto, exigindo fazer conjecturas, testar procedimentos, aprender conteúdos, desenvolver raciocínios e apresentar explicações que nem sempre podem ser previstas.

Na concepção de ensinar para a Resolução de Problemas, os professores costumam utilizar os problemas para apresentarem aplicações dos conteúdos matemáticos. Primeiramente, apresentam uma parte teórica dos conteúdos matemáticos, e depois, propõem problemas sobre aquele conteúdo. Embora usualmente a expressão “ensino de Matemática para a Resolução de Problemas” não seja conhecida pelos professores como uma concepção de trabalho, essa é a forma como a grande maioria dos professores realiza seu ensino nas aulas de Matemática. Encontramos essa abordagem, também, na maioria dos livros didáticos utilizados nas escolas, com alguns exercícios de fixação e problemas contextualizados, devendo ser resolvidos com um tópico matemático estudado anteriormente.

Na investigação que será aqui relatada, adotaremos a concepção do Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, por concordarmos com Allevato e Onuchic (2009) quando dizem que se trata de um trabalho em que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se faz através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. Esse tipo de aprendizagem tem a intenção de levar ao aluno uma forma diferente de trabalho, deixando-o usar o seu raciocínio lógico, os conhecimentos prévios de que dispõe, e estimulando a sua criatividade.

Onuchic (1999) recomenda que o ensino de Matemática deva ocorrer em um ambiente caracterizado pela investigação, e que esta deva ser orientada pela Resolução de Problemas. Segundo esse enfoque, o ponto de partida das atividades matemáticas deixa de ser a definição e passa a ser o problema, de forma que “[...] a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem” (ONUCHIC, 1999, p.215).

## **A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE GEOMETRIA**

A Geometria é essencial, pois é um conhecimento universal que faz parte de nossa vida; é usada em construção civil, casas e monumentos, auxilia no transporte, está nos

mapas, na música, na natureza. Estamos rodeados pela Geometria, sendo praticamente impossível vivermos sem ela. Seu estudo permite ao aluno desenvolver habilidades importantes para a compreensão e a representação do mundo físico. Na infância, desde o instante em que a criança nasce, e a partir das interações que estabelece com o mundo, a Geometria permite o desenvolvimento da orientação espacial necessária para escrever, seguir uma determinada direção, localizar objetos e localizar-se a si próprio e aos outros.

Essas e tantas outras aplicações atestam a necessidade de abordarmos o tema no processo ensino-aprendizagem, cabendo à Matemática a responsabilidade de desempenhar esse papel. Além disso, a Geometria não deve ser apresentada como conteúdo isolado, mas como um campo que auxilia e desenvolve outros conceitos matemáticos relacionados a ela.

Nos documentos oficiais das escolas e em grande parte do material didático de Matemática – livros e outros materiais que são enviados para as escolas –, lemos sobre a importância da Geometria e a necessidade de ser trabalhada na sala de aula (BRASIL, 1998; SÃO PAULO, 2008). No entanto, desde a escola fundamental, a Geometria escolar geralmente é trabalhada, dissociada dos outros conteúdos matemáticos e da vida dos alunos.

A Geometria enfrentou um abandono histórico nas aulas de Matemática, pois algumas reformas ocorridas davam ênfase ao ensino de Álgebra (PAVANELLO, 1993; BRASIL, 1998; COSTA, 2008; MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992). Pavanello (2009) analisa que após esse processo de abandono do ensino de Geometria, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e a maioria das propostas curriculares de Matemática elaboradas na década de 80 ressaltaram a importância da aprendizagem dos conceitos geométricos no Ensino Fundamental.

Esse resgate da Geometria pode ser percebido através de vários encaminhamentos e atitudes que estão sendo tomados atualmente no contexto escolar. Os professores fazem sua parte por meio de tentativas que incluem metodologias de ensino, outras abordagens e, inclusive, a utilização de materiais de apoio para o trabalho em sala de aula. Associado a isso, os órgãos oficiais têm realizado ações de formação para os professores, muito embora não se vejam resultados efetivos dessa formação na mudança e melhoria das práticas docentes e dos resultados na aprendizagem como um todo. Alguns professores procuram aprimorar e renovar metodologias de ensino, muitas vezes, sem muitos recursos, enfrentando dificuldades estruturais e administrativas em suas aulas.

Esse movimento de resgate do ensino de Geometria pode ser percebido, inclusive, em livros didáticos atuais. Consideramos que esse aspecto seja extremamente relevante, uma vez que o livro didático é um dos principais recursos do professor. É através dele que muitos professores aprendem Matemática, planejam e desenvolvem suas aulas, conduzindo o ensino de acordo com o que os autores propõem (CARLOVICH, 2005, p.34).

Mas, como o professor deveria propor esses conteúdos aos seus alunos? Os PCN (BRASIL, 1998) propõem que o estudo dos conteúdos geométricos tenha como

ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. O mesmo documento ressalta que os problemas de Geometria fazem com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas pelo raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve se restringir apenas a eles, mas deve envolver todos os blocos de conteúdos.

Segundo Ponte (2005), no ensino de Geometria, o professor deve propor situações de investigação que envolvam quatro momentos: o reconhecimento da situação; a formulação de conjecturas; a realização de testes; por último, a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho feito. Diz também que há lugar para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações, e que o grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefas de modo a construir um currículo interessante e equilibrado para promover o bom desempenho dos alunos em diferentes níveis. Evidencia o uso de softwares de Geometria dinâmica, tais como, Cabri Géomètre, Geogebra, entre outros, pois o suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação, a verificação de conjecturas e a investigação dos processos.

## **METODOLOGIA DE PESQUISA**

A metodologia de pesquisa adotada no presente estudo é de natureza qualitativa. Esta considera que há uma relação entre o mundo objetivo e o do sujeito, que não pode ser traduzida em números; por isso, não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo da pesquisa qualitativa. Desse modo, ela se caracteriza por ser bastante descritiva, trazendo em detalhes o contexto, os fatos ocorridos, as falas e as expressões dos sujeitos envolvidos na investigação. O ambiente pesquisado é a fonte direta dos dados, e o pesquisador é o instrumento-chave, pois estando diretamente envolvido nos processos da investigação, é através dele que se coletam dados e se faz a análise daquilo que foi coletado. Os pesquisadores tendem a analisar os dados qualitativos, de modo que o processo e seu significado são os focos principais de abordagem (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Juntamente com a abordagem qualitativa, optamos por utilizar a Engenharia Didática. Ela é uma das abordagens empregadas na Didática da Matemática que, sem associação específica com qualquer teoria de aprendizagem, caracteriza-se como uma forma particular de organizar os procedimentos de pesquisas desenvolvidas em sala de aula. Na Engenharia Didática, o trabalho do pesquisador é comparado ao de um engenheiro que idealiza, elabora e executa um projeto, só que em Educação e por meio de sequências didáticas. É baseada em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino.

A Engenharia Didática possibilita ainda o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia (ARTIGUE, 1996). Nela considera-se um conteúdo do sistema de ensino, que na presente pesquisa se refere a retas, semirretas e segmentos de

retas, necessário ao estudo do Teorema de Tales, inserido no âmbito da Geometria, cuja aprendizagem parece pouco satisfatória. Faz-se uma análise com a intenção de propor mudanças para uma possível aprendizagem mais eficiente e efetiva desse conteúdo.

O uso da Engenharia Didática, enquanto abordagem metodológica em qualquer área do conhecimento, perpassa quatro fases: (1) análise preliminar; (2) concepção e *análise a priori*; (3) aplicação de uma sequência didática; por último, (4) *análise a posteriori* da sequência aplicada, seguida de uma possível validação.

Segundo Artigue (1996), na análise preliminar, é feito um levantamento sobre tudo o que envolve o objeto matemático em estudo. São feitas considerações a respeito do quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão. Analisa-se a necessidade dos conteúdos contemplados pelo ensino, como tem sido desenvolvido o ensino atual do assunto: seus efeitos, as concepções e dificuldades dos alunos, e também os entraves didático-pedagógicos do processo ensino-aprendizagem.

Na *análise a priori*, deve-se descrever cada escolha feita pelo pesquisador na idealização das sequências didáticas, as características e motivos dessas escolhas. Analisa-se qual será o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que esse aluno disporá durante a experimentação, ou seja, durante a realização das atividades que compõem as sequências didáticas elaboradas. Nessa fase, devem-se registrar os objetivos e condições de realização da pesquisa, a população de alunos, o estabelecimento do contrato didático e a aplicação dos instrumentos de pesquisa.

Nessa fase, na pesquisa que desenvolvemos, foram elaboradas as atividades de Resolução de Problemas que os alunos realizaram em sala de aula, pensando nos objetivos de cada atividade e sem perder de vista o conteúdo principal ao qual se pretendia chegar – Teorema de Tales.

Na fase da experimentação, ocorre a aplicação das sequências didáticas e são observadas as atitudes e as produções dos alunos. Ela inicia no momento em que há o contato do pesquisador com a população de alunos que são os participantes da investigação. Os dados são coletados por meio de relatórios, questionários, anotações do pesquisador, entrevistas, gravações em áudio ou vídeo e outros recursos. Os registros das observações feitas devem ser realizados de forma cuidadosa.

Depois da fase de experimentação, analisam-se as produções dos alunos, as observações feitas em relação ao comportamento deles durante a aplicação da sequência didática e todas as observações colhidas e registradas. Há o confronto da *análise a priori* e da *análise a posteriori*, buscando validar ou refutar as hipóteses levantadas. É nesse confronto que a metodologia da Engenharia Didática diferencia de outras metodologias na área da Didática e seu uso se justifica ao invés de outras formas de pesquisa.

Na pesquisa relatada neste artigo, as sequências didáticas foram aplicadas pela própria pesquisadora/professora em sala de aula regular; por isso, o principal método empregado na fase da experimentação foi a observação participante. De acordo com

Vianna (2003), ela tem como principal aspecto o mergulho do pesquisador no campo e a observação segundo a perspectiva dos membros, apesar da influência pela sua participação. Outros métodos foram empregados para complementar os dados coletados por meio da observação, tais como questionário e entrevista.

Nesta pesquisa, usamos algumas formas de registro, tais como: o diário de campo, gravações, transcrição de entrevistas, fotos e filmagem, que permitem acompanhar o processo de desenvolvimento da aprendizagem, registrando dúvidas e descobertas sobre o tema, comentários ou indagações sobre os fatos, opiniões pessoais, impressões, dificuldades, erros e acertos, reflexões sobre o material utilizado e sobre a aula.

## **APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS**

A pesquisa aqui apresentada foi realizada em uma escola pública localizada em São Paulo, em duas salas de 7ª série, ou 8º ano, do Ensino Fundamental, de modo que os alunos têm idade entre 12 e 14 anos aproximadamente.

A experimentação que gerou os dados aqui relatados ocorreu durante as aulas de Matemática, pois a pesquisadora é também professora das turmas investigadas. Os encontros para sua realização foram previstos para acontecerem dentro da carga horária da disciplina.

Os alunos trabalharam ora em pequenos grupos, ora individualmente. Elaboramos e assinamos um contrato didático escrito, no qual ficou estabelecida qual seria a metodologia de trabalho aplicada e quais seriam os deveres e os direitos de todos os envolvidos (professora e alunos). A ideia de realizarmos um contrato didático surgiu a partir de algumas leituras que fizemos durante a preparação da coleta de dados da pesquisa.

Silva (2008) se apoia em Brousseau (1986) para dar a entender que contrato didático se refere a um conjunto de regras implícitas ou explícitas que regem as responsabilidades daqueles envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem, e que relacionam professor, aluno e saber numa situação de ensino e de aprendizagem.

Após fazermos o levantamento do referencial teórico da pesquisa, elaboramos as sequências didáticas, não sem antes analisarmos a sequência de conteúdos que os livros didáticos, as orientações oficiais e os livros de pesquisa e de orientação de professores propõem para que o aluno possa compreender o Teorema de Tales. Assim, para elaborarmos nossas atividades, inicialmente fizemos uma reflexão sobre os conteúdos que os alunos deveriam saber antes de chegarmos ao conteúdo pretendido e, ao final das sequências didáticas, esperávamos que os alunos também fossem capazes de construir noções básicas da Geometria.

Os problemas dessas sequências didáticas foram organizados, então, de modo que os seguintes assuntos fossem abordados: retas, semirretas e segmentos de retas; razão; ângulos; triângulos, semelhança, congruência; proporção; Teorema de Tales, entre outros. Nosso objetivo era também auxiliar o aluno a compreender a noção de proporção em



diferentes contextos e a perceber a aplicação do Teorema de Tales em situações do cotidiano. Para cada atividade (sequência) foi elaborado um objetivo específico ligado a algum conteúdo.

Em todas as aulas, os conteúdos partiram de um problema gerador, ou seja, os problemas foram o ponto de partida para trabalharmos os conteúdos propostos. Pretendíamos que o aluno participasse ativamente da execução das atividades propostas, percebendo suas potencialidades, organizando-se e buscando o que fosse necessário para suprir lacunas, com a ajuda também dos colegas em um trabalho colaborativo. A professora tentou não enfatizar o erro, mostrando alternativas para que os alunos chegassem ao resultado esperado e para que tentassem resolver novamente, ajudando-os a encontrar “saídas”, respeitando e aproveitando seus conhecimentos prévios. Rompeu com a prática, com a qual os alunos já estavam acostumados, de “tirar notas” do aluno toda vez que ele erra. Os erros apresentados pelos alunos na resolução dos problemas que compunham as sequências didáticas eram analisados e discutidos, dando-lhes oportunidade de esclarecer suas dúvidas e construir novo conhecimento.

As sequências didáticas foram elaboradas com problemas retirados, ou adaptados, de livros didáticos disponíveis nas escolas em que trabalhamos. Além dos apresentados no PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2008, consultamos livros de pesquisa e de orientação pedagógica para professores que trabalham Geometria.

## **ANÁLISES DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS**

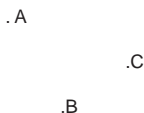
Relataremos, a seguir, as informações obtidas na aplicação das sequências didáticas. Lembramos que a Engenharia Didática é constituída por quatro fases: análise preliminar; concepção e *análise a priori*; aplicação de uma sequência didática; por último, é feita uma *análise a posteriori* da sequência aplicada, seguida de uma possível validação.

Nas *análises a priori* seguintes, registraremos o que foi pensado em termos especialmente de conteúdo para cada item/problema das sequências didáticas, o que esperávamos dos alunos em relação a conhecimentos prévios e que dificuldades encontrariam. Nas *análises a posteriori*, apresentaremos e analisaremos os dados obtidos com a aplicação da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Desse modo, as informações aqui registradas ocorreram no decurso das sete etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2008) para implementação dessa metodologia em sala de aula: formar grupos e entregar as atividades; observar e incentivar; auxiliar nos problemas secundários; registrar as resoluções na lousa; realizar uma plenária; buscar um consenso; formalizar o conteúdo.

A seguir, apresentaremos a primeira atividade elaborada por nós.

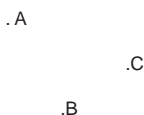
## Atividade 1 - Problemas geradores: retas, semirretas e segmentos de retas

1) Represente retas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



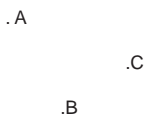
2) Quantas retas existem passando por dois desses pontos?

3) Represente semirretas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



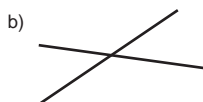
4) Quantas semirretas existem passando por dois desses pontos?

5) Represente segmentos de retas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



6) Quantos segmentos de reta existem passando por dois desses pontos?

7) Em cada uma das figuras seguintes as linhas representam retas. Descreva a diferença entre as retas do item a e as do item b.



### Análise a priori da atividade 1

Essa primeira atividade foi elaborada com o intuito de que os alunos construíssem conhecimento sobre retas, semirretas e segmentos de retas, trabalhando assim os conceitos primitivos da Geometria.

Esperávamos que o aluno, no problema 1, desenhasse linhas que ultrapassassem os pontos A, B e C, representando, assim, retas. No que diz respeito ao problema 3, o aluno deveria desenhar linhas começando exatamente em um desses pontos e ultrapassando o outro ponto. No problema 5, a linha reta representada pelo aluno deveria iniciar e terminar exatamente em dois dos pontos A, B e C indicados. Sabíamos que os alunos, individualmente, ao menos aqueles que disseram que não tiveram aulas

de Geometria, talvez não conseguissem responder aos problemas corretamente, mas poderiam trabalhar em conjunto para respondê-los, mostrando as diferenças entre retas, semirretas e segmentos de retas. Fizemos questão de representar os três pontos A, B, C em cada uma das questões 1, 3 e 5, pois o aluno precisaria desenhar o que lhe era solicitado em cada caso.

Nessa atividade, não propusemos apenas problemas de representação. Os alunos, além de representar, deveriam responder aos outros itens da atividade de modo a verificar as diferenças entre retas, semirretas e segmentos de retas. Para responder aos problemas propostos seria preciso compreender, segundo apontam Dolce e Pompeo (2005), como se constituem esses objetos geométricos passando por dois pontos:

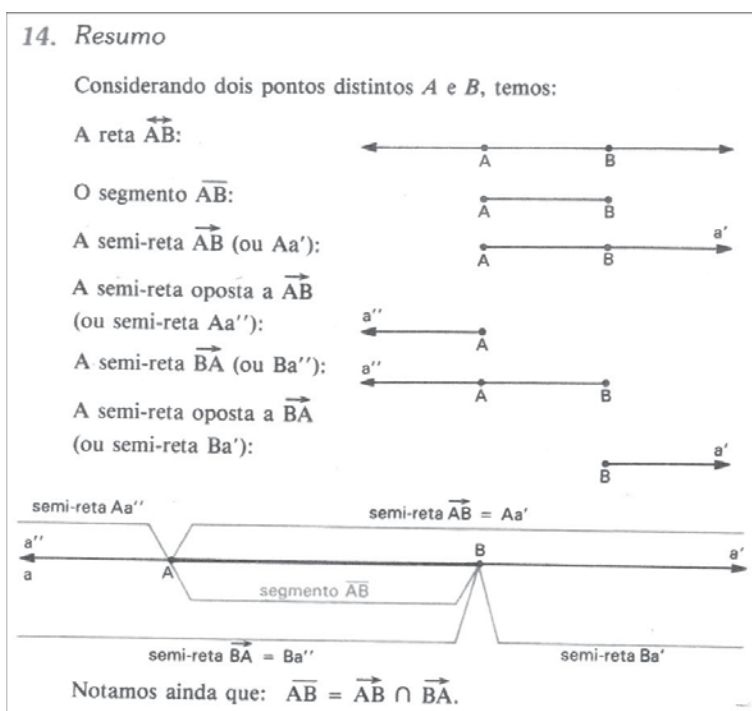


FIGURA 1 – Resumo de conceitos (DOLCE; POMPEO, 2005, p.9).

Desse modo, na questão 2, os alunos deveriam responder que apenas uma reta passa por dois pontos, assim como no problema 6, que apenas um segmento de reta fica determinado por dois pontos. No problema 4, a resposta correta explicitaria a possibilidade de determinar duas semirretas passando por dois pontos, cada uma delas tendo origem em um deles.

Na questão 7, consideramos que o aluno poderia perceber a diferença entre as posições relativas de retas, identificando e descrevendo em linguagem corrente como se caracterizam as retas paralelas e as retas concorrentes.

## **Análise a posteriori da atividade 1**

Iniciamos distribuindo as atividades impressas e pedindo aos alunos que, em duplas, lessem e respondessem às questões propostas. Esta é uma etapa inicial importante da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, pois é por meio dela que o professor sabe de que recursos e conhecimentos o aluno já dispõe sobre o conteúdo a ser estudado. Além disso, a natureza do trabalho proposto – Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – fundamenta-se na crença de que os alunos são os principais responsáveis pela construção do seu conhecimento. A pesquisadora já tinha conversado sobre isso com os alunos; eles já estavam cientes e tinham assinado o termo de compromisso no qual estava registrado que esse procedimento seria adotado: os alunos trabalhariam em duplas ou grupos, com a professora observando o trabalho inicial realizado por eles. Num segundo momento, a professora passaria a atuar como questionadora, mediadora e orientadora dos trabalhos.

Mas, ao iniciarmos o trabalho com essa primeira atividade da sequência, alguns alunos queriam que, antes de tudo, explicássemos o que deveriam fazer. Entretanto, a professora queria recolher as atividades escritas antes de “explicar” o conteúdo, a fim de verificar quais eram os conhecimentos prévios dos alunos sobre o assunto, e como eles tinham conseguido fazer as resoluções unicamente com a ajuda dos próprios colegas. A metodologia prevê a fase da plenária, última fase, em que os erros são corrigidos, as dúvidas são sanadas e novos conhecimentos são construídos. Mas a falta de vivência dos alunos nesse tipo de trabalho dificultava-lhes que “se conformassem” em entregar as resoluções não totalmente corretas.

Tentamos, então, ajudar nos problemas secundários. A todo o momento da aplicação da atividade, observando os entraves dos alunos, fazíamos perguntas para as duplas e também para todos os alunos, de modo a ajudá-los a se lembrarem de conteúdos aprendidos anteriormente. Essa conduta é necessária para que os alunos adquiram confiança, pois percebem que têm condições de recorrer ao que já sabem para tentarem resolver os problemas e avançar na aprendizagem da Matemática; evita que a professora fique expondo conteúdos desnecessários que muitas vezes os alunos já dominam. A professora incentivava os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolverem o problema, e estimulava-os a escolher diferentes métodos a partir dos próprios recursos de que dispunham. Atendia os alunos em suas dificuldades, intervindo e ajudando-os nas dúvidas apresentadas em relação ao vocabulário, à leitura e à interpretação. Ainda, incentivava o compartilhamento desse conhecimento adquirido com os outros colegas. Nesse compartilhamento, também ocorre a construção de conhecimento relevante, não somente pelos alunos, como também pela professora. Fazíamos perguntas de modo a ajudar os alunos a construir seu conhecimento e a sanarem suas dúvidas para que pudessem responder às questões:

P: — O que é representar?

A: — Não sei.

P: — Por exemplo, quando vocês desenham uma casa, estão desenhando uma casa de verdade, com as mesmas medidas?

- A: — Não.
- P: — Não; vocês estão representando uma casa. Então, no problema, vocês precisam representar retas. Mas, o que são retas? Alguém lembra o que é?
- A: — Linhas.
- P: — A colega falou linhas, vocês concordam com ela?
- A: — Não. São pontos.
- P: — Pontos e retas têm diferenças. Quais são elas? Será que dá para responder? O que vocês acham? E no 2? Quantas retas passam por dois pontos? Se forem linhas, quantas linhas passam por dois pontos?
- A: — Uma.
- A: — É isso, professora?
- P: — O que você acha?
- A: — Mas, professora, eu não sei. Eu vou tirar NS. [não satisfatório]
- P: — Gente, como eu disse para vocês, não se preocupem com a nota; preocupem-se em aprender. O que vai fazer um aluno ficar com nota ruim?
- A: — Se não participar.
- P: — A participação, a preocupação, o tentar fazer.

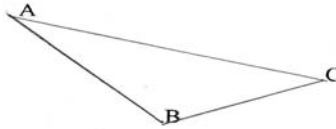
Aconselhamos que não se preocupassem com notas, pois os avaliáramos pela participação e preocupação em ter de aprender. Muitos alunos haviam dito, no questionário que aplicamos, que nunca haviam tido aulas de Geometria, e percebemos, durante a aplicação das atividades, que realmente não tinham conhecimento nem mesmo sobre os conceitos primitivos da Geometria.

Após o diálogo, os alunos retomaram o trabalho em duplas tentando responder à atividade. A professora circulava pela classe observando como estavam realizando o trabalho. Ao perceber a falta de cuidado dos alunos na representação das retas, semirretas e segmentos, chamou novamente a atenção da classe. Mesmo assim, eles não apresentavam essas representações corretamente.

Com relação às resoluções apresentadas, nessa atividade, a maioria dos alunos uniu os pontos das questões 1, 3 e 5, formando um triângulo, como imaginávamos. Nem mesmo aqueles que já haviam tido aulas de Geometria anteriormente consideraram ultrapassar os pontos na representação de retas e semirretas.

Na questão 2, grande parte dos alunos respondeu corretamente que apenas uma reta passa por dois pontos. Mas observamos que muitos aumentaram esse número nas questões 4 e 6, afirmando que existe mais de uma semirreta e mais de um segmento de reta que passa por dois pontos, conforme podemos verificar na figura a seguir.

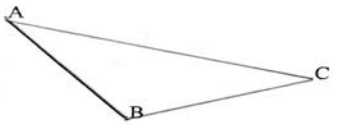
1) Represente retas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



2) Quantas retas existem passando por dois desses pontos?

*Existem 1 reta*

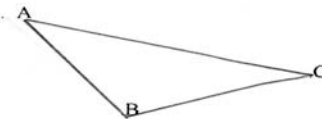
3) Represente semi-retas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



4) Quantas semi-retas existem passando por dois desses pontos?

*3 semi-retas*

5) Represente segmentos de retas que passem por dois dos pontos representados no quadro abaixo:



6) Quantos segmentos de reta existem passando por dois desses pontos?

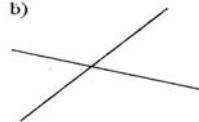
*3 segmentos*

7) Em cada uma das figuras seguintes cada uma das linhas representam retas. Descreva a diferença entre as retas do item A e as do item B

a)



b)



*Uma reta se cruza e a outra não*

FIGURA 2 – Respostas de um dos alunos

Em geral, esses alunos não responderam corretamente aos problemas propostos. Na segunda questão, muitos responderam 2 ou 3, pois estavam contando os três pontos,

de acordo com a representação fornecida e não com o que estava escrito no enunciado. O mesmo ocorreu com as questões 4 e 6.

Na questão 7, outros alunos apresentaram respostas como estas:

- “Uma cruza e a outra não”.
- “A diferença entre **a** e **b** é que **b** é uma linha cruzada e **a** é uma linha reta.”
- “Na **a**, as retas seguem para o mesmo lado, mas estão separadas, na **b** as retas seguem para lados diferentes e se cruzam.”
- “Por que na primeira temos linhas retas e as da **b** são ligadas uma com a outra.

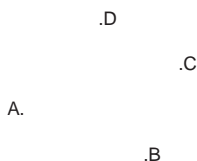
Descrevemos aqui as respostas dos alunos referentes à atividade 1 da sequência didática, apresentadas após as três primeiras etapas da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, em que não foi apresentado um conteúdo antes da realização das atividades.

Seguindo os sete passos, apresentados anteriormente neste trabalho, na aula seguinte, encaminhamo-nos às outras fases da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Fizemos a correção dos problemas geradores: retas, semirretas e segmentos de retas, tentando, ainda de acordo com as etapas propostas, registrar as resoluções na lousa para serem discutidas. Então, realizamos uma plenária, que é o momento quando o professor chama todos os alunos para discutirem as resoluções realizadas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva dos alunos em busca da aprendizagem. No nosso caso, convidamos os alunos a registrarem suas respostas na lousa, mas os alunos não se sentiram muito à vontade e acharam melhor responder de suas respectivas carteiras. Chegando a um consenso, formalizamos o conteúdo, apresentando os novos conceitos e conteúdos construídos.

Após essa plenária, na qual os alunos tiraram suas dúvidas construindo seu conhecimento, formalizamos o conteúdo registrando na lousa as definições, notações e nomenclaturas envolvidas no conteúdo trabalhado. Em seguida, propusemos uma sequência com a finalidade de fixar os conhecimentos. Apresentaremos, a seguir, uma dessas sequências de fixação e avaliação.

## Atividade 2 - Problema de fixação e avaliação: reta, semirreta e segmento de reta

1) Quantas retas distintas são determinadas pelos pontos A, B, C e D da figura?



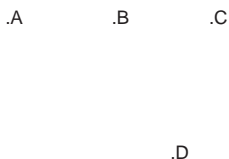
Quais são elas?

2) Responda:

Quantos pontos existem numa reta?

Quantas retas são determinadas por dois pontos A e B distintos?

3) Quantas retas distintas ficam determinadas pelos pontos A, B, C e D da figura sabendo que A, B e C estão alinhados?



### Análise a priori da atividade 2

Nessa atividade, esperávamos que os alunos fizessem a representação geométrica das retas, no problema 1, ultrapassando os pontos, e que conseguissem identificar quais e quantas retas passam por esses quatro pontos. No problema 2, queríamos que eles respondessem que existem infinitos pontos em uma reta, e que apenas uma reta é determinada por dois pontos. No problema 3, esperávamos que os alunos identificassem as quatro retas que passam pelos pontos A, B, C e D. Acreditávamos que eles já não apresentariam muitas dificuldades nessas resoluções e que conseguiriam se lembrar de alguns desses conteúdos, que já haviam sido discutidos na plenária ao final da atividade 1. Vale ressaltar que algumas questões propostas na atividade 2 envolviam aspectos que ainda não haviam sido trabalhados, pois queríamos verificar como os alunos, a partir do que viram na atividade anterior, seriam capazes de avançar no conteúdo. Desse modo, conseguiriam resolver esses problemas de uma forma mais natural do que aquela que manifestaram por ocasião da atividade anterior.



## **Análise a posteriori da atividade 2**

No início da aula, os alunos formaram grupos, atentando para a formação das mesmas duplas da aula anterior, na medida do possível, pois alguns alunos haviam faltado. Distribuímos as atividades e pedimos que as lessem e as respondessem, lembrando que deveriam tentar responder com a ajuda dos colegas, num trabalho colaborativo.

Nessa aula, os alunos se mostraram mais participativos e responderam com maior desenvoltura, pois já não estavam mais tão preocupados simplesmente em acertar a resolução dos problemas; parece que já compreendiam melhor o espírito, a filosofia de trabalho que estavam vivenciando.

Andando por entre as carteiras, percebemos que alguns alunos, inicialmente, não notaram as retas que passavam pelos pontos A e C e pelos pontos B e D. Ao analisarmos a realização das atividades, vimos que apenas dois alunos não responderam corretamente a esse problema. Não notamos maiores dificuldades nos outros problemas. Os alunos procuravam a professora apenas para terem a confirmação de que estavam corretos, evidenciando novamente que não queriam entregar as atividades com as respostas erradas.

Os alunos se mostraram participativos e, para essa primeira atividade usando essa metodologia, pareceu-nos que eles perceberam aquilo que planejáramos, ou seja, construíram conhecimento sobre retas, semirretas e segmentos de retas.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O objetivo deste artigo foi descrever e analisar uma investigação sobre o ensino de Geometria através da Resolução de Problemas, desenvolvendo reflexões sobre as possibilidades para a aplicação em sala de aula. Particularmente, propôs-se a contribuir com mais um caminho para o ensino de Matemática na escola básica. O conteúdo matemático abordado foi o de retas, semirretas e segmentos de retas. Utilizando a metodologia qualitativa de pesquisa com a Engenharia Didática, tomamos como eixo de ação a aplicação de uma sequência didática com problemas matemáticos, buscando responder quais possibilidades o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece para o ensino de Geometria.

Percebemos, no desenvolvimento dessa experiência, algumas dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos trabalhados, tais como: falta de compreensão do vocabulário, o que dificultou seu entendimento dos enunciados dos problemas; não relacionar e relembrar conteúdos já estudados; falta de pré-requisitos: os alunos não tinham os pré-requisitos (conteúdos) básicos necessários.

Mas houve também perceptíveis avanços nos alunos. Apesar de suas dificuldades, construíram conhecimento sobre os conteúdos propostos; foram capazes de associar os conhecimentos, construídos em uma sequência didática, com o conteúdo da sequência didática anterior e o da seguinte; aprenderam a trabalhar colaborativamente; ganharam autonomia quando tentavam resolver os problemas. E apesar da explícita rejeição que muitos alunos sentem em relação à Matemática, esses alunos gostaram do trabalho desenvolvido.

Salientamos que esta pesquisa significou, em nossa prática docente e na prática dos alunos, um desafio, pois não estávamos habituadas a utilizar problemas como ponto de origem do conhecimento matemático em nossas aulas. Como professoras, sempre propúnhamos exercícios para os alunos depois de formalizarmos um determinado conteúdo matemático, ou seja, praticávamos o ensino de Matemática para a Resolução de Problemas. Propúnhamos problemas contextualizados, mas apenas para a aplicação dos conteúdos trabalhados anteriormente. Como foi a primeira vez que aplicamos a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, acreditamos que a metodologia aplicada por nós possa certamente ser aprimorada. Mas estamos convencidas de que é para os professores uma boa alternativa para a prática docente, e para os alunos, uma oportunidade de construir conhecimento matemático valendo-se de seu potencial. A Resolução de Problemas se torna, assim, um recurso não só para aplicar, mas para aprender Matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho. Rio Claro, SP, 2005.
- \_\_\_\_\_. *Problem solving as a methodology of work for mathematics teaching in classroom*. CME11 – INTERNACIONAL CONGRESS OF MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Monterrey. Disponível em: < <http://tsg.icme11.org/document/get/453> >. Acesso em: 18 nov. 2009.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas – uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. VII REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 2006, Águas de Lindoia, SP. Atas, 2006.
- ARTIGUE, M. *Didáctica das matemáticas*. [S.l.]: Instituto Piaget, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – 5ª a 8ª séries: matemática*. Brasília, DF, 1998.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.2, n.7, p.33-116, 1986.
- CARLOVICH, M. *A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental*. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- COSTA, M. S. *Discutindo o ensino de geometria com professores polivalentes*. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*. v.9. 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- FONSECA, M. C. F. R. et al. *O ensino da geometria na escola fundamental – três*

questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 2.ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

GUIMARÃES, S. D.; VASCONCELOS, M.; TEIXEIRA, L. R. M. O ensino de geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: concepções dos acadêmicos do normal superior. *Revista Zetetiké*, Campinas, SP, v.14, n.25, p.93-106, jan./jun. 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? *Revista Pro-posições*, Campinas, SP, v.3, n.1, p.39-54, 1992.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*. São Paulo: UNESP, 1999. p.199-220.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, Campinas, SP, v.1, n.1, p.7-17, 1993.

\_\_\_\_\_. Por que ensinar/aprender geometria? 2004. Disponível em: < [www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr21-Regina.doc](http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr21-Regina.doc) >. Acesso em: 2 ago. 2009.

POLYA, G. *Arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático*. Trad. H. L. Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994. 196 p.

PONTE, J. P. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. *Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino de matemática para o ensino fundamental, ciclo II e ensino médio*, 2008.

SILVA, B. A. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação matemática – uma (nova) introdução*. 3.ed. São Paulo: EDUC, 2008. p.49-75.

VIANNA, H. M. *Pesquisa em educação: a observação*. Brasília, DF: Plano, 2003.

**Recebido em:** fev. 2010    **Aceito em:** abr. 2010