I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

# Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización

Viviana Paola **Salazar** Fino
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.vsalazar@pedagogica.edu.co
Sandra Milena **Jiménez** Ardila
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.sjimenez@pedagogica.edu.co
Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
lmendieta@pedagogica.edu.co

**Resumen**

Se presenta una alternativa para la enseñanza del proceso de factorización mediante el uso de las "*Tabletas algebraicas*", material manipulativo construido por un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2011.Estematerial permite establecer una conexión entre la noción de área y la expresión de algunos polinomios de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f$, $a, b \in \mathbb{N}$, $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, como producto de factores. Se hace especial énfasis en reducir a la mínima expresión los factores cuyo producto determina el polinomio que representa el área del rectángulo formado por las tabletas, buscando conceptualizar el significado del proceso de factorización.

*Palabras clave*: polinomios, sistemas de representación, materiales manipulativos, enseñanza, formas geométricas.

**Abstract**

We present an alternative for the factorization process teaching by of use of "*Tabletas Algebraicas*", manipulative material made by a group of preservice teachers form the Universidad Pedagógica Nacional in the year 2011.This manipulative material allows to establish a connection between the concept of area and the expression of some polynomials of the form$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f, a, b \in \mathbb{N},\ c, d, e, f\ \in \mathbb{Z}$,as product of factors. Special emphasis will be made to reduce to the minimum expression the factors which product determines the polynomial that represents the area of the rectangle formed by the *Tabletas Algebraicas*, we finding the conceptualization of factoring process.

*Keywords*: polynomial, representation systems, manipulative materials, teaching, geometric shapes.

## Presentación

Este taller surge del trabajo realizado en el espacio académico Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra[1], del componente Pedagógico y Didáctico en el Programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La propuesta de enseñanza ofrece una alternativa para enseñar el proceso de factorización de algunos polinomios (de la forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f,\ \ a, b \in N; c, d, e, f\ \in Z$), temática propia del álgebra escolar del grado octavo, en nuestro país (Colombia), mediante el uso de las *Tabletas Algebraicas*, material concreto manipulativo que se fundamenta en la teoría de las representaciones de Raymond Duval.

## Descripción del material

Las *Tabletas Algebraicas* son un material manipulativo derivado de los bloques multibase (BAM), o Bloques de Dienes. Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado *a*, otro de lado *b*, otro de lado 1 (unidad), un rectángulo de lados *a*y *b*, otro de lados *a* y 1, un tercer rectángulo de lados *b* y 1, como puede verse enseguida:

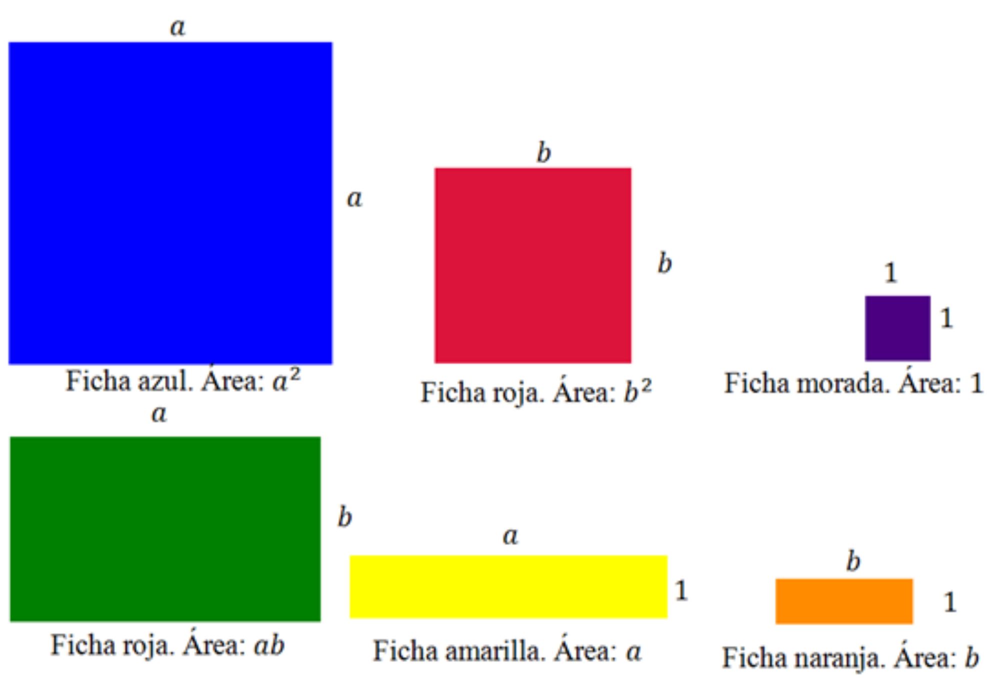


*Figura 1*. descripción de las fichas

[1]Bajo la asesoría de la profesora Lyda Mora.

Ya que este material se puede construir con medidas arbitrarias y en una gran variedad de materiales, es importante que las medidas de las longitudes $a$ y $b$ sean números primos relativos, e incluso, que estas dos medidas no tengan tampoco factores en común con la medida de longitud unidad. El material que hemos construido (usado en la prueba piloto descrita más adelante), tiene como medidas de longitud las siguientes: $a = 6\ cm,\ b = 4\ cm,$ $unidad = 1.5\ cm.$

## Génesis del material

El nombre *Tabletas Algebraicas* fue dado por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Dayana Guantiva, Sandra Jiménez, Kevin Parra, Viviana Salazar y Duván Sánchez, a un conjunto de fichas rectangulares de colores. Dicha idea se inspira en los trabajos de Euclides y los árabes, quienes relacionaban áreas y términos de una ecuación. A continuación, se presentará de forma breve el marco referencial de esta propuesta de enseñanza.

## Referentes teóricos

### Materiales manipulativos

En las últimas décadas, las investigaciones en educación han mostrado la necesidad de modificar los procesos de enseñanza de las matemáticas, siendo una de las principales conclusiones la invitación a que en el aula existan diferentes vías para construir los conocimientos en los estudiantes.

De acuerdo con esto, algunas de las vías que más se ha destacado ha sido el uso de materiales tangibles en la enseñanza, los cuales aparecen en los años sesenta con las publicaciones de Zoltan Dienes (1960) y Jerome Bruner (1961), esto desató una oleada de investigaciones que articulaban materiales que involucraban simultáneamente la percepción táctil (como ábacos, regletas, balanzas, etc.) y temas matemáticos (como conteo, fracciones, suma y resta), que arrojaron resultados satisfactorios, sobretodo en estudiantes de primaria a los cuales se les realizó un seguimiento.

Ya más recientemente Godino, Batanero & Font (2003, citado en Uicab, 2009) han clasificado los recursos para la enseñanza de las matemáticas en dos grupos: ayudas al estudio (libros, tutoriales, etc.) y materiales manipulativos enfocados en apoyar y potenciar el razonamiento matemático: manipulativos tangibles (concretos) y manipulativos gráfico-textuales-verbales. Las Tabletas Algebraicas clasifican como recurso manipulativo tangible debido al énfasis que se da a los elementos visuales y táctiles (forma, color, tamaño, longitudes).

### Raymond Duval. Representación semiótica

Duval (1999) plantea una teoría en la cual afirma que el libre tránsito entre las diferentes representaciones de un objeto matemático le permite al estudiante tener una mayor comprensión del mismo, además, "las representaciones semióticas[2] son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento" (Jiménez, Guantiva & Sánchez, 2011, p.2).

**Sistemas de representación.** Las configuraciones hechas con las *Tabletas Algebraicas*

[2]Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento (Duval, 1998a).

para representar los polinomios son consideradas, lo que Duval llama"[una] representación que facilita la interiorización de un objeto". Se utilizarán básicamente tres registros de representación: enactiva (representación utilizando las fichas de las *Tabletas Algebraicas*), físico (representación gráfica del polinomio con fichas) y simbólico-algebraico (escritura del polinomio en términos algebraicos y como producto de factores). De esta manera, se ofrece una alternativa al estudiante para interpretar la factorización de un polinomio dado por medio de manipulación geométrica y tangible de los términos del polinomio.

Duval menciona tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis: formación, tratamiento y conversión, de las cuales nos enfocaremos en las dos últimas. El tratamiento es una transformación que se da dentro de un mismo registro, como por ejemplo, expresar de diferentes maneras el polinomio $a^2 + 2ab + b^2$: con la manipulación de las fichas se espera lograr la transformación del polinomio original a expresiones como $(a + b)(a + b)$ o como $(a + b)^2$(que además es el orden en que se espera que se den las transformaciones). En el caso en el que el polinomio tenga dos formas diferentes de representarse con las fichas, por ejemplo, $12a^2 + 14ab + 4b^2$, pueden construirse dos rectángulos de longitudes de lados diferentes: uno de lados $(6a + 4b)$ y $(2a + b)$ y otro de lados $(3a + 2b)$ y $(4a + 2b)$. Al orientar al estudiante para que busque una configuración diferente, se realiza un tratamiento dentro del registro físico.

La otra actividad cognitiva es la conversión, una transformación externa relativa al registro de representación de partida, y que para el caso particular de las *Tabletas Algebraicas* permite realizar el cambio de registro físico a registro algebraico. Es importante resaltar que las tareas propuestas con el material implican varias conversiones: de registro algebraico a físico al asociar los términos del polinomio con fichas organizadas en rectángulo, de físico a algebraico cuando, con ayuda de la configuración, se obtienen los factores que dan origen al polinomio original.

**Aprehensión conceptual de un objeto.** Duval (1998) propone también el concepto de aprehensión conceptual de un objeto, de la cual afirma hay tres tipos: aprehensión perceptiva, en la cual se asocian elementos de la vida cotidiana con figuras geométricas; aprehensión discursiva, en la cual se asocian configuraciones identificadas con afirmaciones matemáticas; aprehensión operativa, el sujeto realiza una modificación a la configuración inicial. La aprehensión discursiva propicia el cambio en las dos direcciones entre lo que Duval llama anclaje visual (configuraciones identificadas) y anclaje discursivo (afirmaciones matemáticas), lo que se trabaja directamente mediante la manipulación del material y que sustenta el cambio de registro físico del polinomio dado por una configuración rectangular con las fichas (anclaje visual) a producto de factores representando el área del rectángulo formado anteriormente (anclaje discursivo).

## Metodología

Para el diseño de las tareas a proponer con el uso de las Tabletas algebraicas se realizó una fundamentación teórica, como la ya presentada y consulta de antecedentes relacionados con la idea original de combinar la geometría y el álgebra para la enseñanza del proceso de factorización, también se hizo un estudio acerca de la génesis de esta combinación en la historia de las matemáticas. El equipo de estudiantes elaboró el material de manera artesanal y propuso un conjunto de tareas que fueron inicialmente piloteadas con compañeros de la Licenciatura y que luego se implementaron en un colegio público de la ciudad de residencia de los talleristas.

Con el paso del tiempo se comunicó esta propuesta de enseñanza a profesores en formación inicial y continuada en un evento nacional de Educación Matemática en Colombia. Posteriormente esta idea se constituyó en un trabajo de grado que actualmente se adelanta.

En cuanto a la metodología del taller que se presenta aquí, la cual puede ser útil si se desea replicar el trabajo con los estudiantes, se propone que los participantes se organicen en parejas en un espacio que cuente con proyector multimedia (no se requiere laboratorio de computadoras). Para el desarrollo del taller, primero se hará una presentación del material departe de las talleristas a los participantes, con fichas de mayor área que las originales. A continuación se repartirá a cada pareja una hoja con una secuencia de tareas a desarrollar y un paquete de fichas; cada grupo irá resolviendo las actividades con orientación de las talleristas y principalmente con las instrucciones y definiciones proporcionadas en las guías. Finalmente, se hará una retroalimentación con los asistentes, por medio de una pequeña exposición de lo que se encuentra en el trasfondo del trabajo, es decir, la importancia del trabajo con materiales manipulativos. Se ha dividido la guía en cinco partes, las cuales corresponden a: reglas de manejo del material, construcción de configuraciones, representaciones equivalentes, áreas y factores reducibles.

Consideramos importante hacer un registro en hojas de las actividades propuestas para que las talleristas puedan verificar la comprensión de las reglas de manejo de material, la interpretación de longitudes y las definiciones. Las guías con las tareas contienen lo que se muestra a continuación.

**Reglas de manejo del material**

Primero se darán instrucciones y ejemplos para términos positivos de un polinomio.

**Unión de fichas.** Sólo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud.

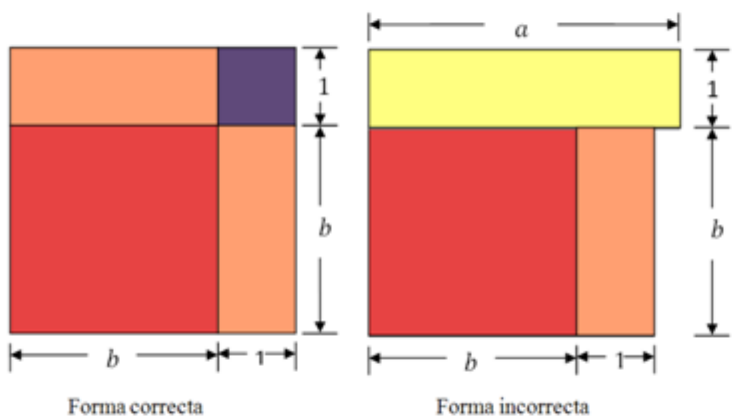


*Figura 2.*Ejemplo de unión de fichas

**Construcción de configuraciones**

El primer objetivo de cada configuración será formar rectángulos de tal manera que no queden espacios “en blanco” al interior del rectángulo. Una vez formado, se deben interpretar correctamente las longitudes de los lados necesarios (comúnmente llamados base y altura). Para esto, se sumará la longitud de cada “segmento” que compone el lado total, por ejemplo:

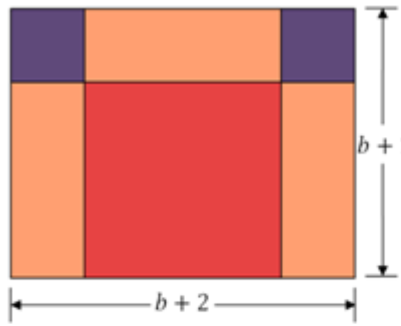


*Figura 3.*Ejemplo de interpretación de longitudes de lados

El anterior caso muestra la unión de 6 fichas, lo que indica que el polinomio era originalmente $b^2 + 3b + 2$. Acotados se encuentran los lados como suma de los segmentos que los componen: $b + 1$ y $1 + b + 1 = b + 2$.

**Sobreposición de fichas.** Para indicar que un término del polinomio es negativo se colocará sobre otra ficha de mayor área, siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados, por ejemplo:

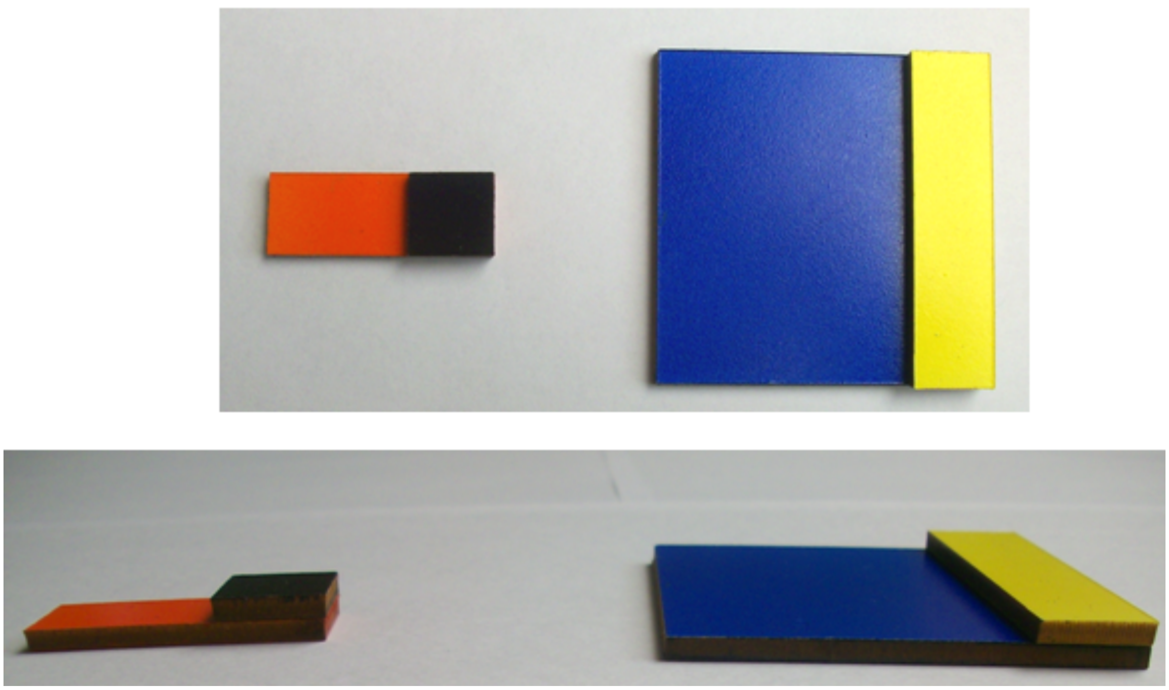

*Figura 4.*Ejemplo de sobreposición de fichas

En este caso, para representar el binomio $a^2 - a$, se coloca sobre una ficha de área $a^2$ una ficha de área $a$, y para conocer las longitudes de los lados se procede así:

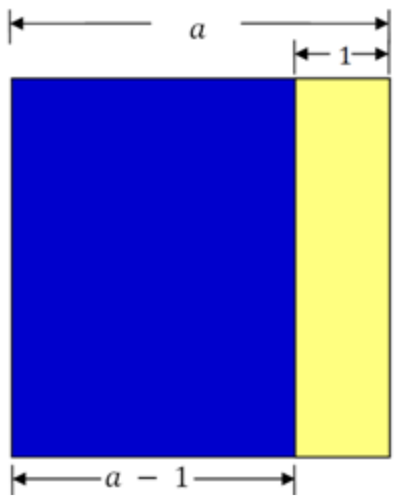


*Figura 5.*Ejemplo de interpretación de longitudes de lados donde aparecen términos negativos

¿Cuáles son las longitudes de los lados que tendría la configuración que representa el polinomio $a^2 - ab$?

**Representaciones equivalentes**

Con el fin de evitar la confusión entre posibles diferentes configuraciones del mismo polinomio, se exhorta al participante a definir representaciones equivalentes a partir de la siguiente imagen:

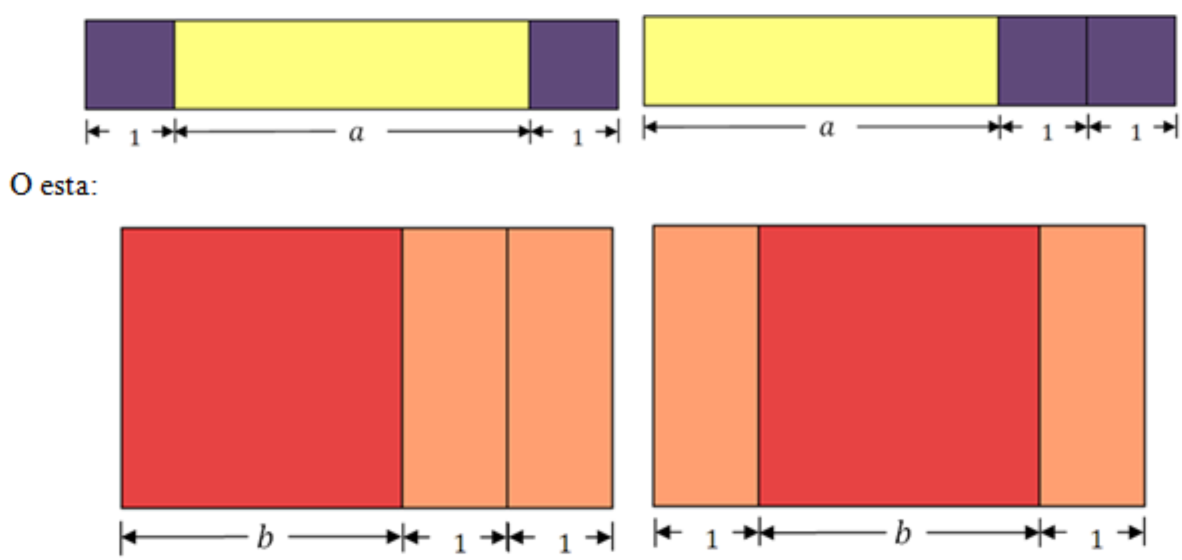


*Figura 6.*Ejemplos de representaciones equivalentes

Dos o más representaciones son equivalentes si las longitudes de los lados correspondientes entre éstas son iguales

**Áreas**

Recogiendo los pasos anteriores, esta sección se ocupa de construir la configuración con las Tabletas Algebraicas que representa un polinomio dado y encontrar la relación entre representación algebraica y geométrica.

Los participantes comenzarán representando con las fichas el polinomio $b^2 + ab + 3a + 3b$. Seguidamente, se tomará la longitud de los lados (llamados de ahora en adelante factores) asociados a base y altura del rectángulo formado. Se desarrollará el producto de dichos factores, es decir, encontrar el área del rectángulo compuesto por los términos del polinomio.

¿Cómo es la expresión algebraica en relación con el área de la representación geométrica?

Se propone expresar como producto de factores los siguientes polinomios:

- $4b^2 + 10b + 6$
- $2a^2 + 3ab + b^2 + 2b + 3a + 1$
- $a^2 + 2a - 15$
- $a^2 - 1$

Después de realizar los ejercicios propuestos y con base en lo presentado anteriormente, ¿Qué definición (parcial) de factorización daría?

**Factores reducibles**

Representar con las fichas el polinomio $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$ y expresarlo como producto de factores.

¿Existe más de una configuración (no equivalentes) con las fichas?

Como se obtienen dos pares de factores diferentes, $(a + 1)(2a + 2b)$ y $(a + b)(2a + 2)$, se debe decidir cuál par será el aceptado como resultado final del proceso de factorización. Para eso, se introduce la siguiente definición:

*Un factor es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes, con las tabletas.*

Es decir que cada factor se representará con las fichas:

| Par | Factores del par correspondiente | Configuración no equivalente # 1 | Configuración no equivalente # 2 |
|---|---|---|---|
| Primero | $(a + 1)$ | $1(a + 1)$ | |
| | $(2a + 2b)$ | $1(2a + 2b)$ | $2(a + b)$ |
| Segundo | $(a + b)$ | $1(a + b)$ | |
| | $(2a + 2)$ | $1(2a + 2)$ | $2(a + 1)$ |

*Tabla 1.*Estudio de los factores del polinomio $\mathbf{2a^2 + 2ab + 2a + 2b}$

Los factores irreducibles se identifican porque no se pudo obtener dos configuraciones no equivalentes con las fichas. Pero quedan factores reducibles, ¿Qué hacer con ellos?

Se escoge un par (con el otro par el proceso es análogo), por ejemplo, el primero. Como el segundo factor es reducible, se buscan los dos factores que le dan origen, de los cuales se escoge el que no tiene como factor a una de las variables (con coeficiente 1) o al 1.

Así, del primer par se tomarán los factores $a + 1$ (irreducible) y $2(a + b)$ (reducido).

Para el segundo par se tomarán los factores $a + b$ (irreducible) y $2(a + 1)$ (reducido).

Es evidente la equivalencia entre las respuestas anteriores, ya que el orden de los factores no altera el producto, entonces, la factorización correcta del polinomio $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$ es $2(a + 1)(a + b)$.

Si bien se puede enunciar desde el comienzo un caso de factor común, es importante mantener la relación geometría-álgebra y hacer notar que el concepto de factor irreducible tratado en esta actividad es abordable a través de representaciones físicas.

Para finalizar se propone realizar la factorización por medio de las Tabletas Algebraicas de los siguientes polinomios:

- $2b^2 + 6a + 2a^2 + 4ab + 6b + 4$
- $3b^2 + 9b + 6$

## Conclusiones

En general el material permite asignar sentido a la proceso de factorizar algunos polinomios utilizando representaciones enactivas, físicas y simbólico-algebraicas; naturalmente, como todo material físico, posee algunos limitantes, por lo cual solo se considera una alternativa para introducir la factorización de algunos polinomios de segundo grado.

Fue necesario crear una definición de factorización de polinomios, debido a que la definición de factorización usualmente utilizada se aplica polinomios con entradas en un campo, y el conjunto de polinomios que pretendemos manejar con el material no tiene sus coeficientes en un campo, por ello fue necesario crear una definición alternativa para "factor irreducible" (utilizando el material, como se mostró), basándonos en el documento de Zalamea (2007), quien escribe:

> Sea $P(x) \in A[x](A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}). P(x)$ es irreducible en $A[x]$ si y solo si P no puede descomponerse en un producto de dos polinomios en $A[x]$ de grado estrictamente menor: no existen $S, T \in A[x]$ tales que $P = ST,\ grad\ (S) < grad\ (P)\ y\ grad\ (T) < grad\ (P)$. (p. 137) [3]

La propuesta de taller que exponemos nos permite decir que no consideramos oportuno iniciar la enseñanza de la factorización de polinomios al modo de Al-Khwarizmi, o de "manera elemental" y tradicional partiendo de la repetición de "los casos de factorización", limitando la posibilidad de un trabajo simultáneo entre la geometría y el álgebra, integrando sus diversas representaciones, que son una herramienta poderosa para dotar de sentido conceptos matemáticos como la factorización, al interior de las mismas matemáticas.

Gracias al taller se puede verificar cómo se da la interacción entre participante y material manipulativo, las dificultades que emergen durante su manipulación y los aspectos que requieren ajustes.

Es importante resaltar que, aunque es altamente probable que los asistentes al taller no sean estudiantes de secundaria, sino docentes y personas en busca de alternativas de enseñanza, en este caso particular, de factorización, se busca ante todo lograr un proceso de retroalimentación que permita, por un lado, dar a conocer este tipo de estrategias relacionando geometría y álgebra a quien interese, y por otro lado recibir aportes que converjan a la mejora del material en pro de ofrecer herramientas "innovadoras" para la enseñanza de las matemáticas.

[3] Es importante resaltar que si el grado de $S$ o $T$ es cero, se contemplan lo valores constantes, que serán determinantes en el desarrollo del trabajo de grado.

## Referencias y bibliografía

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica [Versión electrónica]. Números, 71, 57-74.

Covas, M., Bressan, A. (2009). La enseñanza del álgebra y los modelos de área. Argentina: Fundación GEB.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *En Investigaciones en Educación Matemática II*. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, pp. 173-201. México.

Duval, R. (1999). Registros de representación, comprensión y aprendizaje. En semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Jiménez, S., Guantiva, D., Sánchez, D. (2011). Taller: uso de las Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Memorias 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (2), 574-584.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica [Versión electrónica]. Revista IRICE, 13.

Montoya, E., Montoya, J. (1999). Áreas mágicas (Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Morales, I., Sepúlveda, A. (2006). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. En: Memorias 3 XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas.

Uicab, G. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), 1007-1013.

Viviente, J. (1988). Geometría y/o Álgebra geométrica [versión electrónica]. Zubía, 6, 91-97.

Zalamea, F. (2007). Fundamentos de matemáticas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.