Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica

Claudia Flores Estrada
Adriana Gómez Reyes
Ángel Homero Flores Samaniego

RESUMEN

Un esquema de argumentación es el razonamiento que un individuo utiliza cuando explica, justifica o valida un resultado. Los esquemas de argumentación, para su estudio se clasifican en analíticos, empíricos, fácticos, simbólicos y autoritarios. Los esquemas analíticos se basan en un razonamiento deductivo y son la base de la demostración matemática. En el presente artículo se muestran los resultados de un experimento de enseñanza que tuvo como objetivos determinar los esquemas de argumentación de los integrantes cuando se enfrentan a actividades de geometría euclidiana en un ambiente de Geometría Dinámica; y ver el desarrollo de estos esquemas a lo largo del experimento. Se buscó respuesta a las preguntas: ¿Es posible pasar del uso de esquemas de argumentación no analíticos al uso de esquemas analíticos y, de ser así, cómo sería esta transición? ¿Los esquemas analíticos llevan a una demostración matemática, de qué manera?

Palabras clave: esquemas de argumentación, demostración matemática, geometría dinámica, experimento de enseñanza.

Esquemas da argumentação em atividades de Geometria Dinâmica

RESUMO

Um esquema da argumentação é um tipo de raciocínio que um indivíduo utiliza quando explica, justifica ou valida um resultado. Os esquemas de argumentação, para seu estudo, são classificados em analíticos, empíricos, factuais, simbólicos e autoritários. Os esquemas analíticos se fundamentam em um raciocínio dedutivo e são a base da demonstração matemática. No presente artigo, são apresentados os resultados de um experimento de ensino que teve como objetivos determinar os esquemas de argumentação dos participantes, quando enfrentam atividades de geometria euclidiana, em um ambiente de Geometria Dinâmica e observar o desenvolvimento destes esquemas ao longo do experimento. Buscou respostas às perguntas: É possível passar do uso de um esquema de argumentação não analítico ao uso de esquemas analíticos e, se for possível,

Claudia Flores Estrada, Maestra en Ciencias en Matemática Educativa, Jefa de la Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual, CECyT No. 5 "Benito Juárez García" IPN. Endereço para correspondência: Andador Florencia 103, Int 102 Unidad Habitacional Margarita Maza de Juárez CP 09330 Del. Iztapalapa, México D.F. E-mail: claudia.mo@gmail.com

Adriana Gómez Reyes, Maestra en Ciencias en Matemática Educativa, Profesora de asignatura CECyT 13, Ricardo Flores Magón", IPN, Área Básica. Profesora de asignatura CCH Sur, UNAM, área Matemáticas. Endereço para correspondência: Ejido Copilco # 20, Col. Sn. Fco. Culhuacán. CP 04420. Del. Coyoacán. México D.F. E-mail: orodelsilencio@yahoo.com.mx

Ángel Homero Flores Samaniego, Profesor de Carrera Titular B. CCH-UNAM. Area de matemáticas. Endereço para correspondência: Calzada de la Virgen 3000, Edif. 52, Dpto 19. U. Habitacional Los Culhuacanes. CP 04430. Delegación Coyoacan. Mexico, D.F. E-mail: ahfs@servidor.unam.mx

como seria essa transição? Os esquemas analíticos conduzem a uma demonstração matemática? De que maneira?

Palavras-chave: Esquemas de argumentação. Demonstração matemática. Geometria dinâmica. Experimento de ensino.

INTRODUCCIÓN

Actualmente la sociedad en que vivimos ha sufrido una serie de transformaciones que demandan una mejor preparación de nuestros jóvenes, si deseamos que se desempeñen con éxito en los ámbitos laboral y profesional.

En el ámbito de la educación matemática, a pesar de los esfuerzos que se han hecho por cambiar el enfoque de la enseñanza de esta importante disciplina, ésta se sigue enseñando de manera algorítmica y, principalmente, mediante conferencias magistrales en las que el profesor dicta su cátedra y el estudiante recibe, de manera pasiva, el mensaje que se le envía.

En particular, la educación matemática puede aportar a nuestros estudiantes el desarrollo, entre otras habilidades, de la capacidad de pensar matemáticamente haciéndolos más críticos y reflexivos. De acuerdo con Dewey (1989) el pensamiento reflexivo se da en un contexto de acción en forma de una concatenación de ideas, cada una de las cuales es consecuencia directa de la anterior. De este modo, la última idea es consecuencia o conclusión de las anteriores. Esta concatenación de ideas está en la base del razonamiento deductivo en el que se obtienen conclusiones particulares a partir de la aplicación de una premisa general.

En el presente artículo se hace una reflexión sobre la importancia del desarrollo de un razonamiento deductivo y el papel que juega la demostración matemática en tal desarrollo. Se hace un recuento de los esquemas de argumentación que utilizan estudiantes y profesores en la validación de resultados de actividades o problemas geométricos. Finalmente se presentan algunos de los esquemas de argumentación que fueron utilizados por los asistentes a un taller sobre geometría con ayuda del software de Geometría Dinámica, *The Geometer's Sketchpad*.

PENSAMIENTO REFLEXIVO Y LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN

En los diferentes currículos del Nivel Medio Superior o Bachillerato mexicano han habido reformas que apuntan a formar alumnos más críticos y reflexivos (Escuela Nacional Preparatoria, 1996, Colegio de Ciencias y Humanidades, 2003, Colegio de Bachilleres, 1993; Dirección General de Bachillerato: Bachillerato Tecnológico, 2004), principalmente a través de las competencias de pensamiento matemático y de razonamiento matemático. Estás dos competencias fueron definidas por Niss (2003).

- *Pensamiento Matemático* (dominio de modos matemáticos de pensar), que significa:

  ❖ Plantear preguntas características de la matemática y saber el tipo de respuestas (no necesariamente las respuestas mismas) que puede ofrecer la matemática;

  ❖ Extender el alcance de un concepto mediante la abstracción de algunas de sus propiedades y generalizando resultados a clases mayores de objetos;

  ❖ Diferenciar entre tipos de proposiciones matemáticas (incluyendo afirmaciones condicionales del tipo 'si..., entonces...', proposiciones con cuantificadores, suposiciones, definiciones, teoremas, conjeturas y casos especiales); y

  ❖ Entender y manejar el alcance y las limitaciones de un concepto dado.

- *Razonamiento matemático* que implica:

  ❖ Seguir y evaluar cadenas de argumentos planteadas por otros;

  ❖ Saber qué es una prueba matemática (o qué no lo es) y en qué difiere de otros razonamientos matemáticos como la heurística.

  ❖ Descubrir las ideas básicas de una línea de argumentación dada (en particular una prueba), incluyendo la diferenciación entre líneas principales y detalles, e ideas y tecnicismos; y

  ❖ Formación de argumentos matemáticos formales e informales y la transformación de argumentos heurísticos en pruebas válidas, esto es, demostrar proposiciones.

Consideramos que la definición de Dewey de pensamiento reflexivo apunta a la adquisición de estas competencias y sería la base para el desarrollo de un pensamiento crítico. Según este autor (DEWEY, 1910, p.3-5), el pensamiento reflexivo es una secuencia de ideas de las cuales una de ellas lleva a la siguiente, cada ideas es un paso que lleva de algo a algo (cada paso se conoce como término), cada término deja un depósito que es utilizado en el siguiente, de forma que se tiene una especie de flujo que lleva a una conclusión. Además el pensamiento reflexivo apunta hacia el conocimiento y las creencias de la persona en hechos y verdades; induce la aceptación o el rechazo de creencias en un cierto hecho como *razonablemente probable o improbable.* En esta aceptación o rechazo de creencias se consideran las bases en las cuales descansan y sus consecuencias. Esto último constituye la base del pensamiento crítico.

Según nuestro punto de vista, un pensamiento crítico y reflexivo en los estudiantes se puede lograr a partir del desarrollo de un razonamiento deductivo y de la capacidad para resolver problemas, lo anterior haciendo uso de la tecnología.

Desde el ámbito de la enseñanza de la matemática, es posible acceder al razonamiento deductivo a través de la enseñanza de la demostración matemática, como lo plantea Fawcett en la obra *Thenature of Proof* (FAWCET, 1938 apud MCGIVNEY; DE FRANCO, 1995), donde se afirma que el propósito del estudio de la demostración geométrica es cultivar el *pensamiento crítico y reflexivo*; después de una encuesta sobre la enseñanza de la geometría, el estadounidense Tercer Comité sobre Geometría llegó a la conclusión de que [...]

> [...] hay un acuerdo casi unánime en que la geometría demostrativa puede enseñarse de manera tal que desarrolle el poder de razonar lógicamente con más rapidez que otras materias escolares, y que el grado de transferencia de este entrenamiento lógico a situaciones fuera de la geometría es una medida justa de la eficacia de la instrucción. Sin embargo, la mayoría de los participantes se inclinan hacia una misma opinión: la pregunta, ¿los maestros de geometría por lo general enseñan de manera tal que se asegura la transferencia de aquellos métodos, actitudes y apreciaciones que comúnmente se dice que son más fáciles de transferir?, provoca un casi unánime y desencantado 'No'. (MCGIVNEY; DE FRANCO, 1995, p.552)

En México podríamos decir algo parecido: en los programas de matemática de los niveles básico, medio y medio superior no se privilegia el uso del razonamiento en la resolución de problemas ni en la validación de conjeturas. La mayoría de los programas de matemática básica del país (niveles primaria, secundaria y bachillerato) se basan en la resolución de problemas y en un uso más práctico y menos abstracto de la matemática, pero poco se dice de la formación de conjeturas y su validación y del desarrollo de esquemas de argumentación en los estudiantes.

En el mejor de los casos, el razonamiento deductivo y la demostración se plantean como temas puntuales a estudiar en algunos programas de matemática de bachillerato. Pero su estudio es más como una cuestión informativa sobre cómo está estructurada teóricamente la matemática y cómo procede un matemático cuando se hace una demostración o como una manera de formalizar el conocimiento matemático. Esto se hace, generalmente, en el contexto de la geometría euclidiana (FLORES, 2007, p.8-9), y en contraposición a la recomendación hecha en el libro del profesor de secundaria correspondiente a la reforma de 1993 según la cual se debe poner énfasis

> [...] [en] la iniciación gradual al razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor y teniendo en cuenta que el acceso a la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere tiempo y una preparación cuidadosa. (ALARCÓN et al., 1994, p.225)

Entre las dificultades para tener una comprensión cabal de la demostración matemática y su papel en la argumentación en el ámbito de la disciplina, y fuera de ella, se tienen las siguientes (ALIBERT; THOMAS, 1991; BALACHEFF, 2000, BATTISTA; CLEMENTS, 1995; DUVAL, 1991; FLORES, 2007; FUYS, GEDDES; TISCHLER,

1988; HOYLES; JONES, 1998; MARIOTTI, 1997; MOORE, 1994; RADFORD, 1994; SENK, 1985):

- La concepción de matemáticas de profesores y estudiantes, en particular con respecto a la validación del conocimiento matemático, tanto el del propio docente como el de sus alumnos. En la mayoría de los casos, el conocimiento matemático se valida mediante los resultados de una prueba: si el resultado es bueno, podemos decir que el estudiante ha aprendido matemática; mientras que el conocimiento del profesor casi nunca se pone en duda y, por tanto, no es necesario validarlo.
- La transición de una matemática práctica a una matemática formal; esto en términos de la "formalidad" y el rigor que debe tener la matemática escolar, en contraste con la matemática que el alumno ha aprendido en niveles escolares inferiores y en ámbitos no escolarizados. Como mencionamos, la mayoría de los programas de matemáticas tienden a ver la matemática desde un punto de vista más práctico a partir de la resolución de problemas, pero la manera de hacerlo es muy automática y, por lo general se sigue una especie de algoritmo de resolución de problemas, como los pasos definidos por Polya (1989). La formalidad en la matemática se deja para niveles superiores o se habla de ella como una mera curiosidad, utilizando un lenguaje por lo demás hermético para el estudiante.
- La forma en que se plantea su enseñanza en los diferentes programas de matemáticas. Por lo general, como un tema a tratar de manera puntual y aislada en un cierto momento del programa: el razonamiento deductivo no se plantea como una habilidad a desarrollar en los alumnos, sino únicamente como el método que usan los matemáticos para demostrar conjeturas y, como tal, es un tema más a enseñar cuya importancia es meramente informativa y secundaria.
- La calidad del conocimiento matemático del profesor sobre la materia que se pretende enseñar. Debido a la forma de capacitación y formación de profesores en México, no es sorprendente que el nivel de dominio de la matemática de nuestros docentes sea baja, por lo general limitada a lo que se dice en el programa. Recientemente se han abiertos algunos postgrados en Matemática Educativa y Educación Matemática en universidades públicas y privadas, pero en estos postrados no cambia la forma algorítmica y tradicional de enseñar matemática; así pues, se concibe a la matemática como una serie de *recetas* que se deben aplicar en determinados momentos.
- La capacidad de los profesores de matemática para utilizar un razonamiento deductivo en la argumentación matemática y su habilidad para realizar demostraciones matemáticas. El docente de los niveles básicos no utiliza dicha capacidad como parte de su argumentación en el aula y para validar conjeturas. Cuando se trata de llevar a cabo una demostración es común que haya una confusión entre la hipótesis y la conclusión o que se recurra a una explicación empírica para mostrar la validez de sus conclusiones.

Otro aspecto que no podemos dejar de lado en la educación matemática es el uso de tecnología, especialmente la Tecnología de la Información y la Comunicación, y el Software Educativo. Así, el uso de Software Dinámico proporciona al estudiante (y al usuario en general) una oportunidad para desarrollar un pensamiento reflexivo en un contexto teórico (HOYLES; JONES, 1998; SUTHERLAND, OLIVERO; WEEDEN, 2004; HANNA, 2000; PRESSMEG, 1999; FURINGHETTI; PAOLA, 2003). La función de arrastre de los programas de Geometría Dinámica constituye, en un principio, una forma de probar la corrección de una construcción; cuando se utiliza la función de arrastre habitualmente, como parte de actividades interpersonales, su función puede cambiar a la de un signo o herramienta psicológica) que se refiere a un significado, el *significado de la corrección teórica de la figura*. (MARIOTTI, 2000, p.36-37).

Según Straesser (2001, p.332):

> El uso de la Geometría Dinámica amplía la gama de construcciones geométricas y soluciones accesibles. Si esta herramienta se convierte en instrumentos de uso diario en manos y mente del usuario, le ampliará la gama de actividades posibles, le proporcionará una ruta de acceso a reflexiones más profundas y a exploraciones y heurísticas más refinadas que las que se pueden obtener con la geometría de papel y lápiz.

Una manera de hacer que la Geometría Dinámica propicie el desarrollo de un razonamiento deductivo es a través de actividades de exploración (INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL [IPN], 2006; FLORES; GÓMEZ, 2009) en las que se propicie la formulación de conjeturas y la realización de exploraciones que representen los casos posibles. Las actividades son de tipo inductivo y pueden dar lugar a preguntas que exijan una demostración, como resultado de sus exploraciones.

En la mayoría de este tipo de actividades, los estudiantes se ven en la necesidad de explicar el porqué sus conjeturas son ciertas o porqué su construcción funciona, es decir, se pone en juego un patrón de validación (BROUSSEAU, 1997) en donde el estudiante se ve en la necesidad de validar sus resultados ante otro estudiante o ante el profesor.

ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN Y EL USO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

En el proceso de validación, el estudiante pone en juego lo que denominamos Esquemas de Argumentación, entendidos como la forma en que un individuo utiliza su razonamiento durante una Práctica Argumentativa; y esta última queda definida como el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema (FLORES, 2007, p.47-49).

Los esquemas de argumentación pueden ser:

- Autoritarios. Las argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna *autoridad*. puede ser un libro de texto, el instructor del curso u otro compañero.
- Simbólicos, El estudiante utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
- De recuento fáctico o simplemente fácticos. en los que el profesor hace un recuento de lo que hizo a manera de explicación o justificación de algún resultado. El estudiante expone una serie de pasos a manera de algoritmo.
- Empíricos. El estudiante se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo o el hecho físico constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- Analíticos. El estudiante sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida. Las proposiciones de este tipo de esquema se pueden estructurar en oraciones *si..., entonces...*

Consideramos que los esquemas analíticos pueden aterrizar en una demostración o prueba matemática. En este artículo entenderemos por prueba o demostración como la práctica argumentativa que utiliza esquemas analíticos válidos que concluyen en el resultado que se está argumentando. Si lo anterior se lleva a cabo en un contexto matemático, diremos que se trata de una prueba o demostración matemática. Es decir, una demostración o prueba matemática es el resultado de una argumentación analítica en el ámbito de la teoría matemática que, partiendo de premisas válidas, llega a una conclusión válida.

El uso de la Geometría Dinámica, en especial de su función de arrastre, está estrechamente ligada a los esquemas de argumentación que utiliza un individuo, por ejemplo, es muy probable que un estudiante que utiliza esquemas empíricos, use el software de Geometría Dinámica para corroborar sus resultados, midiendo y usando la función de arrastre para mostrar hechos; o que una persona que usa un esquema analítico utilice la función de arrastre para explorar su construcción en busca de regularidades o patrones que le expliquen el porqué de su conjetura (FLORES 2007, 2009). Cuando se hace una construcción en un software de geometría dinámica, por ejemplo un rectángulo, la construcción debe pasar lo que llamamos la prueba del arrastre: al arrastrar los elementos del rectángulo éste cambia de tamaño, de ubicación o de orientación pero conserva siempre sus características de rectángulo. Si deja de serlo, decimos que no pasó la prueba del arrastre. Así, al aplicar la prueba del arrastre en construcciones más complejas es posible darse cuenta de hechos que no estaban contemplados y formar así una conjetura. En individuos que utilizan esquemas analíticos se ha visto que usan la prueba del arrastre para buscar una validación de sus conjeturas (FLORES 2007, p.99-106).

También es posible mejorar la capacidad de razonamiento del estudiante como se evidenció en el estudio de Dalcín (2004) quien encontró que estudiantes de bachillerato del Uruguay tuvieron un mejor desempeño en actividades de construcción y exploración geométrica realizadas con Geometría Dinámica que sin ésta. Como parte de las conclusiones de su investigación comenta:

> El trabajo en un ambiente de Geometría Dinámica facilita la construcción de representaciones de los problemas, permitiendo la exploración empírica, donde el estudiante puede ir estableciendo relaciones entre sus observaciones y su inmediata verificación empírica, descartando conjeturas o reformulándolas, pudiendo alcanzar de esta manera una fuerte convicción acerca de la veracidad de una conjetura de esta manera construida, condición imprescindible para iniciar la búsqueda de una explicación. Sostenemos que plantear actividades donde esté presente la formulación de conjeturas contribuye a que los estudiantes se comprometan en buscar explicar por qué dicha conjetura es válida, en elaborar una prueba. (DALCÍN, 2004, p.77-78)

Así pues, es posible que un estudiante acceda al razonamiento deductivo a través de actividades de exploración en un ambiente de Geometría Dinámica.

Como parte de las indagaciones que nos hemos propuesto está la búsqueda de respuesta a las preguntas: ¿Cómo se puede fomentar un razonamiento deductivo a través de actividades de exploración? ¿Es posible pasar de esquemas no analíticos de argumentación a esquemas analíticos y cómo sería esta transición?

EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En lo que resta del artículo presentaremos los resultados de un experimento de enseñanza llevado a cabo con estudiantes de licenciatura y profesores en activo, todos involucrados en la enseñanza de la matemática.

Un experimento de enseñanza, según Steffe y Thompson (2000), es principalmente una herramienta conceptual, que los investigadores usan como herramienta exploratoria, dirigida a entender el progreso de los estudiantes.

> ...es simplemente una forma de indagación auto-reflexiva, llevada a cabo por los participantes en situaciones sociales. Esto con el fin de mejorar la racionalidad y la justicia de su propia práctica, su entendimiento y las situaciones en que ésta se realiza. (CARR; KEMMIS, 1986, p.162 apud FLORES, 2007)

Esta forma de hacer investigación educativa podría ser, según Flores (2007), el vehículo para hacer que los profesores enfoquen su práctica docente de modo que conduzca a una consideración crítica del currículo vigente, y del proceso de enseñanza aprendizaje en general.

Un experimento de enseñanza (STEFFE, 1983 apud STEFFE; THOMPSON, 2000) involucra secuencias de episodios de enseñanza. En estos episodios se involucra un agente de enseñanza (profesor), uno o varios estudiantes, un testigo y un método para recordar lo que sucede (notas del observador, grabaciones, etcétera). Con estos episodios se establecen protocolos para su análisis posterior a la sesión. Un objetivo principal de un experimento de enseñanza es establecer un modelo vivo de la matemática de los estudiantes que se muestra en estos protocolos.

El desarrollo de cada sesión del taller que aquí se reporta correspondió a un episodio, como lo describen Steffe y Thompson (2000), donde participó el ponente del taller y los profesores asistentes, teniendo como evidencia las hojas de trabajo diseñadas con anticipación, y las observaciones planteadas por los participantes en las bitácoras realizadas durante el mismo curso.

El taller se tituló *Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica* y constó de tres sesiones de hora y media cada una. Lo integraron 16 asistentes entre estudiantes de licenciatura y profesores de matemática en activo, en su mayoría, de bachillerato. La mayoría de los asistentes conocían el uso de algún software de Geometría Dinámica.

Las actividades fueron desarrolladas en equipos de tres o cuatro y tuvieron el apoyo del software *TheGeometer'sSkecthpad*. El uso de del software implica que el asistente tenga la capacidad de arrastrar sus construcciones para probar si son correctas y hacer exploraciones dinámicas de las mismas. Esta capacidad facilita el uso de esquemas de argumentación. Lo anterior permite tener una mejor visión de la situación geométrica y una mayor certeza de las conjeturas que se forman en el proceso de construcción.

OBJETIVOS DEL EXPERIMENTO

El objetivo del experimento fue encontrar qué esquemas de argumentación utilizan los asistentes y cómo el desarrollo de las actividades lleva al estudiante a considerar el uso de esquemas analíticos. Estos objetivos buscan encontrar una respuesta a la pregunta:

¿Es posible pasar del uso de esquemas no analíticos de argumentación al uso de esquemas analíticos y, de ser así, cómo sería esta transición? ¿Los esquemas analíticos llevan a una demostración matemática, de qué manera?

Implícitamente se tenía el objetivo de hacer reflexionar a los asistentes sobre la importancia del razonamiento deductivo y la argumentación en el estudio de la matemática y cómo diseñar actividades encaminadas al desarrollo de esquemas analíticos.

Para determinar qué esquemas de argumentación utilizaban los asistentes, las actividades y su puesta en práctica estuvo encaminada a propiciar una explicación de las construcciones y de las conjeturas que se hicieran al buscar dicha explicación o en la construcción misma. En tales explicaciones es posible determinar los esquemas de argumentación se utilizan. El interés se centra en la producción del grupo como tal, por lo que no nos enfocamos a un estudio de casos, sino que hicimos el análisis de las respuestas de todo el grupo. En este artículo se reportan sólo las actividades que, a criterio de los autores, muestran mejor lo esquemas utilizados.

DESARROLLO

El experimento se inició con una exposición, por parte del instructor, de los esquemas de argumentación que se utilizan durante una práctica argumentativa. Después se realizó una actividad de construcción con la que se pondrían de manifiesto los esquemas de argumentación de los asistentes; la actividad se llevó a cabo en equipos. El resto del taller, en las sesiones siguientes, se dedicó a trabajar en equipo las actividades diseñadas para cada sesión. En total fueron cuatro actividades.

El papel del instructor consistió en monitorear las actividades de cada equipo, responder dudas y dar sugerencias de cómo proceder en caso de ser necesario. El ambiente que se propició en el taller se basa en los lineamientos del modelo de enseñanza, *Aprender matemática, Haciendo Matemática* (FLORES, 2007)

Actividad 1. Construye un cuadrado y justifica tu construcción.

La actividad se llevó a cabo sin el uso de la computadora. La intención de este ejercicio es ver qué recursos tienen los asistentes para construir figuras geométricas y si conocen una manera de construir un cuadrado. Al pedir que justificaran su construcción se esperaba que argumentaran sobre el porqué su construcción es efectivamente un cuadrado y mostraran sus esquemas de argumentación. Esta actividad se llevó a cabo en la primera sesión.

Actividad 2. Construye un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en el punto medio. ¿Qué tipo de cuadrilátero es? Explica tu respuesta.

En esta actividad sí se tuvo el apoyo del software. El objetivo de este ejercicio es que se formara una conjetura y después buscar su validación. Ésta debería estar incluida en la explicación de la respuesta. La actividad se hizo en la segunda sesión.

Actividad 3. En un círculo cualquiera traza una cuerda. ¿Qué característica común tienen las mediatrices de las cuerdas de un círculo? Explica tu respuesta.

Aquí la intención es que el asistente recuerde los conceptos de cuerda y mediatriz y exploren con el software la propiedad que tienen las mediatrices de un círculo, a saber, que todas se intersecan en el centro del círculo. Al igual que en las anteriores actividades, al pedir que se explique la respuesta se espera que la validen usando esquemas de argumentación analíticos. La actividad se llevó a cabo también en la segunda sesión.

Actividad 4. Construye un círculo y oculta su centro. ¿Cómo puedes construir el centro del círculo utilizando sólo las herramientas de *Sketchpad*? Explica por qué tu respuesta es correcta.

Esta actividad se llevó a cabo en la última sesión y su objetivo es que los asistentes conectaran lo visto en la sesión anterior y lo aplicaran. En la explicación debería estar la justificación de la construcción.

En la siguiente sección analizaremos algunos resultados de las actividades y adelantaremos algunas conclusiones. Cabe aclarar que la mayoría de los reportes de las hojas de trabajo están a lápiz, por lo que al escanearlos se perdió mucha definición. Por tal motivo se decidió reproducir parte del texto con el riesgo de redundar un poco.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Actividad 1. Los esquemas mostrados en la primera actividad son de dos tipos, de recuento fáctico (4) y analíticos (3). Ninguno de los esquemas analíticos constituye una demostración. A continuación presentamos la trascripción de un esquema fáctico y uno analítico.

Esquema Fáctico:

En este caso, la hoja de trabajo fue entregada por dos asistentes (Figura 1). En la primera parte aparece un dibujo del cuadrado y las líneas auxiliares (parte baja de la primera parte de la hoja). Esto corresponde a la construcción.

En la segunda parte se consigna la justificación de la construcción que está en los siguientes términos.

1. Segmento

2. Circunferencia con radio A con centro O

3. Perpendicular a A y que pase por O.

4. Paralela a A que pase por intersección de P_1 con la circunferencia

5. Perpendicular de A en el otro punto.

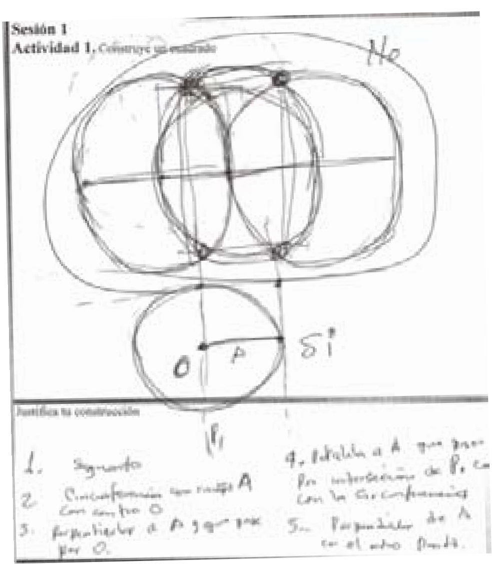


FIGURA 1 - Esquema Fáctico.

La justificación es sólo el recuento de los pasos que siguió para hacer la construcción. Hay algunas inconsistencias como el nombrar A al segmento y usar también mayúsculas para nombrar a los puntos, esto crea cierta confusión al momento de interpretar el dibujo. Para hacer la construcción se basa en el hecho de que los lados del cuadrado son congruentes y forman ángulos internos de 90º. Tal vez cabría esperar que en la justificación los pasos a seguir llevaran a la construcción del cuadrado sin tener que leer entre líneas. Por ejemplo en el paso cuatro debemos suponer que antes marcamos las intersecciones de la circunferencia con la perpendicular al segmento que pasa por O, y que una de esas intersecciones es P_1, pero el cuadrado de la construcción no toma en cuanta este punto sino el de la otra intersección, es decir, P_1 debe ser el que está arriba del segmento y no el marcado en el dibujo.

Esquema Analítico:

En este caso (Figura 2), el cuadrado es el auxiliar para hacer la descripción de la construcción. A grandes rasgos lo que se hizo fue trazar un segmento y su mediatriz (que pasa por los puntos C y D que están arriba y abajo del segmento). Toma el punto de intersección de la mediatriz con el segmento como centro de una circunferencia que pasa por los extremos del segmento. Une estos extremos con las intersecciones de la mediatriz y la circunferencia, obteniendo así un cuadrado.

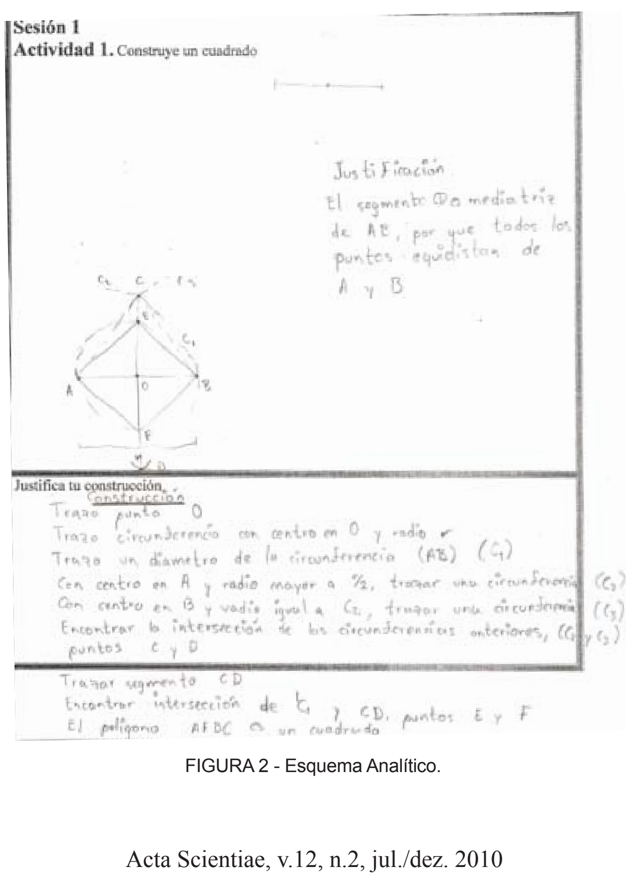


FIGURA 2 - Esquema Analítico.

La justificación está en la parte superior derecha de la figura y su trascripción es la siguiente:

Justificación

El segmento CD es mediatriz de AB, por que todos los puntos equidistan de A y B.

El esquema utilizado es analítico, podríamos parafrasearlo del siguiente modo: Si los puntos equidistan de A y B, entonces el segmento CD es mediatriz de AB. Sin embargo, la argumentación tiene poco que ver con la justificación de la construcción. Tal vez podría ser sólo el principio de ésta.

Debido al tipo de actividad, era de esperarse que no aparecieran otros tipos de esquemas, ya que no se tenían instrumentos de medición. Es de notarse que, a pesar de que se utilizó la palabra justificación, no se diera una real justificación de la construcción.

Después de la exposición acerca de los esquemas de argumentación y su discusión, en las actividades se dieron principalmente esquemas analíticos, aunque no todos llegaron a la justificación de los resultados. A continuación mostramos algunos resultados de las siguientes actividades.

Actividad 2. Esta actividad se llevó a cabo en la segunda sesión, después de la exposición sobre esquemas y el análisis de los resultados de la primera actividad. La comunicación entre los equipos, ahora, fue más fluida, esto se nota en que casi todos los equipos hicieron la misma construcción: tomaron dos círculos concéntricos y un diámetro de cada círculo como las diagonales que se cortan en sus puntos medios. Después unieron los extremos de los diámetros para formar el cuadrilátero. A continuación usaron la función de arrastre del programa para ver qué tipo de figura se había formado. Llegaron a la conclusión de que se trata de un paralelogramo.

Los esquemas que se presentaron son, en su mayoría, analíticos.

El siguiente es un esquema analítico que podríamos considerar una demostración de la conjetura de que el cuadrilátero es un paralelogramo. Figura 3.

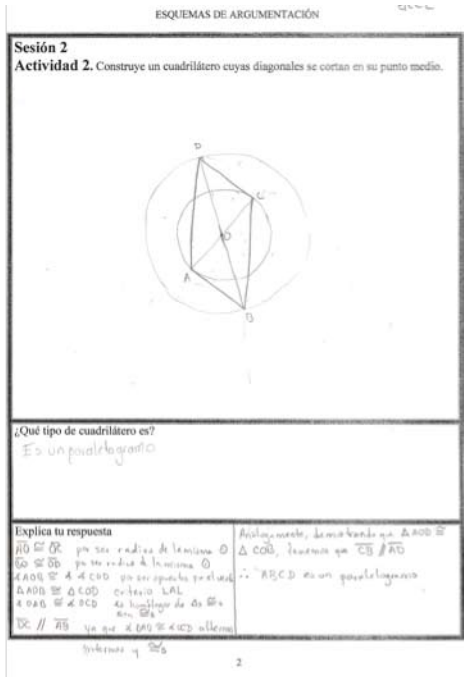


FIGURA 3 - Esquema Analítico.

La construcción se hizo en los términos comentados anteriormente. El diámetro menor es el segmento AC y el mayor es BD, el punto de intersección de los dos diámetros es O.

La explicación de la respuesta fue la siguiente:

AO $\cong$ OC Por ser radios de la misma circun.

AO $\cong$ OC Por ser radios de la misma circun.

$\angle$AOB $\cong\angle$AOB Por ser opuestos por el vert.

ΔAOB $\cong\Delta$AOB Criterio LAL

$\angle$OAB $\cong\angle$OCD $\angle$s homólogos de Δs $\cong$sson$\cong$s

DC // AB ya que $\angle$DAB $\cong\angle$OCD alternos internos y $\cong$

Análogamente, demostrando que ΔAOD $\cong\Delta$COB, tenemos que CB // AD

$\therefore$ ABCD es un paralelogramo

Con excepción de última línea en donde debería decir "*ya que $\angle$OAB $\cong\angle$OCD alternos internos y* $\cong$, la línea de argumentación es correcta y podemos decir que hizo una demostración matemática de su conjetura.

En el siguiente esquema es difícil seguir la argumentación.

La figura no tiene rótulos y la explicación está en los siguientes términos (Figura 4):

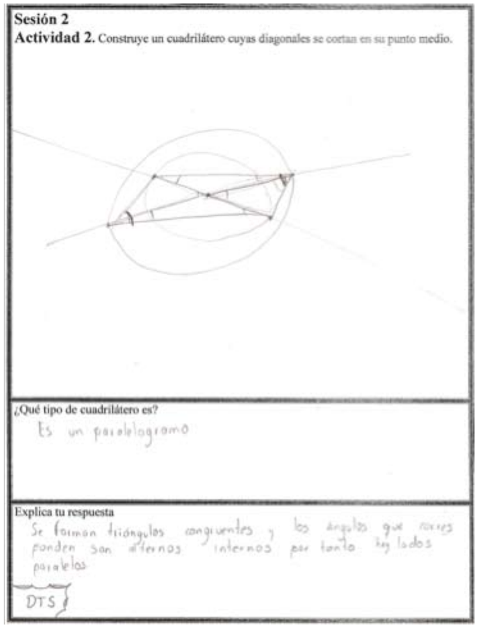


FIGURA 4 - Esquema Analítico.

Se forman triángulos congruentes y los ángulos que corresponden son alternos internos por tanto hay lados paralelos.

En una revisión somera de lo consignado se podría decir que se trata de un esquema analítico, pero también podría ser un esquema simbólico. La actividad fue hecha por una sola persona, tal vez obtuvo de otros equipos la forma de hacer la construcción y cuál podría ser el camino para explicar la respuesta. En este caso hubiera sido útil hacer una entrevista al autor de la hoja de trabajo.

Un tercer esquema muestra la construcción de un cuadrilátero a partir de dos segmentos congruentes y perpendiculares entre sí que se cortan en sus puntos medios. La conclusión es que el cuadrilátero es un rombo. En la correspondiente hoja de trabajo no hay dibujos auxiliares y la explicación es la siguiente:

Utilizamos congruencia de triángulos para verificar las longitudes iguales del cuadrilátero.

El esquema cae en la misma situación que el presentado previamente.

Actividad 3. Con respecto a la Actividad 3 presentamos dos esquemas, uno empírico y el otro analítico.

Esquema empírico:

La respuesta fue la esperada, las mediatrices de las cuerdas de un círculo pasan por el centro.

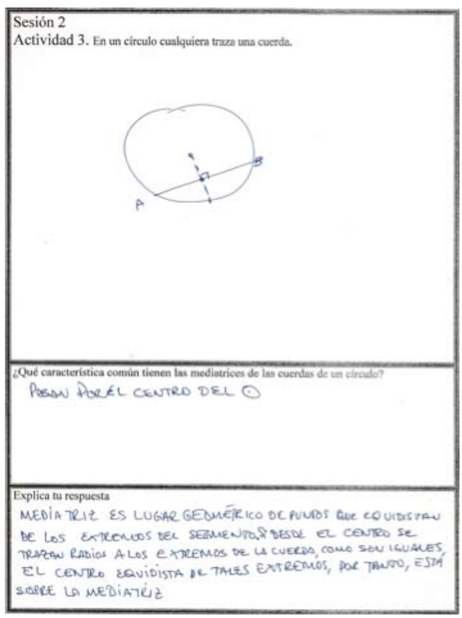
La explicación de la respuesta fue la siguiente:

Las perpendiculares mediatrices de las cuerdas de un círculo pasan por el centro, lo vimos en pantalla.

Aquí lo que se obtuvo con el software es suficiente para decir que la conjetura es verdadera. Podría decirse también que tenemos en combinación con el esquema empírico uno simbólico cuando se dice "las perpendiculares mediatrices". Con decir mediatrices ya se está implicando la perpendicularidad.

Esquema analítico:

La explicación, en este caso, de porqué las mediatrices pasan por el centro es la siguiente (Figura 5):


Sesión 2
Actividad 3. En un círculo cualquiera traza una cuerda.

A
B

¿Qué característica común tienen las mediatrices de las cuerdas de un círculo?

PASAN POR EL CENTRO DEL ⊙

Explica tu respuesta

MEDIATRIZ ES LUGAR GEOMÉTRICO DE PUNTOS QUE EQUIDISTAN DE LOS EXTREMOS DEL SEGMENTO, SI DESDE EL CENTRO SE TRAZAN RADIOS A LOS EXTREMOS DE LA CUERDA, COMO SON IGUALES, EL CENTRO EQUIDISTA DE TALES EXTREMOS, POR TANTO, ESTÁ SOBRE LA MEDIATRIZ

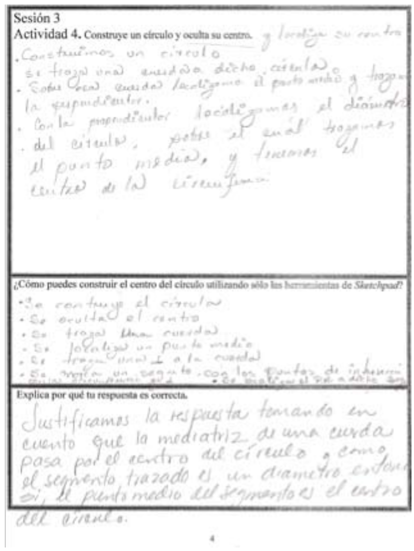
FIGURA 5 - Esquema Analítico.

Mediatriz es el lugar geométrico de puntos que equidistan de los extremos del segmento. Si desde el centro se trazan radios a los extremos de la cuerda, como son iguales, el centro equidista de tales extremos, por tanto, está sobre la mediatriz.

Claramente se trata de una demostración matemática de por qué la mediatriz de una cuerda pasa por el centro.

Actividad 4. En esta actividad se presentaron seis esquemas, cinco de ellos analíticos. En los esquemas analíticos se tomaron dos cuerdas (no paralelas) y trazaron el centro como su intersección. El argumento se basaba en lo encontrado en la actividad anterior. De estos cinco, sólo dos apuntaron el hecho de que las cuerdas usadas no deben ser paralelas, pues entonces las mediatrices coinciden.

En el sexto trabajo el procedimiento fue distinto (Figura 6). Sobre el círculo trazaron una cuerda y su mediatriz. Ubicaron el diámetro por el que pasa la mediatriz, su punto medio es el centro.


Sesión 3

Actividad 4. Construye un círculo y oculta su centro. y localiza su centro

- Construimos un círculo
  se trazo una cuerda a dicho círculo.
- Sobre esa cuerda localizamos el punto medio y trazamos la perpendicular.
- Con la perpendicular localizamos el diámetro
- del círculo, sobre el cual trazamos el punto medio, y tenemos el centro de la circunferencia

¿Cómo puedes construir el centro del círculo utilizando sólo las herramientas de *Sketchpad*?

- Se construye el círculo
- Se oculta el centro
- Se traza una cuerda
- Se localiza un punto medio
- Se traza una ⊥ a la cuerda
- Se traza un segmento con los puntos de intersección

Explica por qué tu respuesta es correcta.

Justificamos la respuesta tomando en cuento que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo y como el segmento trazado es un diametro entonces si, el punto medio del segmento es el centro del círculo.

FIGURA 6 - Esquema Analítico.

La explicación de por qué la respuesta es correcta es la siguiente:

Justificamos la respuesta tomando en cuenta que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo y como el segmento trazado es un diámetro entonces si, el punto medio del segmento es el centro del círculo.

Los integrantes de este equipo, en su razonamiento, no tomaron en cuenta que para ubicar el diámetro se necesita el centro del círculo que es lo que se quería encontrar.

En la Tabla 1 presentamos el número de esquemas analíticos y no analíticos utilizados en las explicaciones de las construcciones. Por demostraciones nos referimos a aquellos esquemas analíticos que llevan a una justificación del resultado. Por ejemplo, en la Actividad 2, de cinco esquemas analíticos tres llevaron a una justificación o demostración del resultado.

Actividad	Esq. No Analíticos	Esquemas Analíticos	Demostraciones
1	4	3	0
2	1	5	3
3	1	4	3
4	0	6	5

TABLA 1 – Esquemas de argumentación y demostraciones por actividad.

En la Tabla 1 es posible ver el desarrollo de los esquemas a lo largo de las 4 actividades. Al principio loa esquemas fueron todos no analíticos, mientras que al final todos los fueron y en su mayoría llevaron a una demostración matemática.

CONCLUSIONES

El estudio de los esquemas de argumentación en profesores y estudiantes nos proporciona claves sobre la forma de razonar y argumentar en tareas matemáticas y de qué manera es posible fomentar el uso de esquemas analíticos que, eventualmente, llevarían a realizar demostraciones o pruebas matemáticas. En este sentido, el experimento de enseñanza nos muestra que es posible alentar el uso de esquemas analíticos y desarrollar un razonamiento deductivo si se diseñan secuencias de actividades abiertas en las que se pida la explicación de la veracidad de los resultados. Por consiguiente podemos responder de la siguiente manera a las dos preguntas de investigación que nos planteamos.

¿Es posible pasar del uso de esquemas no analíticos de argumentación al uso de esquemas analíticos y cómo sería esta transición? Sí es posible propiciar esta transición, un posible camino es a través del desarrollo de esquemas empíricos con ayuda del software de Geometría Dinámica y de la posterior explicación de los resultados fuera del ámbito computacional.

¿Los esquemas analíticos llevan a una demostración matemática, de qué manera? La respuesta es afirmativa, con el desarrollo de actividades de exploración y formación de conjeturas, y con la ayuda del software, es posible que las premisas de los esquemas analíticos de argumentación sean válidas, lo cual nos llevará a conclusiones válidas y por ende a la demostración matemática.

Durante el presente experimento de enseñanza se pusieron en evidencia los siguientes hechos:

- Los asistentes, en un inicio y a pesar de que se hizo una presentación sobre esquemas de argumentación y la importancia de utilizar esquemas analíticos, utilizaron en su mayoría esquemas no analíticos. Esto es algo similar a lo encontrado con profesores de matemática de Bachillerato (FLORES, 2007).
- La función de arrastre del programa permitió que los asistentes exploraran las construcciones en busca de conjeturas y, más adelante, en la búsqueda de razones para explicar su construcción. Por ejemplo la función de arrastre

sirvió en la consideración de casos extremos, como el ver, en la actividad 4, qué pasaba con las cuerdas paralelas. Es decir, la función de arrastre para explorar casos extremos y corroborar conjeturas está ligado al uso de esquemas analíticos. Lo anterior concuerda con los resultados de un estudio anterior (FLORES, 2009).

- La realización de actividades apropiadas (CHRISTOU; COL, 2004, p.218)[1] lleva a la utilización de esquemas analíticos y de demostraciones matemáticas. En la Tabla 1 se puede apreciar que en la Actividad 1 no hubo demostraciones, mientras que en la 4 la mayoría lo fueron.
- Parte del cambio en el uso efectivo de esquemas de argumentación se debió al ambiente de enseñanza que se creó durante el experimento, en particular el hecho de permitir la libre comunicación entre los asistentes, y al monitoreo que hizo el instructor, dando sugerencias a los equipos y llevando ideas de un equipo a otro.

Por la forma en que se realizaron las actividades, podríamos decir que los resultados obtenidos en el presente estudio corresponden al colectivo; como parte del trabajo futuro, se podría hacer una indagación del uso de esquemas de argumentación de ciertas personas en un estudio de casos.

Los resultados del experimento de enseñanza nos alientan a seguir indagando sobre los esquemas de argumentación y la manera de desarrollarlos en estudiantes y profesores, no sólo en el ámbito de la geometría euclidiana, sino en las otras ramas de la matemática y en contextos no matemáticos.

REFERENCIAS

ALARCÓN, J. et al. *Matemáticas, libro para el maestro. Educación secundaria*. México: SEP, 1994.

ALIBERT, D.; THOMAS, M. Research on mathematical proof. *Advanced Mathematical Thinking*, p.215-230, 1991.

BALACHEFF, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, 2000.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Geometry and proof. *The Mathematics Teacher, 1*(88), p.48-54, 1995.

BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 1997.

COLEGIO DE BACHILLERES. *Programas de Estudio de Matemáticas*. México: SEP, 1993.

1 Los autores apuntan que las actividades “apropiadas” en las que surge la necesidad de una demostración podrían ser aquellas en las que el estudiante percibe el por qué un resultado, visto en la pantalla de la computadora, es verdadero.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. *Adecuación a los Programas de Estudio de Matemáticas I a IV*. México: UNAM, 2003.
CHRISTOU, C. et al. Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the PME* (2), p.215-222, 2004.
DALCÍN, M. *El desarrollo de un pensamiento deductivo en el Bachillerato Diversificado en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias. CICATA, IPN, México, México, 2004.
DEWEY, J. *Howwethink.* D. C. Heaths& Co. Chicago, 1910.
DEWEY, J. *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*, Barcelona, España: Paidós, 1989.
DIRECCION GENERAL DE BACHILLERATO. *Programa de estudios, Matemáticas I*. México: SEP, 2004.
DUVAL, R. (1991). Structure du Raisonnement deductif et Apprentissage de la Demonstration. *Educational Studies in Mathematics 22,* p.233-261, 1991.
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA. *Programas de Estudio de Matemáticas.* México: UNAM, 1996.
FLORES, H. *Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemática del Bachillerato*. Tesis para obtener el grado de Doctor. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México, 2007.
FLORES, H. Aprender Matemática, Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante, *Acta Scientiae,* v.9, n.1, p.28-40, 2007.
FLORES, H. Argumentation Schemes and the use of Sketchpad. *Memorias del International Conference on Technology on Mathematics Teaching, ICTMT-2009*. 6-9 de julio. Metz, Francia.
FLORES, H.; GÓMEZ, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. Educación Matemática, 21(2), p.117-142, 2009.
FURINGHETTI, F; PAOLA, D. To Produce Conjectures and to Prove Them Within a Dynamic Geometry Environment: A Case Study. *Proceeding of the 27th International Conference of PME*, vol. 2, p.397-404, 2003.
FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents*. Reston, VA: NCTM, 1998.
HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, v.44, n.*1-2*, p.5-23, 2000.
HOYLES, C.; JONES, K. Proof in Dynamic Geometry Contexts. *Perspectives on the teaching for the 21th Century*, Estudio de ICMI, Mammana, C. y Villani, V., p.121-128, 1998.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL. *Geometría y Trigonometría. Libro del Profesor*. México: IPN, 1995.
MARIOTTI, M. A. Justifying and Proving in Geometry: The mediation of a micro world. *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education*, p.21-26, 1997.
MARIOTTI, M. A. Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, v.44, n.*1-2*, p.25-53, 2000.
MC GIVNEY J. M.; DE FRANCO, T. C. Geometry Proof Writing: A Problem-Solving

Approach a la Polya. *The Mathematics Teacher*, *7octubre*(88), p.552-555, 1995.
NISS, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. *Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy.* B. L. Madison y L. A. Steen, Editores. National Council on Education and the Disciplines Princeton, New Jersey. Disponível em: <http://www.maa.org/ql/qltoc.html>Acesso em: 12 nov. 2009.
POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1989.
PRESMEG, N. On Visualization and Generalization in Mathematics. *Proceedings of the XXI Annual Meeting,* PME-NA, Cuernavaca, México, p.151-155, 1999.
RADFORD, L., La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos, *Educación Matemática*, *6*(3), p.21-36, 1994.
SENK, S. L. How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher, septiembre*, p.448-456, 1985.
STEFFE, L.; THOMPSON, P. Teaching Experiment Methodology: Under lying Principles and Essential Elements. En Kelly, A & Lesh, R. (Ed.) *Hand book of Research Design in Mathematics and Science Education.* EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2000.
SOUTHERLAND, R.; OLIVERO, F.; WEEDEN, M. Orchestrating mathematical Proof Through the Use of Digital Tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of PME*, (4), p.265-272, 2004.
STRAESSER, R. Cabri-géomètre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), p.319-333, 2001.

Recebido em: jun. 2010 **Aceito em:** set. 2010