

## **REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: IDENTIFICANDO REPRESENTAÇÕES E APREENSÕES NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

### **REGISTERS OF SEMIOTIC REPRESENTATION: IDENTIFYING REPRESENTATIONS AND APPREHENSIONS IN THE STUDY OF RIGHT TRIANGLE TRIGONOMETRY**

Juliane Carla Berlanda<sup>1</sup>

Inês Farias Ferreira<sup>2</sup>

#### **Resumo**

Com o presente artigo, decorrente de uma pesquisa de mestrado, pretende-se, por meio da teoria dos registros de representação semiótica discutir, a partir de atividades encontradas em livros didáticos, aspectos relacionados às representações e apreensões em geometria tendo como objeto matemático a trigonometria no triângulo retângulo. Tais elementos auxiliam na compreensão de como se dá a aprendizagem de geometria e, conseqüentemente, seu estudo pode minimizar algumas dificuldades encontradas no percurso de ensinar. Nessa perspectiva, este trabalho se constitui a partir de atividades selecionadas em dois livros didáticos do 1º ano do ensino médio que fizeram parte do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2014-2016). Nestas atividades foi possível observar a correlação com a teoria de registros de representação semiótica, de acordo com aspectos elencados da mesma. Dessa forma, espera-se contribuir com subsídios para a identificação em outras atividades que envolvam o objeto matemático em questão,

**Palavras-chave:** Registros de representação semiótica. Livros didáticos. Trigonometria no triângulo retângulo.

#### **Abstract**

This article, as a result of a master's research, intends, through the theory of registers of semiotic representation, to discuss, based on activities found in textbooks, aspects related to representations and apprehensions in geometry having the right triangle trigonometry as the mathematical object. Such elements aid in the understanding of how geometry learning occurs, and, consequently, its study can minimize some difficulties encountered in teaching. In this perspective, this work is based on activities selected from two textbooks of the 1st year of high school that were part of the Brazilian National Program of Textbooks (Programa Nacional do Livro Didático – PNLD) (2014-2016). In these activities, it was possible to observe the correlation with the theory of registers of semiotic representation, according to aspects listed by it. Thus, the article expects to contribute with subsidies for this identification in other activities that involve the mathematical object in discussion.

**Keywords:** Registers of semiotic representation. Textbooks. Right triangle trigonometry.

---

<sup>1</sup> Universidade Federal de Santa Maria.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Santa Maria. Docente do Departamento de Matemática.

## Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado que abordou o estudo da trigonometria no triângulo retângulo à luz da teoria de registros de representação semiótica, mais especificamente, relacionados às apreensões envolvidas em tópicos de geometria, tendo como ferramenta de apoio, recursos dinâmicos do *software* GeoGebra. Em particular, o objetivo deste artigo é abrir um espaço para reflexão a respeito da correlação que as representações e apreensões em geometria, classificadas por Duval (2003, 2005, 2009) têm no conteúdo em questão, sendo estas evidenciadas em atividades encontradas em livros didáticos.

Ao ser trabalhado o tema trigonometria no triângulo retângulo em sala de aula, percebe-se algumas dificuldades por parte dos alunos, no sentido de relacionarem o objeto matemático com suas diferentes representações semióticas. Ainda, a atividade cognitiva relacionada com a conversão entre os diferentes registros que podem ser explorados com este assunto, muitas vezes, não ocorre de forma adequada, resultando em dificuldades na aprendizagem.

No entanto, a teoria de registros de representação semiótica (RRS), de acordo com Duval (2003), tem seu enfoque no funcionamento cognitivo da compreensão procurando desenvolver no aluno a capacidade de raciocinar, visualizar e analisar.

Sendo assim, busca-se neste artigo pontuar aspectos relacionados com esta teoria a partir de atividades selecionadas em dois livros didáticos do 1º ano do ensino médio que estão no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), período de 2014-2016, que estavam sendo utilizados na realidade escolar do contexto da pesquisa que originou este artigo e que serviram de subsídios para a elaboração e aplicação de uma sequência de atividades junto à alunos do ensino médio, cuja abordagem foge do escopo deste texto.

## Teoria de Registros de Representação Semiótica no Contexto da Trigonometria no Triângulo Retângulo

Esta seção, inicialmente pontua aspectos relacionados a teoria de registros de representação semiótica para, posteriormente, direcionar sua atenção ao estudo de trigonometria no triângulo retângulo.

Diante das dificuldades que os alunos apresentam na compreensão da matemática é preciso uma abordagem cognitiva para que seja possível o desenvolvimento total de suas competências de raciocínio, análise e de visualização, como se dá a organização de situações de aprendizagem e como ocorre a aquisição do conhecimento.

Duval afirma que as representações semióticas “[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais tem suas dificuldades próprias de

significado e de funcionamento”. (DUVAL, 1993, p.39, apud DAMM, 2015, p.176). É através das representações semióticas, que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano. Ainda, Duval (2003, p.12) reforça esta perspectiva, afirmando que:

A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino.

A aprendizagem vai depender das diversas interações que o aluno tem acesso, além de muitos outros fatores. Na matemática, essas ferramentas podem ser: símbolos, representações gráficas e algébricas, escrita natural, dentre outras.

Nas pesquisas de Duval (2009) são indicados três tipos de representação: mental, computacional e semiótica. Segue uma breve descrição de cada uma delas:

- Representação mental: é interna e consciente e tem função de objetivação. De acordo com este pesquisador, tem relação com a percepção, consistindo em representações que tratam de um conjunto de imagens e concepções que o sujeito tem acerca de um objeto ou, a respeito daquilo que está associado ao objeto;

- Representação computacional: é interna e não consciente do sujeito. Este realiza tarefas automaticamente, sem pensar em todos os procedimentos necessários para sua efetivação. Duval (2009, p. 47) afirma que “essas representações traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável, e combinável no interior desse sistema”;

- Representação semiótica: é uma representação externa e consciente, inseparável da visão que se tem de qualquer coisa (DUVAL, 2009, p.50). A mesma se caracteriza pela produção constituída por meio da utilização de signos pertencentes a um sistema de representação. Sendo que, as representações semióticas podem ser resumidas em dois aspectos: forma e conteúdo. A forma refere-se ao representante e, o conteúdo, ao representado. A escrita natural, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos, dentre outros, constituem uma grande diversidade de representações semióticas, desempenhando funções de comunicação, sendo indissociáveis das funções cognitivas de objetivação e de tratamento dos objetos matemáticos.

As representações semióticas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento e, de acordo com Pasa, Richit e May (2015, p.106), desempenham importantes papéis no desenvolvimento das representações mentais, na realização de funções cognitivas, como a objetivação e a função de tratamento, bem como, na produção do conhecimento.

A partir das representações que ocorre a comunicação em matemática. Para isso são necessárias diferentes representações semióticas, pois este fato irá possibilitar ao aluno uma melhor compreensão e aprendizagem de determinado objeto matemático. Portanto, é imprescindível

possibilitar-lhe o acesso a atividades que o façam entrar em contato com as diferentes representações semióticas. Nesse sentido, “[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”. (DUVAL, 1993, p. 3, apud DAMM, 2015, p.177).

Na teoria, Duval esclarece que os registros de representações são formas distintas de descrever um objeto matemático, sendo que o sistema no qual se pode retratar um objeto matemático denomina-se, sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes, além de servirem como um sistema de comunicação. Mas, também por viabilizarem a sistematização de informações a respeito do objeto representado.

Na matemática os objetos matemáticos são abstratos e não são propriamente perceptíveis. Os objetos matemáticos são conceitos, escrita, propriedades, notações, simbologias e relações que podem ser acessadas através de representações. Tais representações correspondem a gráficos, tabelas, códigos, algoritmos e desenhos, concedendo o diálogo entre as atividades cognitivas do pensamento e o sujeito, além de revelar um objeto matemático através das mesmas.

Duval (2012b) enfatiza que os objetos matemáticos não podem e não devem ser confundidos com a representação que se faz dele. Portanto, analisando no âmbito do ensino, tem-se a necessidade de analisar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Muitas dificuldades encontradas na resolução de atividades matemáticas estão ligadas ao fato de não existir uma única linguagem, podendo, muitas vezes, na obtenção de uma solução ocorrer a articulação de muitas representações de um determinado objeto matemático. Analisando cognitivamente, esta ação não é simples, pois não está ligada a um processo de memorização e sim, de domínio de diferentes representações do mesmo objeto matemático.

Em particular, o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo pode ser representado através da linguagem natural, da representação por meio figural, dos registros algébrico, simbólico ou numérico. Uma vez que, esses registros são fundamentais para a comunicação entre o objeto proposto e sua representação, a fim de que o sujeito possa constituir uma aprendizagem do assunto.

A diversidade de registros semióticos de representação é inseparável do funcionamento cognitivo do pensamento humano. Por este fato, Duval (2012b, p. 270) chama “*semiose* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noesis* a apreensão conceitual de um objeto”, sendo essas duas indissociáveis. Nesse entendimento, para que a aprendizagem de um objeto matemático aconteça é necessário que a *noesis* ocorra por intermédio da *semiose*.

Ainda, Duval (2003) destaca que a compreensão da atividade matemática é possível quando ocorre a mobilização de, ao menos dois registros de representação. Porém, é necessário que ocorra de forma simultânea. Além do mais, a troca de registro de representação deve ocorrer a todo tempo,

não apenas de um registro para outro, mas que o aluno consiga voltar ao registro inicial. Ou seja, quanto maior a variabilidade de diferentes registros de representação semiótica, maior será a oportunidade de apreensão do objeto matemático.

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, se deve permitir as três atividades cognitivas ligadas a semiose, caracterizadas por Duval (2003): formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Sendo que, a primeira delas, a formação de uma representação identificável, se constitui como um registro quando se identifica uma seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Segundo Duval (2012b, p.272) essa seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto. Além disso, não são regras fundadas por um sujeito, mas sim, são regras de conformidade, para que o sujeito possa reconhecer o registro dado.

Conforme mencionado anteriormente, o estudo de trigonometria no triângulo retângulo por não ser diretamente acessível à percepção necessita que se disponha de diversas formas de representação para que ocorra o diálogo entre sujeito e apreensão do conhecimento. Para reforçar esta ideia, a seguir será feita uma descrição de uma atividade proposta que está na obra Matemática no Ensino Médio, de Smole e Diniz (2013, p.240). Mais especificamente, na unidade 10, denominada “Trigonometria no triângulo retângulo”, item “Cálculo do seno, cosseno e tangente de ângulos agudos especiais” e subitem “Problemas e exercícios”. Cabe salientar que a resolução apresentada foi elaborada pelas autoras. A seguir apresenta-se o enunciado:

*“Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e o cosseno do ângulo agudo adjacente a ele vale 0,6. Calcule as medidas dos outros lados.”*

Neste enunciado tem-se a formação de uma representação identificável como registro em língua natural, escrita dentro das normas exigidas. Assim, se pode identificar as relações existentes e os dados com o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo, pois foi especificado que se tratava de um triângulo retângulo, apresentando o valor do cateto e fornecendo a informação do cosseno. Dessa forma, espera-se que o aluno consiga determinar qual registro que foi dado sobre o objeto matemático.

Quanto à segunda atividade cognitiva, tratamento de uma representação, esta é a transformação da representação no mesmo registro onde ela foi formada. Sendo uma transformação interna a um registro. Existem regras de tratamento, referente à representação dada, e o sujeito tem que ter claro essas regras para existir tratamento significativo. Para ilustrar foi selecionada uma atividade da obra intitulada Conexões com a Matemática, de Leonardo (2013,

p.262) que está no capítulo “Triângulo retângulo”, item “Razões trigonométricas” e no subitem “Exercícios resolvidos”, portanto as etapas de resolução descritas aqui foram adaptadas a partir das que foram fornecidas no livro. Nesta atividade pode-se verificar a ocorrência de tratamento.

A seguir apresenta-se seu enunciado e imagem ilustrativa (Figura 1).

*“Na dança folclórica de trança-fitas, usa-se um mastro com, geralmente, 3 metros de altura. Para certa passagem da dança precisa-se que o ângulo formado entre a fita esticada (com a ponta do chão) e a horizontal tenha  $30^\circ$ . Sabendo-se que  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ , determinar o comprimento da fita e a distância dessa ponta ao mastro.”*

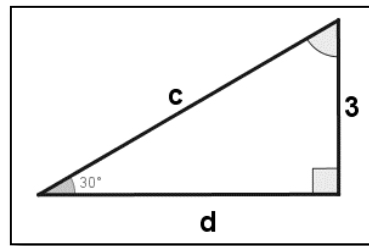
**Figura 1:** Imagem apresentada pelo livro junto ao enunciado da questão.



Fonte: (LEONARDO, 2013)

A resolução pode ser iniciada com uma representação figural da situação descrita no enunciado, ou seja, a partir das informações e da imagem fornecidas pelo problema. Sendo necessário correlacionar a situação problema proposta com aspectos relacionados a trigonometria no triângulo retângulo, pois o aluno deverá interpretar o problema e associá-lo a existência de um triângulo retângulo, sendo que o comprimento da fita pode-se ser identificado por  $c$  e a distância da ponta da fita ao mastro, pela letra  $d$ , conforme mostra a Figura 2

Figura 2: Representação figural possível.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Considerando diretamente as informações dadas no problema, sem uso de um registro intermediário ou, a partir da representação figural de um triângulo retângulo (Figura 2), pode-se organizar a resolução da seguinte forma:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{3}{c} \Rightarrow \frac{3}{c} = 0,5 \Rightarrow c = 6 .$$

Este resultado obtido corresponde ao comprimento da fita e, para a obtenção da distância da mesma até o mastro usa-se o fato de se ter um triângulo retângulo. Consequentemente, por um conhecimento prévio das relações existentes entre seus lados, utiliza-se o teorema de Pitágoras, resultando em:

$$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \cong 5,2 .$$

Portanto, como resposta tem-se que a fita deve ter 6 metros de comprimento e sua ponta está a aproximadamente 5,2 metros do mastro.

O tratamento aparece no registro algébrico identificado anteriormente, pois foram necessárias a resolução de duas equações algébricas. Sendo que, a primeira expressão,  $\text{sen } 30^\circ = \frac{3}{c}$ , permitia determinar o comprimento da fita. No entanto, o problema não forneceu o valor do seno do ângulo indicado, exigindo assim, um conhecimento prévio deste. Já, na segunda equação,  $d^2 + 3^2 = 6^2$ , ao também se lançar mão do teorema de Pitágoras pressupõem-se um conhecimento prévio do mesmo a fim de obter a distância solicitada entre o mastro e a fita. Dessa forma, a partir da utilização destes dois registros algébricos fica caracterizada a ocorrência de um tratamento neste registro para se chegar na solução do problema proposto.

A última atividade cognitiva, conversão, acontece na mudança de sistema de registro, porém as características dos objetos permanecem, ou seja, existe a mudança de registro de representação semiótica que ocorre entre os diversos registros de um objeto dado, diferente do tratamento que ocorre dentro do mesmo registro. Ainda, Duval (2003, p.15) afirma que “A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados”. Portanto, a conversão não justifica e nem prova procedimentos matemáticos, todavia, analisando cognitivamente, conduz e, é responsável pela compreensão matemática.

Para exemplificar esta atividade cognitiva será retomado o problema anterior. Nesse caso o registro de partida é a língua natural expressa no enunciado. Sendo que, neste aparecem os dados necessários para resolver a atividade e também o que se deseja obter como resposta. A primeira conversão ocorre, caso se opte por iniciar a resolução passando os dados do problema para o registro figural, ou seja, são utilizadas todas as informações dadas na língua natural para compor a representação fornecida pela Figura 2.

Além disso, após, suscita também a conversão para o registro algébrico, onde ocorre o tratamento no mesmo registro para a resolução final da atividade. Cabe mencionar que, por último nesta resolução se optou por concluir a atividade fazendo a conversão para a língua natural novamente, respondendo os itens solicitados no enunciado. No entanto, poderia ser omitida a conversão da língua natural para a figural e trabalhar diretamente com o registro algébrico, fazendo uso de duas conversões apenas em toda sua resolução.

Todavia, para que ocorra a apreensão em matemática é necessário entender a *noesis*, ou seja, como o sujeito se apropriou das diferentes conversões entre os registros de representação semiótica para coordenar e chegar à aprendizagem pretendida. Em sua pesquisa Duval (2003) apresenta a descrição de diferentes registros que compõem a representação semiótica, conforme mostra o quadro 1.

**Quadro 1:** Classificação dos registros de representação semiótica.

REGISTROS	REPRESENTAÇÕES	
	DISCURSIVA	NÃO DISCURSIVA
<b>MULTIFUNCIONAIS:</b> os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural; Associações verbais (conceituais); Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> <li>• argumentação a partir de observações, de crenças...;</li> <li>• dedução válida a partir de definição ou de teoremas.</li> </ul>	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3): <ul style="list-style-type: none"> <li>• apreensão operatória e não somente perspectiva;</li> <li>• construção com instrumentos.</li> </ul>
<b>MONOFUNCIONAIS:</b> os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• numéricas (binária, decimal, fracionária,...);</li> <li>• algébricas;</li> <li>• simbólicas (línguas formais).</li> </ul> Cálculo.	Gráficos cartesianos: <ul style="list-style-type: none"> <li>• mudanças de sistema de coordenadas;</li> <li>• interpolação e extrapolação.</li> </ul>

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p.14).

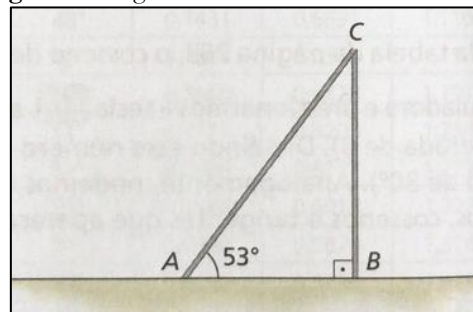


Com o intuito de contribuir para uma melhor compreensão desta classificação apresentada por Duval (2003) no contexto de trigonometria no triângulo retângulo será utilizada uma atividade incluída como exercício proposto na obra *Conexões com a Matemática*, de Leonardo (2013, p. 268), apresentada no capítulo “Triângulo retângulo”, item “Seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos”. O seu enunciado, juntamente com a imagem fornecida (Figura 3) é dado por:

*“Um artista plástico está construindo estruturas com barras metálicas, como representada a seguir, que darão origem a uma escultura. Sabendo que a medida de  $\overline{AB}$  é 3m e que os ângulos  $C\hat{A}B$  e  $A\hat{B}C$  medem  $53^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente, calcule o comprimento total aproximado das barras.”*

A partir do enunciado tem-se um registro na língua natural (RLn)<sup>3</sup>. Como o problema fornece também uma imagem representativa da situação (Figura 3), a mesma se configura em um registro figural (RFg) que apresenta apenas dados já contidos no enunciado. Dessa forma, a atividade tem-se já na estrutura apresentada uma conversão.

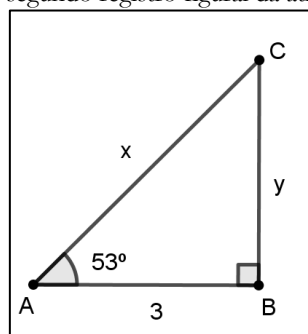
**Figura 3:** Imagem fornecida na atividade.



Fonte: (LEONARDO, 2013).

Sendo que a partir deste RFg inicial e dos dados fornecidos no registro em língua natural pode decorrer um outro RFg, como mostra a Figura 4, onde neste é identificada a medida dos lados por meio de um registro simbólico.

**Figura 4:** Um segundo registro figural da atividade.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

<sup>3</sup>As abreviaturas dos registros de representação semiótica apresentadas neste trabalho basearam-se em Boemo (2015).

Com base nos registros figurais é possível obter relações mais adequadas envolvendo a medida dos lados do triângulo retângulo e um de seus ângulos internos. Neste caso, relacionadas ao cosseno e a tangente de um ângulo composto, assim, razões trigonométricas que correspondem a registros simbólicos (RSb):

$$tg 53^\circ = \frac{BC}{AB} \text{ e } \cos 53^\circ = \frac{AB}{AC}.$$

Ao ser substituído os rótulos fornecidos pelo RFG (Figura 4) resulta em registros algébricos (RAI) que ao serem manipulados permitem obter os resultados relacionados às medidas dos lados do triângulo retângulo que, no problema correspondem à medida das barras metálicas:

$$tg 53^\circ = \frac{y}{3} \rightarrow 1,32 \cong \frac{y}{3} \rightarrow y \cong 3,98 \text{ e } \cos 53^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow 0,60 \cong \frac{3}{x} \rightarrow x \cong 4,98.$$

Como se pede a obtenção do valor total da medida das barras metálicas há a necessidade de um registro numérico (RNm) dada por:

$$3,98 + 4,98 = 8,96.^4$$

Assim, para finalizar a resolução da atividade pode-se lançar mão do RLn, ao informar que o comprimento total das barras é de, aproximadamente, 8,96 metros.

Em suma, nesta atividade tem-se, quanto aos registros multifuncionais o enunciado que corresponde a um registro na língua natural (RLn), caracterizado como uma representação discursiva. Já, ao se utilizar das Figuras 3 e 4 tem-se registros figurais (RFG) sendo representações não discursivas. E, quanto aos registros monofuncionais, tem-se os registros simbólicos (RSb), algébricos (RAI) e numéricos (RNm), correspondendo a representações discursivas. Além disso, como a resposta do problema fora descrita em registro em língua natural (RLn), tem-se um registro multifuncional, cuja representação é discursiva. A partir dessa atividade pode-se constatar a presença de diversos registros de representação semiótica envolvidos, conforme esquematizado no quadro 2.

**Quadro 2:** Registros de representação semiótica envolvidos na atividade.

REGISTROS					
PARTIDA		INTERMEDIÁRIOS			CHEGADA
RLn	RFG	RSb	RAI	RNm	RLn

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Além disso, ao resolver o problema ocorreu uma conversão entre os registros de partida e intermediários (RLn – RFG → RSb). Também, posteriormente, nos registros intermediários

<sup>4</sup> Para os cálculos está sendo considerado, em termos de precisão, duas casas decimais.

(RSb→RAI, RAI→RNm) e do registro intermediário ao de chegada (RNn – RLn). O tratamento ocorre internamente no registro intermediário (RAI).

Nessa atividade é possível perceber que o processo de resolução demandou diferentes registros, realizando-se conversões e tratamentos. No entanto, para que realmente ocorra a construção do conhecimento relacionado não pode acontecer no processo de conversão, a codificação. Duval (2003) descreve que a mesma consiste em realizara conversão de maneira artificial, aplicando-se regras para se chegar a outra representação semiótica. Dessa forma, se isso ocorrer não houve aprendizado matemático, mas sim, apenas aplicação de regras para a obtenção do resultado esperado.

### **Apreensões no Estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo com Base nos Registros de Representação Semiótica**

Nesta seção serão descritos aspectos relacionados às apreensões em geometria, pontuando-os por meio de atividades selecionadas em livros didáticos do ensino médio no estudo de trigonometria no triângulo retângulo.

Almouloud (2003, p.126) ressalta que, em particular, a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas, são elas:

- Visualização para a exploração heurística de uma situação complexa;
- Construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- Raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.

Essas três formas de processo cognitivo não podem ocorrer separadas, elas funcionam de forma entrelaçada. Sendo necessárias para que ocorra a aprendizagem em geometria. A heurística dos problemas em geometria fornece formas diferentes de interpretação. Segundo Almouloud (2003), existem quatro formas de apreensões: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória.

A apreensão sequencial, segundo Duval (2012a) é utilizada quando se tem a intenção de reproduzir uma figura através da construção ou descrição da mesma.

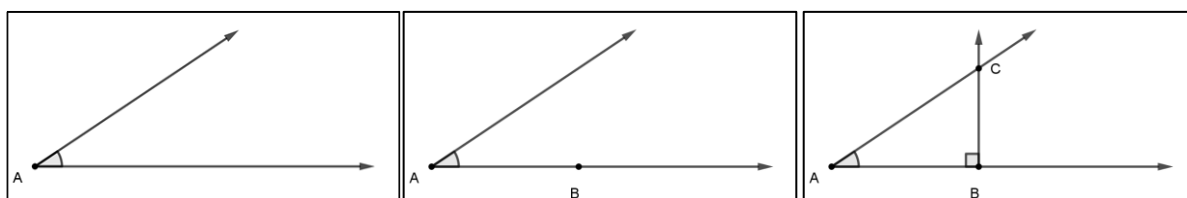
Na obra Matemática Ensino Médio de Smole (2013, p.245), na unidade “Trigonometria no triângulo retângulo”, item “Relações entre seno, cosseno e tangente”, subitem “Problemas e Exercícios”, identificou-se este tipo de apreensão na seguinte atividade proposta:

*“Trace um ângulo agudo qualquer e encontre sua medida aproximada sem usar o transferidor.”*

Nesse caso, são dadas duas instruções que demandam a apreensão sequencial para resolvê-lo, pois é necessário, inicialmente, construir uma primeira representação de um ângulo agudo qualquer, posteriormente, definir um ponto sobre um dos lados do ângulo e construir uma reta

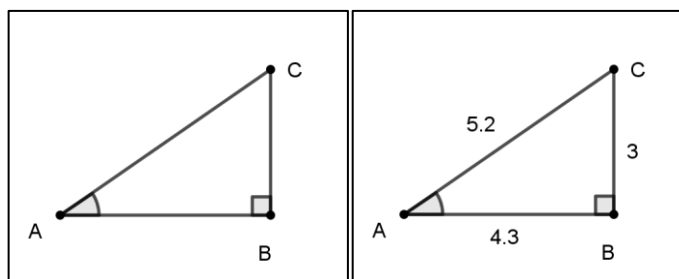
perpendicular a este lado passando pelo ponto escolhido. Dessa forma define-se um triângulo retângulo. Uma possibilidade de fazer estas etapas é ilustrada na Figura 5. Após a definição do triângulo retângulo realiza-se as medições de seus lados, conforme exemplificado na figura 6. Estas construções ilustram um tratamento no RFG. Após, há a necessidade de fazer uso do conhecimento das razões trigonométricas que envolvem um ângulo do triângulo retângulo, com isso bastariam, apenas, a medida de dois lados ao escolher uma das três razões trigonométricas para a determinação do ângulo inicialmente construído.

**Figura 5:** Mobilização da apreensão sequencial até a construção do triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

**Figura 6:** Medidas dos lados do triângulo retângulo construído



Fonte: Elaborado pelas autoras.

A partir do tratamento na representação figural caracterizado pela mobilização sequencial é escolhido um dos três RSb possíveis e, posteriormente, por meio da manipulação no RNm é possível determinar o que a atividade solicita, ou seja:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5,2} \cong 0,57 \Rightarrow \hat{A} \cong \operatorname{arc} \operatorname{sen}(0,57) \Rightarrow \hat{A} \cong 34^\circ;$$

$$\operatorname{cos} \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{4,3}{5,2} \cong 0,82 \Rightarrow \hat{A} \cong \operatorname{arc} \operatorname{cos}(0,82) \Rightarrow \hat{A} \cong 34^\circ;$$

$$\operatorname{tan} \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4,3} \cong 0,69 \Rightarrow \hat{A} \cong \operatorname{arc} \operatorname{tan}(0,69) \Rightarrow \hat{A} \cong 34^\circ.$$

Por meio do RLn é possível fornecer a resposta do problema inicialmente proposto na atividade. Assim, o ângulo construído inicialmente tem medida aproximada de  $34^\circ$ . Cabe salientar que, este tipo de atividade não tem uma resposta fechada, pois dependerá da construção inicial feita, no entanto, as etapas de resolução permanecem as mesmas.

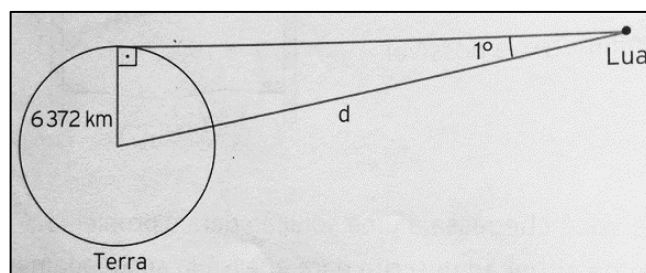
Na apreensão perceptiva é feita a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica que, segundo Duval (2012a), é caracterizada como uma atividade matemática que produz uma atitude imediata e automática.

Em particular, na atividade anterior em que era solicitada a construção de um ângulo, para posterior identificação de sua medida, também tem-se a apreensão perceptiva no tratamento no RFig.

Para melhor ilustrar esta apreensão no estudo de trigonometria no triângulo retângulo foi escolhida em Smole (2013, p.246), na unidade “Trigonometria no triângulo retângulo”, item “Relações entre seno, cosseno e tangente”, subitem “Problemas e Exercícios”, a atividade proposta cujo enunciado e imagem representativa (Figura 7) correspondem a:

*“O esquema a seguir representa a distância entre a Terra e a Lua. Calcule essa distância a partir dos dados do problema.”*

**Figura 7:** Imagem fornecida na atividade



Fonte: (SMOLE, 2013).

O enunciado não apresenta informações suficientes para a resolução do problema, sendo necessário observar os dados contidos na Figura 7. A mesma representa um esquema da situação real indicada no problema, pois envolve objetos tridimensionais e, na figura, é apresentado um esquema bidimensional. A partir da Figura 7 é possível identificar um triângulo retângulo, com a indicação das medidas de um cateto e do ângulo oposto a este, bem como, a representação simbólica da distância entre a terra e a lua (hipotenusa do triângulo retângulo),  $d$ , que se deseja calcular. Com estes dados há a necessidade de identificar qual é a razão trigonométrica mais adequada a ser utilizada, ou seja, deve ser feito uso da apreensão perceptiva para se chegar ao registro simbólico envolvendo o seno do ângulo agudo informado. Após, com a definição do registro simbólico passa-se para a manipulação no registro numérico:

$$\operatorname{sen} 1^\circ = \frac{6372}{d} \Rightarrow 0,0174 \cong \frac{6372}{d} \Rightarrow d \cong 365107.$$

Assim, no RLn determina-se que a distância entre a Terra e a Lua corresponde, aproximadamente, 365 107 km.

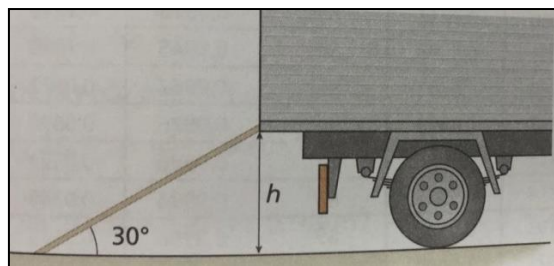
Salienta-se que, para a resolução dessa atividade é fundamental a interpretação da figura, ou seja, identificar que se trata de um triângulo retângulo e, com os dados indicados escolher a razão trigonométrica que permitirá resolvê-la.

Quanto a apreensão discursiva, Duval (2012a) a descreve como sendo aquela relacionada a articulação do enunciado com as propriedades da figura geométrica fornecida. Quando os elementos de uma figura não são perceptíveis em um primeiro momento, a apreensão perceptiva está subordinada a apreensão discursiva.

Este caso de correlação entre as apreensões citadas pode ser evidenciado na atividade proposta em Leonardo (2013, p.264), capítulo “Triângulo retângulo”, item “Razões trigonométricas” onde o enunciado a seguir se faz necessário para a resolução, pois somente a figura apresentada (Figura 8) não é suficiente. Além disso, observa-se que a imagem (RFg) busca esquematizar a situação descrita no enunciado (RLn) agregando a ela a representação de um triângulo retângulo, decorrente da situação proposta.

*“Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão através de uma rampa de madeira apoiada a caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por h?”*

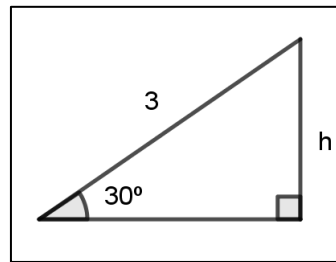
**Figura 8:** Imagem fornecida junto ao enunciado da atividade



Fonte: (LEONARDO, 2013).

Nesse contexto, o RFg (Figura 8) visa complementar a interpretação discursiva fornecida no RLn. Sendo que, a partir do enunciado (RLn) e da figura (RFg) é possível elaborar um outro RFg (Figura 9) que apresenta um triângulo retângulo com indicação do ângulo interno correspondente à inclinação da rampa com o chão, onde um cateto é altura desejada e a hipotenusa a medida da rampa.

**Figura 9:** Registro Figural construído a partir da atividade



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Para a resolução, após analisar os dados no RFG (Figura 9) é possível identificar a melhor razão trigonométrica a ser utilizada, no caso, envolvendo o seno de um ângulo. Assim, a partir do RSb:

$$\text{sen}(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

chega-se aos RAI –RNm:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 (\text{sen } 30^\circ) \Rightarrow h = 3(0,5) \Rightarrow h = 1,5.$$

Deve ser observado que há a necessidade do conhecimento do valor do  $\text{sen } 30^\circ$ , pois não é fornecido na atividade proposta. Para finalizar pode-se fazer uso do RLn, para indicar a resposta encontrada, no caso, a altura entre a caçamba e o solo ser igual a 1,5 m.

Em termos da apreensão operatória, que se refere às modificações de uma figura inicial, bem como na reorganização que essas modificações disponibilizam, Duval (2005, 2012a), afirma que nesta apreensão estas modificações na figura inicial não caracterizam perda em propriedades a ela associada. Este, ainda, classifica a apreensão operatória em três modificações possíveis: mereológica, ótica e posicional.

Na modificação mereológica a figura inicial é decomposta em várias figuras. Duval (2005) destaca que essa decomposição pode ser de três tipos:

- estritamente homogênea: depois de decomposta a forma das figuras que surgem é a mesma da figura inicial;
- homogênea: depois de decomposta a forma das figuras que surgem é diferente da figura inicial, mas estas figuras possuem mesma forma entre si;
- heterogênea: depois de decomposta a forma das figuras que surgem é diferente da figura inicial e também entre si.

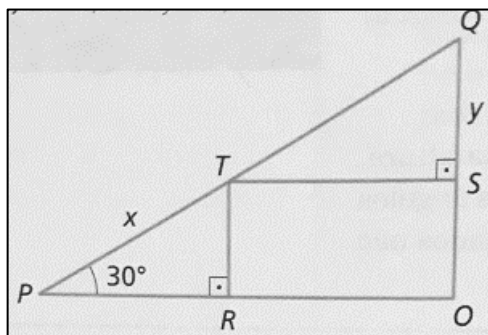
Para ilustrar esta apreensão e algumas modificações possíveis, escolheu-se uma atividade contida em Leonardo (2013, p.272), capítulo “Triângulo retângulo”, item “Seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos”, subitem “Problemas e Exercícios”. Em particular, a figura apresenta-se subdividida em outras figuras, havendo a necessidade de, a partir da apreensão perceptiva, ser

identificadas propriedades de semelhança entre algumas delas, a fim se determinar a solução da atividade. Seu enunciado e imagem representativa (Figura 10) são dados por:

“Encontre os valores de  $x$  e  $y$  na figura abaixo.

(Dados:  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\overline{PQ} = 10\text{m}$ ;  $\overline{TR} = 2,3\text{m}$ ;  $\overline{PT} = x$  e  $\overline{QS} = y$ .)”

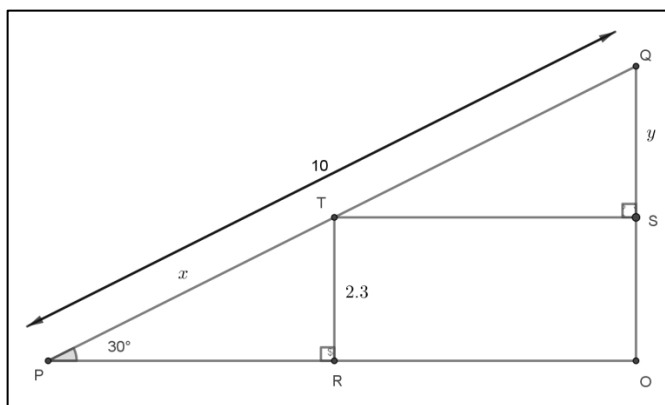
**Figura 10:** Imagem representativa fornecida na atividade



Fonte: (LEONARDO, 2013).

A atividade apresenta um enunciado (RLn) que depende diretamente da figura (RFg) para ser resolvida. Sendo que na figura tem-se o triângulo retângulo POQ que já está subdividido em outras três figuras, sendo duas também triângulos retângulos (PRT e TSQ) e, a outra, um quadrilátero do tipo retângulo (ROST). No entanto, a identificação de que existem figuras semelhantes deve ocorrer, em algum momento, por meio da apreensão perceptiva, como mencionado anteriormente. Para isso, há de se fazer uso de conhecimentos prévios que garantam as propriedades necessárias e suficientes para que os três triângulos retângulos sejam semelhantes, pois o enunciado não faz nenhuma menção nesse sentido. Mas inicialmente, a partir da Figura 10, pode-se definir outro RFg (Figura 11) que inclua os dados fornecidos pelo enunciado.

**Figura 11:** Registro figural a partir do RFg e RLn de partida que a atividade apresenta



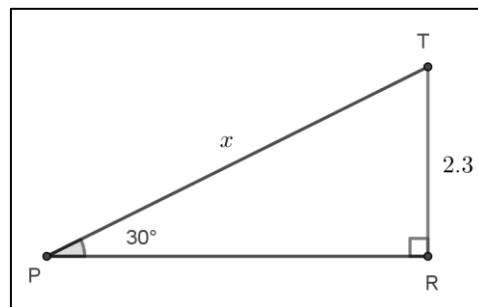
Fonte: elaborado pelas autoras.



Inicialmente, para determinar o valor de  $x$ , pode-se identificar o triângulo retângulo PRT (Figura 12), a partir da modificação mereológica homogênea e cuja representação figural permitirá, por meio da apreensão perceptiva, definir a razão trigonométrica mais adequada. No caso obtendo-se o RSb para, posteriormente, o RAl e, por meio da manipulação do mesmo, obter o valor desejado, conforme segue:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2,3}{x} \Rightarrow x = 4,6.$$

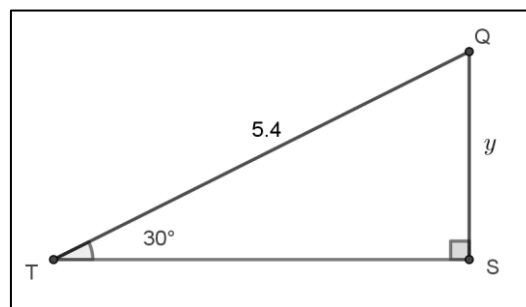
**Figura 12:** Triângulo retângulo identificado a partir da modificação mereológica homogênea



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Posteriormente, ainda com o auxílio da apreensão perceptiva e utilizando o valor encontrado para  $x$ , pode-se determinar a medida de  $\overline{TQ}$ , fazendo uso da manipulação no RNm:  $10 - 4,6 = 5,4$ . Com a medida deste segmento definida pode-se obter o valor de  $y$ , considerando o triângulo retângulo TSQ, semelhante ao triângulo PRT. A observância dessa semelhança é que permitirá atribuir ao ângulo  $Q\hat{T}S$  a mesma medida que  $T\hat{P}R$ . Assim, pode-se a partir de modificação mereológica homogênea, obter o RFG fornecido pela Figura 13 e ser definida a razão trigonométrica mais adequada para o cálculo do valor de  $y$ .

**Figura 13:** Triângulo retângulo identificado a partir da modificação mereológica homogênea



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Assim, com base na representação obtida pelo RFG, utiliza-se o RSb e, posteriormente, o RAl, a fim de obter o valor de  $y$ , ou seja:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5,4} \Rightarrow y = 2,7.$$

Finalmente, pode-se fazer uso do RLn para descrever a resposta da atividade proposta: O valor de  $x$  e  $y$  são, respectivamente, 4,6m e 2,7m.

Neste trabalho não são evidenciadas as modificações ótica e posicional classificadas por Duval (2005, 2012a) em relação à apreensão operatória.

### Algumas Considerações

Por meio deste trabalho de pesquisa buscou-se, à luz da teoria de registros de representação semiótica identificar alguns aspectos relevantes identificados em atividades em livros didáticos do Ensino Médio quando abordam a trigonometria do triângulo retângulo. Acredita-se que a pesquisa realizada e, em parte apresentada neste artigo, possa ser relevante na medida em que procura relacionar uma teoria que se fundamenta nos processos cognitivos de aprendizagem com atividades apresentadas em obras que servem de ferramentas didáticas para o planejamento e desenvolvimento de aulas de matemática.

Dessa forma, a teoria de RRS indica que no processo de ensinar um determinado conteúdo é importante contemplar estratégias no planejamento de aulas contendo atividades que envolvam diferentes registros de representação semiótica. Bem como, oportunizar nas mesmas a ocorrência de conversões e tratamentos a fim de contribuir para uma melhor aprendizagem. Em relação ao estudo de trigonometria no triângulo retângulo, entende-se que algumas dificuldades de visualização e compreensão possam ser amenizadas se o aluno puder ser capaz de reconhecer um mesmo objeto matemático em suas várias representações.

Em particular, nas atividades apresentadas pode-se notar a presença de representações e apreensões descritas por Duval (2003, 2005, 2009, 2012b) no contexto da trigonometria do triângulo retângulo. Além disso, pode-se observar nestas atividades, o que Duval (2012a) afirma em relação às apreensões perceptivas e discursivas estarem interligadas entre si. Aspecto reforçado por Moretti (2015), que indica que elas aparecem em maior ou menor grau, sendo que uma pode ser mais requisitada do que a outra para a resolução de um problema.

### Referências

ALMOULOU, S. A. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 125-148.

BOEMO, M. S. **Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no ensino médio**. 2015. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Coord.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: Educ, 2015. p. 167-188.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v.7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I)**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MORETTI, M. T., BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educ. Matem. Pesq.** São Paulo, v.17, n.3, p. 597-616, 2015.

PASA, B. C.; RICHIT, A.; MAY, G. C. Aprendizagem matemática com tecnologias na perspectiva dos registros de representações semióticas. In: RICHIT, A. (Coord.). **Tecnologias Digitais em Educação: perspectivas teóricas e metodológicas sobre formação e prática docente**. Curitiba, PR: CRV, 2014. p. 103-121.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.