

## TAREAS QUE PROMUEVEN EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

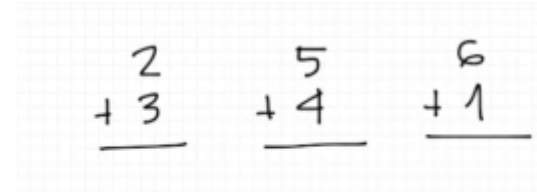
Jose Luis Lupiáñez

Departamento de Didáctica de la Matemática  
lupi@ugr.es

## Introducción

Un episodio real de aula

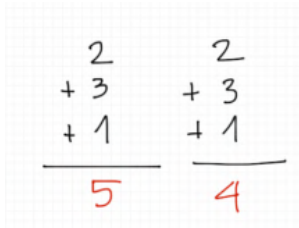
- 1º de Primaria
- Suma de números entre 1 y 9
- Los escolares son capaces de resolver sumas con dos sumandos del tipo:



$$\begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ + 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ + 1 \\ \hline \end{array}$$

## Introducción

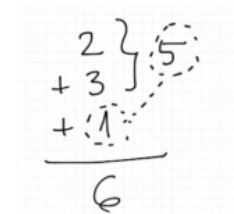
- La profesora introduce la suma con tres sumandos
- Se encuentra con este tipo de respuestas:



$$\begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ + 1 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ + 1 \\ \hline 4 \end{array}$$

## Introducción

- La profesora les explica cómo hacerlo mientras escribe en la pizarra lo siguiente:



$$\begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ + 1 \\ \hline 6 \end{array}$$

- Los escolares siguen sin hacerlo bien.  
¿Qué ocurre? ¿Qué puede intentar ahora la profesora?

Las tareas que propone un profesor a sus alumnos no deben ser arbitrarias...

Tampoco lo es el modo que tiene de gestionarlas en el aula

Ambas facetas resultan claves para promover el desarrollo de la competencia matemática de los escolares

## **¿Qué abordaremos?**

Ideas centrales:

- Qué es ser competente en matemáticas
- Criterios para el diseño y selección de tareas
- Reflexiones sobre la gestión del aula
- Más preguntas que respuestas...

## Competencia matemática

El término competencia se refiere a aquellos procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de sus conocimientos y capacidades, cuando actúa en una variedad de contextos

Muestra la riqueza cognitiva de esta disciplina, expresando los procesos y modos de actuación que tienen lugar por medio de los conocimientos matemáticos, no sólo por su dominio formal

## Competencia matemática

Las competencias responden a ciclos formativos amplios y comprensivos, a medio y largo plazo; implican el desarrollo intelectual y social de los escolares sobre campos disciplinares amplios o no convencionales

Su desarrollo se muestra al abordar tareas complejas en situaciones abiertas y al dar respuesta a problemas no convencionales

## Competencia matemática

- *Tarea:* demanda estructurada que un profesor plantea a los alumnos, que requiere su reflexión sobre el uso de las matemáticas
  - Tiene intencionalidad: aprendizaje o evaluación
- *Rutinarias y no rutinarias*

Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo a través de Internet mediante el *chat*. Tienen que conectarse a Internet a la vez para poder "chatear".

Para encontrar una hora apropiada para chatear, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo.

¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans? Escribe las respectivas horas locales en la tabla.

Lugar	Hora
Sydney	
Berlín	

136.	5.421 + 68.622 + 56.674 + 829.541 + 4.553.213 + 4.565.785
137.	24.540 + 1.796 + 195.494 + 159.516 + 140.824 + 4.593.543
138.	982.613 + 3.964.614 + 437.782 + 455.928 + 62.654 + 6.305
139.	25.900 + 4.017 + 89.116 + 125.454 + 145.124 + 54.323.428
140.	463.697 + 54.703 + 4.510 + 817.619 + 36.654.247 + 19.725
141.	66.988 + 5.813 + 7.554.446 + 4.451.046 + 3.465.827 + 4.489
142.	5.323.263 + 125.182 + 148.243 + 159.816 + 72.166 + 8.272
143.	30.105 + 187.690 + 9.040 + 764.622 + 788.666.670 + 1.545
144.	74.618 + 189.760 + 4.585.277 + 7.184 + 6.107.990 + 46.393
145.	9.857 + 485.919 + 159.857 + 14.181 + 9.176.617 + 101.677
146.	9.675.610 + 24.806.245 + 465.736 + 88.711 + 7.515 + 1.404
147.	66.459 + 248.537 + 45.787.636 + 8.623 + 316.162 + 99.142
148.	3.300 + 867.786 + 9.341.514 + 3.162.676 + 197.319 + 7.389
149.	574.692 + 4.896.456 + 495.692 + 8.255 + 15.576 + 981.754
150.	7.034.424 + 664.294 + 9.061 + 28.513 + 9.693.728 + 72.458
151.	3.529 + 148.427 + 69.945.219 + 7.579 + 67.554 + 4.380.227
152.	15.027 + 4.471 + 7.304 + 848.101 + 5.670.968 + 31.846.968
153.	80.814 + 7.982 + 1.554.171 + 35.049 + 103.256 + 3.770.302
154.	4.087 + 16.074 + 2.452.218 + 38.654 + 285.130 + 4.016.894
155.	30.216 + 667.540 + 4.027.313 + 3.303 + 654.741 + 539.344

## Diseño y selección de tareas



## Diseño y selección de tareas

- Los criterios para la selección y el diseño de tareas significativas obedecen a las características que éstas deben satisfacer
- Desde la didáctica general, se proponen varias de esas características
- Pero la especificidad de la matemática, hace imprescindible reflexionar sobre las tareas desde un punto de vista particular

## Diseño y selección de tareas

1. Unas matemáticas sólidas y coherentes
2. Las relaciones entre diferentes representaciones
3. Situaciones significativas
4. Unas expectativas de aprendizaje definidas (objetivos / vínculo con competencias)
5. Diferentes niveles de complejidad

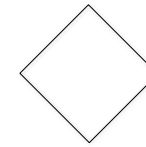
## 1. Matemáticas sólidas y coherentes

- ¿En dónde reside la solidez y la coherencia de las matemáticas?
  - Significado conceptual / procedimental
  - Relaciones y propiedades relevantes

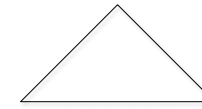
*Saber sumar consiste en aplicar, correctamente, el algoritmo tradicional*

## 1. Matemáticas sólidas y coherentes

- ¿En dónde reside la solidez y la coherencia de las matemáticas?
  - Significado conceptual / procedimental
  - Relaciones y propiedades relevantes



Esto es un cuadrado



Este triángulo es rectángulo

## 1. Matemáticas sólidas y coherentes

- ¿En dónde reside la solidez y la coherencia de las matemáticas?
  - Significado conceptual / procedimental
  - Relaciones y propiedades relevantes

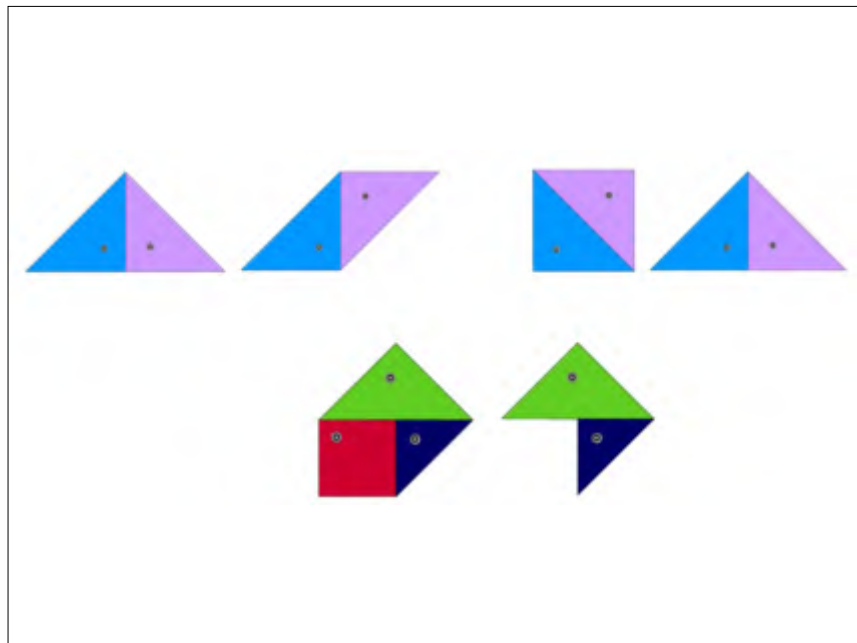
Si un bebé tiene 2 dientes con 8 meses, ¿cuántos tendrá con 24 meses?



## 1. Matemáticas sólidas y coherentes

- ¿En dónde reside la solidez y la coherencia de las matemáticas?
  - Significado conceptual / procedimental
  - Relaciones y propiedades relevantes

*¿Qué relación existe en el área y el perímetro de los siguientes parejas de figuras?*



## 2. Relaciones entre SR

- Las nociones matemáticas siempre admiten diferentes formas de representarlas
- Esas diferentes representaciones:
  - Nos permiten trabajar con ellas
  - Destacan diferentes facetas de esas nociones
  - Se organizan en sistemas, de acuerdo a características comunes:
    - Simbólico
    - Verbal
    - Numérico
    - Gráfico
    - Geométrico
    - ...

## 2. Relaciones entre SR

- Una misma noción se puede representar en uno o varios de esos sistemas.
- Cuando un escolar es capaz de usar y relacionar diferentes SR, está contribuyendo al desarrollo de su competencia matemática.
- Las tareas matemáticas deben involucrar el uso y las relaciones entre distintos SR.

## 2. Relaciones entre SR

1 En cada caso, escribe la fracción que expresa la parte coloreada.

$\frac{1}{2}$       —      —      —

2 Calcula las siguientes figuras en tu cuaderno y colorea en cada una la fracción que se indica.

3 Completa.

•  $\frac{1}{2}$  se lee ...      •  $\frac{1}{3}$  se lee ...      •  $\frac{1}{4}$  se lee ...

## 2. Relaciones entre SR



Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

Basura	Tiempo
Piel plátano	1-3 años
Caja cartón	0,5 años
Chicle	20-25 años
Periódico	Pocos días
Vaso plástico	> 100 años

Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras.

Da una razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos.

## 3. Situaciones significativas

- Las situaciones enmarcan las tareas en algún aspecto de la realidad
- El ser capaz de resolver tareas en una variedad de situaciones, facilita reconocer y usar las matemáticas en todos aquellos contextos en los que se pueden presentar
- Cuatro tipos de situaciones
  - Personales
  - Ocupacionales
  - Sociales
  - Científicas

## *Situaciones personales*

- Problemas enfocados en actividades propias del resolutor, de su familia o su grupo de amigos.
- *Ejemplos:* preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transportación personal, deportes, viajes, itinerarios personales y finanzas personales.

## *Situaciones ocupacionales*

- Problemas centrados en el mundo del trabajo y los trabajadores.
- *Ejemplos*: medir costos y ordenar materiales para la construcción, contabilidad y nóminas, control de calidad, inventario y programación, diseño y arquitectura, y la toma de decisiones relacionadas con el trabajo.

## *Situaciones sociales*

- Los problemas se enfocan en la comunidad propia, ya sea local, nacional o global.
- *Ejemplos*: sistemas de votación, el transporte público, el gobierno, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, las estadísticas nacionales y la economía.
- Aunque los individuos se involucran en estas cuestiones de una manera personal, el foco de los problemas es en la perspectiva de comunidad.

## *Situaciones científicas*

- Los problemas se relacionan a la aplicación de las matemáticas al mundo natural y a asuntos y temas relacionados con la ciencia y la tecnología.
- *Ejemplos*: el tiempo o el clima, la ecología, la medicina, la genética, la medición, y el mundo mismo de las matemáticas.
- Los ítems que son intra-matemáticos, donde todos los elementos involucrados pertenecen al mundo de las matemáticas, caen dentro de estas situaciones.

## **4. Expectativas de aprendizaje**

- El profesor debe organizar y promover el logro de dos niveles de expectativas:
  - Objetivos (específicos)
  - Competencia matemática
- Las tareas matemáticas siempre deben tener una intencionalidad
  - Aprendizaje
  - Evaluación



## 4. Expectativas de aprendizaje

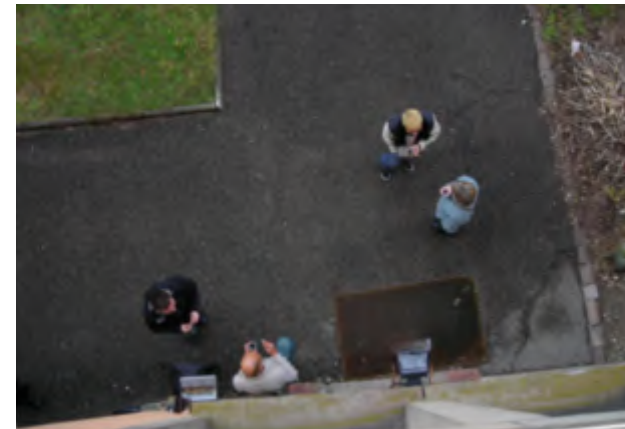
- Delimitar y acotar un contenido matemático no es suficiente para caracteriza una tarea
- ¿Qué finalidad persigue en términos del aprendizaje o la evaluación de los escolares?
- Veamos algunas tareas relacionadas con decimales... ¿persiguen todas el mismo objetivo?

## 4. Expectativas de aprendizaje

1. Resuelve:  
 $234,75+91,125$ ;  $12,998 \times 0,751$ ;  $0,002 \div 1,56$
2. Investiga si es posible encontrar un número que al multiplicarlo por 5, de como resultado otro número menor que 3. ¿Puedes encontrar varios ejemplos? ¿Tienen algo en común?
3. Describe situaciones en las tenga sentido o sea usual usar estos números: 0,5; 1,462; 0,0001.
4. Existe una marca comercial que utiliza el valor 0,0 para indicar que su cerveza no contiene alcohol. ¿Es posible que dicha cerveza contenga realmente alcohol?

En 1993 las reservas mundiales de gas natural se estimaron en 141,8 billones de metros cúbicos. Desde entonces se han consumido anualmente 2,5 billones de metros cúbicos. Estima cuándo se acabarán las reservas de gas natural

La siguiente fotografía se tomó durante un descanso en una reunión de trabajo. ¿Desde qué altura se tomó?



En una tienda de dulces,  $\frac{5}{8}$  de los productos son pasteles,  $\frac{2}{7}$  son tartas y el resto son diferentes clases de pan. Si en total la tienda tiene 224 productos, ¿cuántos hay de cada uno de esos tres tipos?



La plaza de España de Sevilla fue construida por Aníbal González para la Exposición Universal de 1929.



A continuación tienes representada, en un esquema, su forma geométrica.



Indica qué nombre recibe:

- La figura geométrica representada.
- El segmento AB
- El segmento OC
- El segmento DE
- La porción BC

## 5. Complejidad

- Existen muchas variables que afectan a la complejidad de una tarea matemática:
  - Lenguaje del enunciado
  - Cantidad de datos incluidos
  - Sistemas de representación involucrados,...
- Proyecto PISA: 3 niveles de complejidad de las tareas, según las demandas cognitivas exigidas
  - Reproducción
  - Conexión
  - Reflexión

### REPRODUCCIÓN

- Contextos familiares
- Conocimientos ya practicados
- Aplicación de algoritmos estándar
- Realización de operaciones sencillas
- Uso de fórmulas elementales

### CONEXIÓN

- Contextos menos familiares
- Interpretar y explicar
- Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación
- Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios

### REFLEXIÓN

- Diversidad de contextos
- Creatividad
- Ejemplificación y uso de conceptos
- Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos
- Generalizar y justificar resultados obtenidos

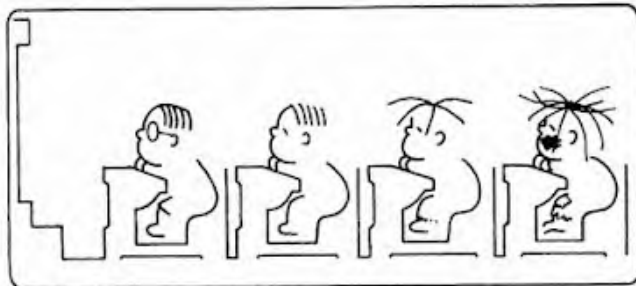
- Realiza la suma  $4578+9821$
- Si en mi hucha tengo 45€ y en mi cumpleaños me han regalado otros 50€. ¿Cuánto tengo en total?
- Inventa un problema que tenga que ver con algún deporte y que se resuelva con la suma  $75+37$
- Descubre qué números entre los 20 primeros no se pueden escribir mediante una suma de dos o más números consecutivos. Indaga la razón y explícala.

## Diseño y selección de tareas

En el aula de matemáticas, el profesor debe proponer tareas basadas en:

1. Unas matemáticas sólidas y coherentes
2. Las relaciones entre diferentes representaciones
3. Situaciones significativas
4. Unas expectativas de aprendizaje definidas (objetivos / vínculo con competencias)
5. Diferentes niveles de complejidad

## GESTIÓN DEL AULA



(1968) La place dans la classe

## Gestión del aula

- La ilustración anterior destaca un aspecto que tiene que ver con la labor de gestión del aula: organización de los alumnos
- Pero son muchas más las variables que intervienen en el proceso de dinamización del aula
- Aquí sólo desarrollaremos algunas:
  - Comunicación
  - Organización de los alumnos
  - Ambiente de aprendizaje

## Comunicación

- Se genera mediante los diferentes mensajes producidos por alumnos y profesor, que emplean a menudo terminología matemática
- Estos mensajes pueden ser orales, escritos o incluso gestuales
- Aunque normalmente la comunicación en el aula la dirige el profesor, éste puede fomentar una participación activa de los escolares

## Comunicación

- Distintos modos fundamentales de comunicación entre dos o más individuos:
  - *Exposición*: uno de ellos narra una historia o expone una idea
  - *Cuestionamiento*: uno de ellos hace preguntas a los otros
  - *Discusión*: todos interactúan exponiendo ideas y haciendo preguntas unos a otros

## Comunicación

- *Exposición*
  - La puede realizar el profesor o los escolares
  - Son habituales cuando los profesores presentan un nuevo concepto, o describen y ejemplifican un procedimiento
  - Cuando un escolar presenta una idea o una resolución, muestra mucho del conocimiento de las matemáticas que posee y cómo lo pone en juego y expresa

## Comunicación

- *Cuestionamiento*: Sucesión de preguntas con alguna finalidad. Posibles preguntas:
  - Orientación: Un alumno no encuentra la regularidad en la secuencia 1, 3, 6, 10, 15...  
¿Qué diferencia hay entre este término y este?  
¿Y entre estos dos?
  - Confirmación: ¿Cuánto es  $5+5$ ? ¿Qué es un triángulo? ¿Qué instrumento de medida necesito?
  - Profundización: ¿Cómo has llegado a ese resultado? ¿Qué opinas de lo que dice Luis?

## Comunicación

- *Discusión*
  - Es el modo clave para interactuar entre profesor y alumnos
  - Siempre tiene una finalidad: resolver una tarea, validar una solución, hacer un balance,...
  - Una discusión entre alumnos puede ser muy reveladora de su pensamiento

- P. ¿Cuánto es 4,38 por 100?
- A1. Creo que... 4,3800
- P. ¿Y qué piensa el resto?
- A2. Sí, yo también lo creo: 4,3800
- A3. No, no es. Es 438
- P. ¿Qué piensas ahora, A1?
- A1. Es 4,3800. Sólo hay que añadir dos ceros
- P. ¿Y qué pasa con esos dos ceros al final?
- A3. No hacen nada
- A1. De acuerdo. No hacen nada
- A3. ¿Por qué están ahí entonces?
- A1. Porque tienes que añadir dos ceros
- A3. Pero no hacen nada
- A1. Tú puedes tener 4,3800 o 4,38
- P. Entonces, tú crees que la respuesta debería ser 4,38 o 4,3800
- A1. Sí. Es lo mismo. No hacen nada

## Comunicación

- Dejar una pausa tras cada pregunta (aunque alguno levante rápido la mano)
- No responder las propias preguntas (para que los escolares no sientan que no tienen que responder)
- Enfatizar el “¿Por qué?” (eso puede alentar la discusión entre los propios escolares)
- Limitar el uso de preguntas que se basan en aspectos memorísticos (porque pueden recitar sin saber lo que dicen)
- Facilitar que los alumnos reaccionen a respuestas de sus compañeros
- Todos los alumnos deben estar oyendo / participando
- Algunas buenas preguntas pueden equivaler a un discurso expositivo

## Organización de los alumnos

- Describir diferentes organizaciones de aula que hayáis observado en las prácticas
- Individualmente, por parejas, en pequeños grupos o en gran grupo
- ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene cada uno?
- ¿Qué finalidad pueden perseguir en el aula de matemáticas?

## Organización de los alumnos

MODO	USO	INTERÉS
Gran grupo	Presentar materia Conducir debates Plantear cuestiones	Negociar significados Buscar acuerdos Produce aportes ricos
Grupos pequeños	Investigaciones Proyectos	Enfatiza la argumentación División de tareas por cualidades
Parejas	Tareas relativamente estructuradas Problemas	Intercambio positivo muy próximo
Individual	Ejercitación Problemas Memorización	Fomenta la responsabilidad personal y la autonomía

## Ambiente de aprendizaje

- Todo lo considerado hasta ahora, influye en el ambiente de aprendizaje que se genera en el aula de matemáticas
- También está condicionado por lo que el profesor permite, prohíbe y promueve en clase:
  - ¿Pueden los alumnos intervenir libremente?
  - ¿Solicita él su intervención?
  - ¿Pueden intercambiar opiniones con sus compañeros?
  - ¿Todos los alumnos reciben el mismo trato?
  - ...

## Ambiente de aprendizaje

- Planificar el tiempo necesario para explorar las matemáticas con profundidad y para que los escolares se familiaricen con ellas
- Usar apropiadamente los espacios y materiales
- Ofrecer un contexto que fomente el desarrollo de la competencia matemática en los escolares:
  - Trabajando individual y colaborativamente
  - Afrontando retos intelectuales y la resolución de problemas
  - Planteando cuestiones y conjeturas y defenderlas con argumentos matemáticos

## En resumen...

- El desarrollo de la competencia matemática de los alumnos implica una reflexión sobre el significado de las propias matemáticas y de la actividad docente en el aula
- Cuestiones y ejemplos para la reflexión
- Siempre es posible una nueva orientación, que no implica dejar de lado lo ya conseguido