AS TRANSFORMAÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Geslane Figueiredo Santana[1]
geslanef@hotmail.com

Resumo
Este artigo se propõe a estudar as transformações que o conceito de função sofreu ao longo do tempo. Para isso são apresentados os trabalhos de Euler, Cauchy e Boutroux, entre outros. Fica evidenciada que a transformação do conceito de função transcorreu paralelamente ao conceito de função contínua. Finalmente se mostra como o princípio da complementaridade harmoniza as diversas interpretações atuais do conceito de função.

Palavras-chave: Educação Matemática. História da Matemática. Função. Função contínua. Euler. Cauchy. Broutroux. Complementaridade.

No início do século XIX floresceu um novo movimento com um entendimento composto por novos objetos trazidos para o pensamento, a partir dos quais foram gerados novos conhecimentos. O conceito de função foi uma peça fundamental para que todas essas ideias afluíssem. Otte (1993, p. 223), afirma que este conceito "representa o verdadeiro núcleo da famosa 'revolução do rigor', introduzida pelo *Cours d'Analyse*, de Cauchy (1821). Tentava-se reduzir o conceito de função ao discreto, à aritmética dos números naturais, e assim eliminar a continuidade". Ocorreu um desligamento entre o conceito de função e as modalidades concretas, e isso trouxe certas dificuldades cognitivas, que permanecem até hoje.

De acordo com Otte (1993) a identificação entre conceito e símbolo, que fazia da forma de representação simbólica da função uma característica fundamental da continuidade, trouxe grandes dificuldades e imprecisões, pois a mesma função poderia ser caracterizada como uma função contínua e também por representações descontínuas.

Otte (2007) escreveu:

"A propriedade básica de uma função matemática abstrata é sua continuidade. Como Bochner observa, "as concepções de função e de continuidade evoluiram simultaneamente" (Bochner, 1974). Em sua *Introductio in analysin infinitorum* de (1748), Euler definiu uma função contínua de uma quantidade variável como uma

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT). Docente da Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) – Campus de Sinop – MT.

expressão analítica composta de um modo qualquer por essas variáveis e constantes (Euler, 1748, vol. I, p. 4), tal que "uma simples mudança de notação será suficiente para transformar uma função contínua em uma função descontínua, e reciprocamente", como Cauchy tinha observado (Cauchy, 1821, tomo 8, p. 145).

Cauchy, depois de ter demonstrado a inconsistência dos esforços de Euler, revisou toda a abordagem, transformando a Matemática numa teoria extensional. Tornou-se claro que uma função matemática contínua tinha que ser concebida como uma classe de equivalência de representações concretas dela, mais do que ser identificada como alguma de suas possíveis representações, com o Axioma da Extensionalidade fornecendo a relação de equivalência constitutiva.

Uma função no sentido de Cauchy ou de Dirichlet deve ser, portanto, vista como uma classe de equivalência de expressões analíticas e fórmulas. E Lebesgue generalizou o conceito de função ainda mais, assumindo que a relação de equivalência deveria valer sempre, exceto para os conjuntos de medida zero. O desenvolvimento, então, vai das funções contínuas para as funções mensuráveis, as quais acima de uma inspeção pragmática deveriam cobrir todas as funções consideradas na Análise. Portanto o desenvolvimento do conceito de função reflete o desenvolvimento da Análise durante o século XIX e o começo do século XX.

Dessa maneira, é possível, a partir de Cauchy, identificar conjuntos de funções por certas propriedades suas e, em geral, raciocinar sobre essas funções sem representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de dar uma função linear diretamente pela expressão $f(x) = ax$, Cauchy prova que uma função contínua, tendo a propriedade (aditiva) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pode ser representada simplesmente por $f(x) = ax$ (Cauchy, 1821, p, 99-100). O que Cauchy realmente alcançou foi uma nova compreensão de conceitos matemáticos, de acordo com os quais um conceito será definido, como Schlick depois disse a respeito das definições axiomáticas de Hilbert, pelo fato de que certas conclusões podem ser feitas sobre ele".

A versão sintética da Matemática, como apareceu tanto na Geometria de Euclides como nos cálculos, fórmulas e construções da Álgebra e Análise Algébrica de Leibniz até Euler, foi substituída pela complementaridade de uma sintaxe formal (intensão de conceitos), representada pelos sistemas de axiomas formais no sentido de Grassmann, Peano ou Hilbert e a Teoria de Conjuntos (extensão de conceitos).

O edifício da ciência clássica, com suas grandes questões filosóficas foi estruturado na época de Galileu (1564-1642), Descartes (1596-1650), Newton (1643-

1727), Leibniz (1646-1716) e filosoficamente resumido na *Crítica da Razão Pura* de Kant (1724-1804). Entretanto, esse edifício teve sua estrutura abalada no início do século XX com a introdução dos princípios da relatividade e da mecânica quântica pelos físico-matemáticos: Planck (1858-1947), Einstein (1879-1955), Bohr (1885- 1962), Broglie (1892-1987), Heisenberg (1901-1976) (Silva, 1972, p. 6-7).

Durante a *Revolução Industrial*, as ciências sofreram uma radical teorização e foram transformadas numa instituição social. Temos, portanto, que concordar – e Auguste Comte foi um dos primeiros a ver isso – que não podemos mais basear nossa análise da História das Ciências somente com considerações da Epistemologia – como Kant fazia – mas, temos que analisar a Matemática e as Ciências como produtos da história cultural da Humanidade, e não da natureza ou do cérebro humano.

O fator essencial da transformação do conceito da realidade segue da concepção da realidade como uma prática e uma realidade, mais do que algo estático e puramente objetivo. Se isso é assim, então a formalização e a matematização em progresso incluirão a atividade e o pensamento do ser humano. Toda teoria começa com uma representação da realidade – e não pelas coisas em si – porque todo pensamento se estabelece por meio de signos. Assim, a realidade, que fica estabelecida a partir do fim do matematizado século XVIII do Iluminismo, inclui nossa atividade humana.

O grande matemático francês Henri Poincaré, tio de Pierre Boutroux, escreveu dois pequenos livros nos quais ele tentou aceitar os termos com algumas mudanças.

Ele escreve, por exemplo, "Curioso! Se relermos as obras dos antigos, seremos tentados a classificá-los todos entre os intuitivos. E, contudo, a Natureza, e sempre ela, é pouco provável que tenha começado a criar neste século espíritos amigos da Lógica. …. Não foram os espíritos que mudaram, foram as ideias; os espíritos intuitivos permaneceram os mesmos, mas seus leitores exigiram deles mais concessões. Qual é a razão dessa evolução? Não é difícil descobri-la. A intuição não pode nos dar o rigor, nem mesmo a certeza. Nós percebemos isso cada vez mais" (Poincaré, 1995. p. 16; ver também Poincaré, 1993).

Boutroux lamentou a substituição do conceito de função pela teoria dos conjuntos, algo que serve bem aos propósitos de um lógico, mas não aos de um matemático. E Poincaré – na revisão do seu posterior "*Foundations of Geometry*" (1899) – acusa Hilbert de transformar a Matemática num negócio de "caixas pretas". Ian Mueller tenta corrigir essa impressão:

“Como Poincaré percebeu, Hilbert tornou clara a possibilidade de mecanizar a geometria elementar. Todavia, a possibilidade de mecanização é bem diferente da troca do verdadeiro raciocínio matemático simples pela prova mecânica que Hilbert fez do teorema 3. Mesmo suas formulações lógicas eram somente representações do raciocínio matemático simples, não substitutos dela” (Mueller,1981).

Em 1900 ocorreu o II Congresso Internacional dos Matemáticos em Paris, onde Henri Poincaré apresentou o artigo “*A Intuição e a Lógica na Matemática*” enquanto David Hilbert apresentou os seus famosos 23 problemas da Matemática, que considerava importantíssimos para o progresso da Matemática de sua época. Essa diferença começava a indicar o contraste que ficava cada vez mais patente entre o progresso da Matemática avançada e as ciências exatas.

Enquanto isso na Física, Planck e Albert Einstein criaram novas teorias.

> “Entre 1900, quando Planck fundou a Mecânica Quântica, e 1905, quando Einstein criou a Teoria da Relatividade Restrita, grandes mudanças se produziram na Física, graças às quais, no decorrer do século, modificou-se a nossa concepção do mundo.” (Saint-Sernin, 1998, p. 69).

Neste período são notadas também certas divergências na Química. Alguns químicos apresentavam certa resistência em aceitar as concepções atômicas ou corpusculares da matéria.

> “Mesmo depois que Dalton, Gay-Lussac, Berzelius e tantos outros haviam mostrado a grande utilidade das teorias atômicas para explicar as leis de combinação dos corpos, eminentes químicos como Ostwald, Duhem e outros, em pleno século XIX e começo do século XX, relutavam em aceitar os princípios da teoria cinética dos gases que resultavam, aliás, da aplicação da dinâmica newtoniana às partículas elementares da matéria.” (Silva, 1972, p. 90-100).

No campo da Biologia os avanços não foram muitos até início do século XIX, devido à interferência dos conceitos religiosos e morais. Contudo, em 1859, Charles Darwin publica o seu livro *A origem das espécies*, explicando a evolução dos seres vivos por meio da seleção natural. Esta teoria trouxe grandes impactos não apenas para a Biologia, mas também para outras ciências, inclusive para a Matemática e sua filosofia.

Nesse contexto de grandes mudanças, tanto na sociedade como na ciência, encontra-se o francês Pierre Boutroux, que em 1908 iniciou sua carreira como professor de Cálculo Integral em Poitiers. Em 1920, escreveu *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans le Temps Modernes* (Boutroux, 1920), que viria a ser o seu trabalho mais importante.

Nessa obra, Boutroux procura delinear o desenvolvimento da Matemática como um todo, objetivando trazer uma melhor compreensão sobre a História da Matemática, a qual ele divide, desde a Antiguidade até o século XIX, em três períodos:

I. Período de Platão (429-348) e Euclides (300 a.C-260 a.C)
II. Período de Descartes (1596-1650), Leibniz (1646-1716) e Kant (1724-1804)
III. Período de Bolzano (1781-1848) e Cantor (1845-1918)

Segundo ele, os períodos I e II foram dedicados a um ideal sintético da Matemática e são caracterizados por uma harmonia pré-estabelecida entre o objeto e o método. Broutroux escreve:

> "... supõem um tipo de harmonia pré-estabelecida entre o objeto da ciência matemática, entre os objetos que esta ciência almeja e os procedimentos que lhe permitem atingir estes objetos" (Boutroux, 1920, p.193, tradução nossa).

Do período II para o período III aconteceu uma ruptura, uma revolução, uma quebra entre os meios e os objetos da Matemática, assim explicadas por Boutroux:

> "O que primeiro nos chama a atenção, quando comparamos a Matemática de nosso tempo àquela das épocas anteriores, é a extraordinária diversidade e o aspecto imprevisto dos caminhos e os desvios nos quais esta enveredou-se, é a aparente desordem em que ela executa suas idas e vindas, são suas manobras e mudanças de frente contínuas. A bela unidade que Euclides havia dado a geometria e que Descartes queria conferir à álgebra parece irremediavelmente perdida." (Boutroux, 1920, p.194, tradução nossa).

O método sintético é um cálculo, portanto uma combinação de signos, que reduzia a ciência a um trabalho de combinação mecânica. Os matemáticos se preocupavam com o caminho para se chegar aos resultados e só se interessavam pela maneira ou pelo método.

O método analítico, na Matemática, surge por volta da metade do século XIX. O matemático desta época pode ser comparado com:

> (...) um construtor, um generalizador, o matemático tornou-se uma espécie de inspetor, que analisa à maneira de um químico, uma matéria estranha e infinitamente complexa, é também, se quiser um explorador, com a tarefa de se orientar em um continente desconhecido, e que busca descobrir as riquezas, as regiões "interessantes", sem aliás, saber qual lado deve exatamente avançar e dirigir sua pesquisa para atingir seu objetivo (Broutroux, 1920, p. 211, tradução nossa).

Analisando por este prisma, a Geometria Analítica de Descartes, a Análise Algébrica de Leibniz do século XVII e XVIII, que são baseadas na combinação de signos, são sintéticas. Já a Matemática Pura dos séculos XIX e XX, que é uma ciência de conceitos, é analítica. Não se preocupa com o caminho, a tarefa ou a demonstração, mas com o próprio objeto. Boutroux deixou bem claro isto:

> “O que costumava ser mais interessante, era a demonstração, que foi os processos e o sucesso dos cálculos; os resultados e as combinações obtidas podendo evidentemente divergir em todos os sentidos e ser multiplicado ao infinito, não se tinha lugar para atar um grande valor a sua enumeração; a unidade que perseguia a ciência não podia ser uma unidade de método. Atualmente, ao contrário, isto é que conta é o resultado que dá ao trabalho sua unidade; os artifícios da demonstração são apenas trabalhos de arte sem os quais, nós que não sabemos voar, estaríamos fora do estado de superar as dificuldades e os acidentes do terreno que se encontram sobre nosso caminho [...]. As verdades matemáticas são fatos objetivos, independente de nós e que descobrimos e analisamos, de certa maneira, exteriormente [...]. Inclinamo-nos, por outro lado, a ver na demonstração o instrumento e não o fim da ciência.” (Broutroux, 1920, p. 211-212, tradução nossa).

E prossegue:

> “O objetivo do matemático da modernidade compor, a partir de elementos simples, a união cada vez mais complexa e construir a partir das peças, sua própria indústria, o edifício da ciência, esta parecia ser a tarefa do matemático daí em diante, onde os objetos da Matemática se tornaram o próprio conceito.” (Boutroux, 1920, p. 182, tradução nossa)

As maiores evidências, sobre este assunto, podem ser constadas no trabalho de Cauchy, que trataremos mais à frente.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Suíça e em vida publicou cerca de 530 trabalhos entre artigos e livros. Sendo suficiente para as exigências da Matemática do século XIX, Euler não pensava em função de um modo formal, mas, na verdade, confundia uma função com suas representações, fossem essas representações uma curva traçada à mão livre sobre um plano ou “qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes” (Boyer, 1968, p. 306).

Euler explicava a diferença entre função contínua e função descontínua segundo a sua visão baseada nos signos e na combinação de signos e em fórmulas relacionadas à Matemática daquela época. Para ele, uma função é contínua quando é formada por uma única expressão analítica, enquanto as funções formadas por mais de uma expressão analítica, mesmo que o gráfico fosse formado por apenas uma curva, eram consideradas descontínuas (Palaro, 2006, p. 115).

Na verdade, não existia uma definição geral para o conceito de função. Havia vários tipos de funções como funções trigonométricas, funções transcendentais, funções lineares etc., as quais eram estudadas e definidas separadamente. Algumas dessas funções eram classificadas como funções contínuas, outras não.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) forneceu uma definição satisfatória para o conceito de função:

> “Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si, de tal modo que, sendo fornecido o valor de uma delas, pode-se obter os valores de todas as outras,

> concebe-se normalmente estas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe, então, o nome de variável independente; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que se chamam de funções desta variável." (Cauchy, 1899, p. 31, tradução nossa).

Após definir função, Cauchy define o conceito de limite e infinitésimos. Ele não se satisfaz com o conceito de função dado por Euler, baseado em símbolos. Ele pensa em função contínua à base do próprio conceito de contínuo. Para tanto, deu uma definição para função contínua totalmente por meio de conceitos, que transformou a teoria extensional da matemática:

> Seja f(x) uma função da variável x, e suponhamos que, para cada valor de x intermediário entre dois limites dados, esta função admita constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor x compreendido entre estes limites, atribui-se à variável x um acréscimo infinitamente pequeno α, a própria função receberá por acréscimo a diferença f(x+α)-f(x), que dependerá, ao mesmo tempo, da nova variável α e do valor de x. Isto posto, a função f(x) será, entre os dois limites atribuídos à variável x, função contínua desta variável, se, para cada valor de x intermediário entre limites, o valor numérico da diferença f(x+α)-f(x), decresce indefinidamente com aquele de α. Em outros termos, a função f(x) permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados, se entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno dado, a variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função. Diz-se ainda que a função f(x) é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, função contínua dessa variável, todas as vezes que ela é contínua entre dois limites de x, mesmo muito próximos, que contém o valor do qual se trata (Cauchy, 1899, p. 43, tradução nossa).

E relata:

> "Falando da continuidade das funções, eu não pude deixar de apresentar as propriedades principais das quantidades infinitamente pequenas, propriedades que servem de base ao cálculo infinitesimal" (Cauchy, 1899, p. ii, tradução nossa).

E destaca:

> "Segundo a definição de Euler [...] uma simples mudança de notação será suficiente, para transformar uma função contínua em descontínua e vice versa [...]. Assim, a característica da continuidade de funções proposta sobre o ponto de vista ao qual, os geômetras abordaram, é uma característica vaga e indeterminada" (Cauchy, 1844, p. 116-117, tradução nossa).

Um perfeito exemplo da distinção de ideias a respeito da continuidade de função entre Euler e Cauchy é apresentado por Belhoste:

> "A função *f* definida em [0,1] por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

> é descontínua no sentido de Euler, porque ela é definida por várias expressões analíticas diferentes sobre [0,1], mas ela é contínua no sentido de Cauchy." (Belhoste, 1985, p. 62, tradução nossa).

Uma função no sentido de Cauchy, portanto, deve ser vista como uma classe de equivalência de expressões analíticas ou fórmulas. A propriedade de ser contínua deve ser atribuída a essa classe, ao invés de ser uma propriedade atribuída a uma representação de uma função.

Este fato incomodou Boutroux e Poincaré, porque significava eliminar o conceito antigo de função, reduzindo-o à noção de conjunto. Para Boutroux "um dos mais importantes conceitos da análise moderna é o conceito de função matemática" (Boutroux, 1920, p. 164, tradução nossa). O autor complementa:

> Na própria análise, temos antes todo o trabalho da concepção de função y(x), isto é dizer, uma intuição da lei matemática após a qual, quando escolhemos um valor arbitrário de x, encontra-se certo valor de y para o mesmo desígnio, só depois esforçamo-nos para obter equações que exprimam o menor mal possível desta estranha relação das duas variáveis x e y (Boutroux, 1920, p. 206, tradução nossa).

Segundo Boutroux, o mais difícil para entender era exatamente o fato que entre dois termos variando simultaneamente existe uma relação constante. A dificuldade está em sempre distinguir entre representação, fato ou objeto representado.

Atualmente, para os matemáticos é mais fácil aceitar o conceito de função contínua. Entretanto no ensino esses problemas permanecem, pois, o professor é seduzido a ensinar por meio de exemplos. Porém um exemplo só pode ser usado à base de uma representação, e, por isso, é difícil aceitar esta concepção abstrata do conceito de função, que transforma logo de início o próprio conceito num objeto completamente desconhecido.

Como afirma Boutroux: "a correspondência matemática não é uma consequência das operações algébricas, mas é o próprio objeto que a determina" (1920, p. 206, tradução nossa). Ou seja, existe uma relação objetiva, que não deveria ser confundida com uma representação, mas que mesmo assim pode ser introduzida na atividade matemática através de uma representação particular. Boutroux criticou os lógicos porque estudavam uma função como um conceito, em extensão, ao invés de um conceito, em intensão.

Do mesmo modo em Geometria Analítica, as coisas mudaram fundamentalmente com a introdução dos vetores e da álgebra vetorial, porque vetores são movimentos e objetos, ou seja, intensões e extensões, ao mesmo tempo. Quando os números imaginários foram interpretados em termos da álgebra vetorial, isso ficou muito claro.

Dessa forma, o conceito de função pode se dividir historicamente em duas concepções. A primeira prevaleceu no período que antecedeu o século XVII. Este fundamento despontou do conceito de operação aritmética-algébrica, do conceito de algoritmo e das concepções gerais de máquina. Essa conceituação está intimamente relacionada ao conceito de funcionalismo, que era vinculada ao conceito de função das modalidades concretas.

No instante em que o homem não consegue mais controlar de um modo puro e intuitivo seus próprios rudimentos e seus métodos de trabalho é preciso que estas necessidades sejam entendidas e analisadas como realidades objetivas e regularmente estruturadas. Foram por meio dessas dificuldades para se construir uma relação mútua entre o estrutural e o funcional, que o desenvolvimento histórico do conceito de função se caracterizou (Otte, 1993).

A segunda concepção caracteriza a função apenas como uma lei de dependência entre uma grandeza variável e outra qualquer, utilizada para as alterações de estado e de natureza das coisas reais no tempo. Considera-se a função exclusivamente como uma correspondência entre valores do domínio e da imagem, procura-se um número ou uma grandeza desconhecida.

O conceito de função tem, assim, uma raiz dupla. Uma função é um operador de uma fórmula analítica, por um lado e, por outro, uma representação de uma lei da natureza ou de uma curva geométrica. Como observa Bochner, “as concepções de função e de continuidade evoluíram simultaneamente” (Bochner, 1974, p. 845).

Em meados do século XIX, despertou-se um novo olhar para o conceito de função matemática, associado a uma concepção abstrata e ao princípio de continuidade que consistia em ver uma função como um objeto único e unitário.

Começaram a surgir diferentes maneiras para se definir o conceito de função, Lobatschewskj (1793-1856), em 1834, escreveu:

> A definição geral exige que uma função de x seja um número para cada x dado, e que varie progressivamente com x. O valor de uma função pode ser dado por uma expressão analítica, ou por uma condição que forneça um meio de verificar todos os números e escolher um entre eles; finalmente, pode existir a dependência, mas permanecendo, todavia, desconhecida (Youchkevitch *apud* Otte, 1993, p. 231).

Suas palavras evidenciam esta pluralidade pela qual uma correspondência funcional poderia ser apresentada, e ainda representam a indispensabilidade para se estabelecer a ligação entre o conceito de função e a sua representação simbólica ou descrição estrutural. Existia a necessidade de olhar para função não só como uma correspondência de valores, e em 1870, Hermann Hankel (1839-1873), escreveu:

> Esta definição puramente nominal, que a seguir chamarei de definição Dirichlet, [...] não é suficiente para as necessidades da análise, pois funções desse tipo não possuem propriedades gerais, e assim são suprimidas todas as relações de valores funcionais para diferentes valores do argumento (Otte, 1993, p. 232).

Esta concepção abstrata possibilitou a interação entre a função como operação ou regra e a função como uma regra preexistente. Assim, a formação da nova concepção de função é agregada ao princípio da continuidade. O conhecimento é organizado de modo que uma aproximação infinita da realidade se torna complementar aos seus objetos. Desta maneira, tanto conceitos e objetos, como representações e objetos representados, se tornam complementares. Os conceitos se unem formando um círculo, uma cadeia fechada onde ambos se completam. Para Otte (1993, p. 232), isto surge como "uma circularidade que revela que significados conceituais são processos que se desdobram na atividade epistemológica [...] indicado no conceito de complementaridade".

Referências

BELHOSTE, B., 1985. *Cauchy: um mathématicien légitimiste au XIXe siècle*. Paris: Berlim.

BOCHNER, S., 1974. *Mathematical Reflections*. American Mathematical Monthly, 830859.

BOUTROUX, P., 1920 *L'Idéal Sientífique des Mathématiciens: dans l'antiquité et dans les temps modernes*. Paris: F. Alcan.

BOYER, C. B., 1968. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

CAUCHY, A. L., 1844. Mémoire sur les fonctions continues. In: *C. R. Acad. Sci*., v. 18. (re-impresso em Ouvres Completès, série 1, v.8. Paris).

______________., 1821. *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Paris. (re-impresso em Ouvres Completès, série 2, v.3. Paris: Gauthier-Villars, 1899).

______________., 1989. *Analyse Algebrique*. Paris: Jacques Gabay. (primeira publicação 1821).

DIEUDONNÉ, J.,1990. A formação da Matemática Contemporânea. Tradução de Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote. 292p.

EULER, L., 1748. *Intruduction in Analysin Infinitorum*. Reprint Springer Heidelberg, 1980.

KANT, I., 1997. *Crítica da Razão Pura*. Tradução de Manuela Santos e Alexandre Morujão. 4. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

MUELLER, I., 1981, Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid’s Elements, MIT Press.

OTTE, M., 1993. *O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à Filosofia e à didática da Matemática*. Tradução de Raul Fernando Neto et al. São Paulo: Editora da Unesp. 323 p.

________., 2007. Mathematical History Philosophy and Education, Educ. Stud. Math. Vol. 66: p. 243-255.

________., 2012. *A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática.* Cuiabá: EDUFMT.

PALARO, L., 2006. *A Concepção de Educação Matemática de Henri Lesbegue*. 242 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUCSP.

POINCARÉ, H., 1993. *A Ciência e a Hipótese*. Tradução de Maria Kneipp. Brasília: Editora Universidade de Brasília 180 p.

POINCARÉ, H., 1995. *O valor da Ciência***.** Tradução de Maria Martins. Rio de Janeiro: Contraponto. 180 p.

ROGUE, C., 2007. *Compreender Platão*. 3. ed. Tradução de Jaime A. Clasen. Petrópolis: Vozes. 207 p.

SAINT-SERNIN, B.., 1998. *A Razão no século XX*. Rio de Janeiro: José Olympio / Brasília: EDUNB. 272 p.

SILVA, M. R., 1972. *A evolução do pensamento científico*. São Paulo: HUCITEC. 374 p.