O PENSAMENTO DE JACOB KLEIN SOBRE A SIMBOLIZAÇÃO ALGÉBRICA NOS SÉCULOS XVI E XVII

Evilásio José de Arruda[1]
josearruda@terra.com.br

Resumo

O pensamento de Klein (1992) trata essencialmente da Epistemologia da transformação do conceito de número nos séculos XVI e XVII, evidenciando o desenvolvimento do pensamento algébrico moderno, numa perspectiva de transição do contemplativo (interpretativo) para o operativo (representativo), caracterizando a relação simétrica e assimétrica entre símbolo e objeto. A proposta deste texto é trazer traduções de partes significativas dessa obra, no sentido de evidenciar aspectos dessa relação na compreensão e construção de conceitos matemáticos.

Palavras-chaves: Educação Matemática. Epistemologia. Pensamento algébrico. Jacob Klein.

1. Introdução

Jacob Klein nasceu em 1899, em Liepāja (o nome antigo alemão da época foi: Libau) na Latvia, recebendo ensinamentos de Latim, Francês, Alemão, História, Filosofia e Matemática, desde o ensino ginasial. Em 1919, visitou Edmund Husserl em Freiburg (cidade alemã) com a intenção de estudar com ele, porém não encontrou vaga na universudade, pois, nesse período, haviam retornado os veteranos de guerra e os mesmos tinham prioridade. Então, Husserl o enviou a Marburg (cidade universitária alemã) onde recebeu o título de doütor em 1922, depois de estudar três semestres com a tese intitulada *The Logical and Historical Element in Hegel's Philosophy,* orientado por Nicolai Hartmann, o qual foi influenciado pela Fenomenologia de Husserl e pela Filosofia de Hegel.

Em 1933, Klein completou sua *Habilitationsschrift* (tese de pós-doutorado exigida para qualificação como professor). Essa tese é formada exatamente pela parte I e II de sua principal obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra', publicada originalmente em alemão em 1934 (Parte I) e 1936 (parte II) com o título

[1] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT). Professor da rede estadual de ensino do Estado do Mato Grosso.

‘*Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra’* (A Logística Grega e a Origem da Álgebra). A partir de 1937 até a sua morte em 1978, trabalhou em *Annapolis Maryland* nos Estados Unidos no *St. John’s College*, o qual foi fundado em 1696 e tem, desde a fundação, como componente principal de seu currículo, o estudo de grandes obras de todo o espectro do pensamento ocidental. Com essa ótica Eva Brann, em 1968 apresentou a tradução da obra de Klein para a Língua Inglesa com o título ‘*Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*’[2].

Em 1965, Klein publicou ‘*A Commentary on Plato’s Meno*’ em que apresenta comentários na forma de argumentos, linha por linha, sobre esse diálogo. A última publicação de Jacob Klein em vida foi *Plato’s Trilogy: Theatetus, Sophist, and Statesman* em 1977. Postumamente, foi publicada a obra *Lectures and Essays*, editada por Robert Williamson e Elliott Zuckerman, *St. John's College Press* em 1985 – na qual apresenta uma série de artigos e palestras onde Klein aprofunda seu pensamento sobre o processo de simbolização algébrica.

O objetivo principal de Jacob Klein, segundo a tradutora Eva Brann, diz respeito a relação entre o entendimento grego de *Arithmo* e o conceito moderno de número. A palavra grega *Arithmo* foi traduzida do texto Alemão como *Anzahl*: ‘um número de [coisas]’, para distingui-la de nossa forma moderna denominada *Zahl*: ‘número’. Tanto *Anzahl* como *Zahl* foram traduzidas simplesmente como ‘número’, contudo a ideia é mostrar que o ‘*arithmo*’ grego e o ‘número’ moderno não tem o mesmo significado, eles diferem em sua *intencionalidade*, pois o *arithmo* indica *coisas*, isto é um ‘número de ...’, enquanto o número indica *um conceito*, isto é, aquilo que tem quantidade e relações. *Intencionalidade* e *conceitualização* foram traduzidos a partir da palavra alemã *Begrifflichkeit*. Entendemos que *Anzah*l, para Klein (1992), significa número cardinal – definido como número usado na simples contagem para indicar quantos itens existem num conjunto (primeira intenção) e *Zahl* é o número como conceito, isto é, simbólico, e, está intimamente relacionado ao método de calculação (Logística moderna) em que a abstração, generalização e simbolização produz o símbolo, que por sua vez é concebido como objeto real do ponto de vista das operações (segunda intenção).

Seguem vários capítulos da obra principal ‘*O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’,* que aparecem por primeira vez em Português

[2] A obra de estudo deste texto é datada de 1992, pois esta é uma reimpressão integral da obra de 1968.

2. Proposta e plano de investigação de Jacob Klein em sua obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra'[3]

A criação da linguagem Matemática formal teve significado decisivo na constituição da Física Matemática moderna. Se a apresentação Matemática é considerada como um mero dispositivo, preferível somente por que os conteúdos da Ciência natural possam ser expressos por meio de 'símbolos' de maneira mais simples e exatas possíveis, então o significado do simbolismo, bem como os métodos da Física serão incompreendidos. É verdade que nos séculos XVII e XVIII ainda era possível expressar e comunicar descobertas relativas as relações "naturais" de objetos em termos não matemáticos, mas mesmo assim – ou melhor, particularmente depois – era a forma, o método geométrico (*mos geometricus*), que assegurava sua credibilidade e confiabilidade.

Depois de três séculos de intenso desenvolvimento, finalmente torna-se impossível separar o conteúdo da Física Matemática de sua forma. As apresentações elementares da Ciência Física, que até certo ponto não são matemáticos surgem completamente livres de pressuposições das derivações de conceitos fundamentais (tendo recorrido às 'intuições' imediatas) que estão ainda em voga, porém esse fato não deve nos enganar sobre a questão de que é impossível, e sempre foi impossível, capturar o significado do que hoje chamamos Física, independente de sua forma Matemática. Daí surgem insuperáveis dificuldades em que as discussões sobre as teorias Físicas modernas tornam-se complicadas, pois os físicos ou não físicos tentam desconsiderar o aparato matemático e apresentam resultados de pesquisa científica na forma popular.

A íntima conexão da linguagem Matemática formal com o conteúdo da Física Matemática decorre de um tipo especial de conceitualização que é concomitante com a Ciência moderna e que foi de importância fundamental para sua formação.

Antes de tratar da discussão dos problemas que a Física Matemática enfrenta atualmente, devemos investigar a origem e a estrutura conceitual de sua linguagem formal. Por esta razão, a questão fundamental no tocante as relações internas entre o

[3] O item 2 e 3 deste texto, são traduções da introdução e capítulo 9, respectivamente de parte da obra "Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra" de Jacob Klein.

aspecto 'teórico' da Matemática, Física e do 'experimento' com o procedimento 'sistemático' e 'empírico' no interior da Física Matemática, serão totalmente ignoradas neste trabalho. Limitaremos a tarefa de recuperar alguns graus das fontes que hoje estão quase totalmente escondidos da nossa moderna Matemática simbólica. Contudo, a investigação não vai perder de vista a questão fundamental, que está diretamente relacionada com as dificuldades conceituais surgidas no interior da F*ísica* atualmente. No entanto, superficialmente, sua formulação será determinada no decorrer deste estudo.

A criação da linguagem formal na Matemática é idêntica com a fundação da Álgebra moderna. A partir do século XIII até a metade do século XVI, o Ocidente absorveu a 'Álgebra' (*al-g'abrwa'l-muqabāla*) dos Árabes na forma de teoria das equações, provavelmente derivado da Índia e dos gregos. Nas fontes gregas estão presentes a influência da Aritmética de Diophantus em relação ao conteúdo, mas a sua forma é inconfundível com a Ciência Arábica – isto se evidencia no próprio *Liber Algorismi* de *Al-Khowarizmi*, a partir do século X.

Com a elaboração, particularmente na Itália, da teoria das equações que os Árabes tinham passado para o Ocidente, o texto original de Diophantus, já no século XV, começa a se tornar bem conhecido e influente. No entanto, foi a partir do último quarto de século XVI que Vieta compreendeu, ampliou e modificou a técnica de Diophantus de maneira crucial. Portanto, Vieta torna o verdadeiro fundador da Matemática moderna.

As apresentações convencionais da história deste desenvolvimento, de fato, não conseguem ver a importância do renascimento e assimilação da Matemática grega no século XVI. Entretanto, a Matemática simbólica é concebida e tratada naturalmente. Os interpretadores convencionais não estão suficientemente conscientes do *caráter* da transformação conceitual que ocorreu no decorrer desta assimilação, o que constitui condição indispensável do simbolismo matemático moderno**.** Além disso, a maioria das histórias-padrões tentam compreender a Matemática grega por meio do simbolismo moderno, como se tratasse de uma 'forma' externa que pudesse ser adaptado para qualquer 'conteúdo' desejável. Mesmo no caso de uma intenção genuína de investigação da Ciência grega, verifica-se que a pesquisa começa a partir de um nível conceitual que é desde o início, a respeito de conceitos fundamentais, determinado pelos modos do pensamento moderno. Desacoplar-se desse modo de interpretar a Ciência grega é a primeira preocupação de nossa empreitada.

Contudo, nosso objetivo não é avaliar o renascimento da Matemática grega no século XVI em termos de seus resultados retrospectivos, mas ensaiar o percurso de sua gênese prospectivamente. Na assimilação e transformação de Vieta da técnica de Diophantus, temos como se fosse um pedaço da emenda pela qual a 'nova' e antiga Ciência estão conectados. Mas, para ser capaz de esclarecer (lançar um olhar) às características essenciais desta assimilação e transformação, devemos primeiro de tudo olhar o trabalho de Diophantus do *ponto de vista de suas próprias pressuposições.* Somente depois podemos começar a distinguir a '*Ars Analytice'* (Arte Analítica) de Vieta dos fundamentos gregos de modo a revelar as transformações conceituais que estão expressas nele.

Deve ser dado à *Aritmética* de Diophantus um lugar de destaque no âmbito geral da Ciência grega-helenística para que possamos imaginar como pode ter sido sua pré-história. Contudo, isso nos conduz imediatamente a comparação dos fundamentos da *Aritmética* às 'Aritméticas' da literatura Neoplatônicas que forma seu fundamento, porém as categorias Neoplatônicas impediram a integração da *Aritmética* à literatura.

Jacob Klein (1992), investigou epistemologicamente o conceito de *Arithmos*, Logística (arte de calculação), Aritmética nos Neoplatônicos, Platão e Aristóteles. A partir dessa interpretação associada ao estudo da Aritmética de Diophantus, chega em Stevin, Vieta e Descartes para tratar da transformação conceitual entre *arithmo* e número, chegando ao entendimento de que o renascimento e assimilação da Logística grega nos séculos XVI e XVII conduziu ao entendimento *simbólico* do número que por sua vez clarifica a estrutura conceitual do simbolismo algébrico que é o seu produto.

3. Sobre a diferença entre a Conceitualização Antiga e Moderna

A 'nova' Ciência cujos fundamentos foram estabelecidos nos séculos XVI e XVII é diferente devido aos fatos circunstanciais. Nos séculos XVI e XVII os fundamentos 'naturais' são substituídos por uma Ciência já existente, cujos princípios são negados, cujos métodos foram rejeitados, cujo 'conhecimento' foi ridicularizado – pois, a vida do homem, como um todo, foi colocada acima de qualquer dúvida.

A *Ciência* surgiu como um bem humano inalienável, que pode de fato tornar-se aviltado e distorcido, mas o seu valor está fora de questão. Na base desta Ciência, cujos fundamentos reivindica validade, é agora erguida e reconhecida como sendo o edifício da 'nova' Ciência, mas construída em deliberada *oposição aos conceitos e métodos em relação* a Ciência antiga. É perfeitamente verdadeiro que, como apontou novamente, os fundadores da 'nova' Ciência – homens como Galileu, Stevin, Kepler e Descartes foram motivados por um impulso original, que é diferente da Ciência escolástica.

O interesse científico destes homens e de seus precursores surgiram em sua maioria de problemas da Mecânica aplicada, da arquitetura, da construção de máquinas, da pintura e da recém-descoberta óptica instrumental. No entanto, é fato que a estrutura conceitual desses novos conteúdos é derivada dos conceitos tradicionais. A constituição da *verdadeira* Ciência, do *verdadeiro* conhecimento induz a necessidade de reorientação contínua referente ao tradicional, consolidando com isso, em bases firmes o edifício da nova Ciência. Esta Ciência compartilha com a Ciência escolástica a maioria de suas pressuposições gerais no sentido de que a 'atitude científica' desenvolvida pela Ciência grega está em oposição a existência 'natural'. Além disso, a nova Ciência, retorna às fontes das Ciências gregas que tinham sido negligenciadas pela Ciência escolástica.

Embora, as fontes e pressuposições sejam, tanto da Ciência grega antiga como da escolástica, sua interpretação é completamente diferente da Ciência antiga. É esta interpretação do corpo da doutrina grega, que trouxe com ela a característica da transformação de todos os conceitos antigos que estão nos fundamentos não apenas de todas as formações de conceitos de nossa Ciência, mas também em nossa intencionalidade comum que é por sua vez derivada da Ciência antiga.

O que especialmente caracteriza a 'nova' Ciência e influencia seu desenvolvimento é *a concepção que ela tem de sua própria atividade*. Concebemos o desenvolvimento da Ciência grega como novo acesso, isto é, como elaboração e recuperação da cognição 'natural'. Vê-se não apenas como Ciência da N*atureza*, mas como Ciência '*natural'* – em oposição a Ciência *escolástica*.

A 'naturalidade' da Ciência grega foi determinada precisamente pelo fato de que ela surgiu a partir dos fundamentos 'naturais', de modo que é definida ao mesmo tempo em termos de sua distinção e de sua origem. Os fundamentos da 'naturalidade' da Ciência moderna é uma expressão de sua atitude polêmica em relação à Ciência. Esta postura especial da ‘nova’ Ciência fundamentalmente define seu horizonte, delimita seu método, sua estrutura em geral e o mais importante, determina o caráter conceitual de seus conceitos.

Na Ciência Grega, os conceitos são formados numa dependência contínua da experiência pré-científica ‘natural’, do qual o conceito científico é ‘abstraído’. O significado dessa ‘abstração’, por meio do qual o caráter conceitual de qualquer conceito é determinado, é o problema ontológico da antiguidade; torna-se esquematizado no problema dos universais da Idade Média, e, com o tempo desapareceu completamente. A ‘nova’ Ciência, por outro lado, geralmente obtém seus conceitos por meio de um processo polêmico contra os conceitos da Ciência escolástica tradicional.

Tais conceitos, não tem mais a ambiguidade dos significados causados pelos discursos comuns, onde o verdadeiro sentido se distingue de uma série de significados menos precisos. Não é mais a coisa pretendida pelo conhecimento do conceito do objeto dado *imediato*. Nada mais do que a conexão interna de todos os conceitos, seus relacionamentos mútuos, sua subordinação total ao edifício da Ciência, determina um sentido *único* tornando acessível a compreensão do conteúdo que é especialmente científico e relevante. Na sua própria evolução de conceitos no decorrer do combate à Ciência escolástica, a nova Ciência cessa a interpretação dos conceitos da *episteme* Grega preservada na tradição escolástica a partir do ponto de vista de seus fundamentos ‘naturais’; ao contrário, interpreta-os em referência a função que cada conceito estabelece com a Ciência como um todo. De forma que cada conceito novo obtido é determinado por *reflexão total sobre o contexto desse conceito*.

Todo conceito da ‘nova’ Ciência pertence a uma nova dimensão conceitual. A intencionalidade especial de cada um desses tais conceitos não são mais problemas: são indiferentemente o mesmo para todos os conceitos; é um meio além da reflexão, no qual o desenvolvimento do mundo ocorre. O mais recente esforço para fornecer fundamentos lógicos e firmes não altera os aspectos dessas situações.

Neste estudo tratamos apenas da história da formação de conceitos na Matemática. O que está sendo dito aplica-se também nesta área da Matemática. O desenvolvimento da Matemática não poderia ser isolado da história geral dos modos de compreensão do mundo, contudo um esforço árduo pode ser feito para configurar a Matemática numa disciplina independente. Indo mais além, a natureza da modificação que a Ciência Matemática do século XVI e XVII trouxe sobre as concepções da

Matemática antiga é *exemplar* para o modelo total do conhecimento humano nos últimos anos: o que estamos nos referindo é a íntima conexão entre o modo de '*generalização'* da 'nova' Ciência e o seu caráter como uma '*Arte'*.

A expressão mais característica dessa conexão é encontrada no formalismo simbólico e nas técnicas de calculação da Matemática moderna. Veremos exibido em tudo que segue, em particular, sua íntima relação entre o modo de generalização empregada pela nova Ciência e seu caráter de 'A*rte*' que determinou a moderna interpretação da Matemática antiga. Zeuthen não foi o primeiro a compreender o modo antigo de apresentar fatos matemáticos como 'Álgebra geométrica'.

Contudo, foi o primeiro a usar esse conceito consistentemente. A antecipação dessa interpretação pode surgir somente na base de uma insuficiente distinção entre *generalidade do método* e *generalidade do objeto* de investigação. O próprio Zeuthen conecta imediatamente seu conceito de 'Álgebra geométrica' como sendo um método geral que tem como objeto a 'magnitude geral'. Portanto, todos os problemas complexos apresentados pelos antigos em função de seu interesse científico foram centrados em questões relativas ao modo de ser dos objetos matemáticos. A Matemática antiga é caracterizada pela *tensão entre método e objeto*. Os objetos em questão (figuras e curvas geométricas, suas relações, suas proporções de magnitudes geométricas comensuráveis e incomensuráveis, números, etc.) conferem à pesquisa o seu direcionamento, porque é ao mesmo tempo seu ponto de partida e de chegada.

A maneira de determinar o método de investigação é mostrada especialmente no caso de provas de 'existência', isto é, demonstração de que o 'ser' de certo objeto é possível porque é desprovido de autocontradição. O problema de aplicabilidade 'geral' de um método é, portanto, para os Antigos o problema da 'generalização' dos objetos da Matemática em si. Este problema *eles* podem resolver somente na perspectiva de uma ontologia de objetos matemáticos.

Em contrapartida, a Matemática moderna e toda a interpretação da Matemática centra-se no *método enquanto tal*. Ela determina os seus *objetos, refletindo sobre o modo como eles se tornam acessíveis através de um método geral*. Portanto, argumentando a partir da 'generalidade' da apresentação em termos de segmentos no livro de 'Aritmética' de Euclides, ou seja, do fato de que as relações com *todos os arithmos* são considerados, então seus proponentes concluem que a 'generalidade' da apresentação é a intenção da 'magnitude geral'.

O que caracteriza essa ‘magnitude geral’ é sua indeterminação, que como tal, é um conceito que pode ser formado somente no reino do procedimento simbólico. Mas, a apresentação Euclidiana *não* é simbólica. A apresentação Euclidiana, sempre tem a intenção de *determinar* o número de unidades de medição, e isto sem *qualquer desvio através de uma ‘noção geral’ ou um conceito de uma ‘magnitude geral’*.

Cada número determinado de unidades de medição por medidas de distância *não* faz duas coisas que constitui o coração do procedimento simbólico: *não* identifica o objeto representado com os meios de sua representação e *não* substitui a determinação real de um objeto com a *possibilidade* de torná-lo determinado por um signo que, de fato, indica um determinado objeto e não dá uma ilustração intuitiva dele. Contudo, na apresentação linear do livro de ‘Aritmética’ de Euclides estão adaptados às exigências do tema do livro X, com o qual os livros anteriores têm uma conexão ‘sistemática’. No entanto, os objetos deste livro são *diferentes*, apesar de ter métodos *semelhantes*. Os livros VII-IX lida com números comensuráveis, enquanto o livro X, por outro lado, lida com magnitudes cujas razões não podem ser reduzidas a razão de números, e por causa disso são incomensuráveis.

Quando no livro de Aritmética um aritmético (calculista) ou mais exatamente uma proposição Logística é *geralmente* demonstrada com ajuda de linhas, isso no mínimo, não significa que exista um conceito geral de número e nem mesmo um conceito ‘geral’, isto é, números indeterminados correspondendo a esta prova geral. No segundo livro de Pappus ele apresenta os comentários do sistema de contagem e calculação de Apollonius no qual podemos ver diretamente a maneira em que a ‘aproximação linear’ geral pretende determinar somente números. Pois, aqui, como em Euclides, as simples ilustrações de linhas são adicionadas e identificadas por uma letra, de forma que surge a possibilidade de representar números pretendidos por essas letras. Contudo, isto não equivale à introdução e indicação do simbolismo.

As letras para indicar magnitudes e números parecem ter sido usadas já em Archytas. Sobre essas letras Tannery comenta: ‘A letra substitui bem um número qualquer ..., mas somente onde assume-se ser colocada; não simboliza um valor e não são utilizados nas operações’, isto é, *a letra não simboliza o valor de um número e não são operacionalizados*. Aristóteles, também usou tais letras na Matemática, por exemplo, na *Physics* e em *On the Heavens*; ele mesmo introduziu em suas investigações ‘lógicas’ e ‘éticas’. Mas, tal letra nunca é um ‘símbolo’ no sentido de significar o símbolo em si como ‘objeto’ em geral.

Na obra de Klein (1992) está traçado a transformação conceitual que permitiu o conceito de *arithmos* antigo aparecer como ‘número’ (‘Zahl’) – em oposição a ‘conjunto de números’ (‘Anzahl’) e *concomitantemente* como ‘*magnitude geral*’. Esta transformação é anunciada no final da Idade Média por crescentes interesses práticos, isto é, a disciplina Matemática aplicada. Ao contrário da Aritmética ‘teórica’ e Geometria (Aritmética e Geometria especulativa), tal como especialmente Boethius, usando fontes Neopitagóricos e Neoplatônicos, passou na Idade Média, a corresponder a disciplinas ‘práticas’ de Logística e medição (Aritmética e Geometria prática) são, agora preferidos. Estas disciplinas são consistentemente compreendidas como ‘*artes*’; aprendê-las significa dominar as ‘regras correspondentes de sua arte’. ‘Procedimentos habilidosos’, a ‘prática’ ou ‘*práxis*’ de calcular e medir é o objeto dessa doutrina. Agora, o momento significante dessa disciplina, seu primeiro sucesso, ou seja, quando essa disciplina ganhou reconhecimento como parte ‘oficial’ da Ciência, é precisamente a partir do seu caráter como ‘Arte’, que se pensa a dar-lhes a verdadeira dignidade teórica. Juntamente com isso a estrutura dos objetos com o que a Matemática lida é transformada.

Um novo tipo de generalização que pode ser denominado ‘abstração, generalização, simbolização’, que lida diretamente no estabelecimento de uma nova disciplina, isto é, a ‘analítica geral’, que assegura um lugar central na arquitetura da ‘nova’ Ciência. Todo esse processo é a nossa tarefa em descrevê-los em detalhes, iniciado principalmente pela reintrodução e assimilação da Aritmética de Diophantus.

4. Considerações Finais

Para Klein (1992), o método matemático teve papel decisivo na revolução do início dos séculos XVI e XVII, inserido no contexto da observação e experimentação, pois essa revolução transformou, cientificamente, a visão da Natureza e, nessa nova perspectiva, a Matemática foi fundamental. Como Galileu disse: ‘a Natureza está escrita em linguagem da Geometria’. É nesse sentido que Klein (1992) diz haver uma conexão íntima entre o início do simbolismo algébrico moderno e a Física Matemática, pois essa transformação ocorreu tanto na forma da interpretação da Natureza como dos conceitos matemáticos utilizados nessa mudança.

Isso significa que a obra de Klein (1992) tem um valor histórico por um lado, pois discute a ruptura e continuidade do início da modernidade, a partir da transformação do conceito de número e, por outro lado, fornece, a partir desse estudo, uma ideia do que significa explicar o mundo para a Ciência matematizada, ou seja, salvar as aparências (contemplativo) – criar modelos geométricos que expliquem o movimento dos corpos celestes ou mostrar a estrutura (regras e relações de funcionamento) dos fenômenos (representativos e operativos).

Referências

ANGUS, Ian. *Jacob Klein's Revision of Husserl's Crisis: A Contribution to the Transcendental History of Reification*. Disponível em http://www.ianangus.ca/klein.html. Acesso em 20 de setembro de 2012.

BOS, H. J. M. *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations"*. Disponível em http://www.jstor.org/stable/41133725. Acesso em 20 de fevereiro de 2013.

COSGROVE, Joseph K. *Husserl, Jacob Klein, and Symbolic Nature*. Disponível em http://digitalcommons.providence.edu/philosophy_fac/5. Acesso em março de 2011.

DESCARTES, René. *Descartes: Obras Escolhidas*.Tradução de J. Guinsburg, Bento Prado JR., Newton Cunha e Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2010.

GALILEU, Galilei. *O Ensaiador*. Tradução de Helda Barraco. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

HEALT, Sir Thomas. *Diophantus of Alexandria: A Study the History of Greek Algebra*. 2ª ed. New York: Dover Publications, 1964.

HOPKINS Burt. *The Philosophical Achievement of Jacob Klein*. Seatle University. Disponível em http://www.seatle.edu/workArea/DownloadAsset. aspx? id=59625. Acesso em 01 de outubro de 2012.

_____________. *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein*. Bloomington: Indiana University Press, 2011.

KLEIN, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra*. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

____________. *Lectures and Essays*. Editado por Robert B. Williamson and Elliot Zuckerman. Annapolis, Maryland: St. John's College Press, 1985.

MAHONEY, S. Michael. *The beginnings of Algebraic Thought*. Disponível em http://www.princeton.edu/~hos/Mahoney/articles/begginnings.htm. Acesso em 12/04/2012.

OTTE, Michael. *O Formal, O Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.

_____________. Complementarity, sets and numbers**.** In: *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, p.203 – 228. Netherlands: Springer. 2003.

_____________. *A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para Educação Matemática*. Cuiabá: Editora da UFMT. 2012.

OTTE, Michael; CAMPOS, Tânia M. M.; BARROS, Luiz G. X. Generalizing is necessary or even unavoidable. *Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico PNA*, 9(3), 143-164. 2015. [http://hdl.handle.net/10481/34987]

OTTE, Michael; CAMPOS, Tânia M. M.; ABIDO, Alexandre. Plato, Pascal and the dynamics of personal knowledge. In: *Educational Studies in Mathematics* n. 82, p. 397–415. Netherlands: Springer. 2013. DOI 10.1007/s10649-012-9435-5

PIAGET, Jean; GARCIA, Roland. *Psicogênese e História das Ciências*. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2011.