UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

María Consuelo Cañadas
Universidad de Zaragoza
mconsu@unizar.es

Encarnación Castro
Universidad de Granada
encastro@ugr.es

En este trabajo se presenta una metodología de investigación basada en la resolución de problemas para el análisis del razonamiento inductivo que llevan a cabo un grupo de 359 estudiantes que cursan 3º y 4º de ESO en España. Tras la justificación del interés en considerar las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2 como contenido matemático, se muestran las variables que han permitido identificar unos tipos de problemas adecuados para nuestro objetivo de investigación relacionados con ese contenido matemático. Finalmente, se considera la prueba escrita individual como modo de recogida de información y se introduce la forma en que se realiza la corrección de los problemas seleccionados teniendo en cuenta el razonamiento inductivo y las variables consideradas para la selección de los tipos de problemas.

Nuestra investigación continúa una línea sobre razonamiento inductivo iniciada con el trabajo de Ortiz (1993) en el seno del grupo de Pensamiento Numérico. A partir del trabajo de Ortiz, se han llevado a cabo otras investigaciones relacionadas con este proceso en diferentes niveles educativos: educación infantil (Fernández, 2001), educación primaria (Ortiz, 1997), educación secundaria (Castro, 1995; Cañadas, 2002) y niveles universitarios (Barreda, 2004). Nuestra investigación actual profundiza sobre el Trabajo de Investigación Tutelada (Cañadas, 2002), centrando nuestro interés en la descripción y caracterización del razonamiento inductivo empleado por alumnos del sistema educativo español de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

INFLUENCIA DE PÓLYA EN NUESTRA INVESTIGACIÓN

Destacamos a Pólya como el autor más influyente en nuestro trabajo desde una perspectiva teórica. Los aportes fundamentales de su trabajo se resumen a continuación:

[1] Este trabajo ha sido realizado dentro del Proyecto de Investigación "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática"-SEJ2006-09056

1. Necesidad de una actitud inductiva en matemáticas en la construcción del conocimiento, se requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones.
2. Importancia de la consideración del contenido matemático para el trabajo del razonamiento inductivo. Más concretamente, Pólya destaca la teoría de números, así como los desarrollos de series, las aproximaciones y los límites.
3. Identificación de varios pasos para un proceso *ideal* de razonamiento inductivo, que van desde el trabajo con casos particulares y, pasan por la formulación de una conjetura, llegando a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares.
4. La inducción se considera una estrategia importante para la resolución de problemas.
5. Resolución de problemas para trabajar el razonamiento de los estudiantes.

NUESTRO ESTUDIO PILOTO

El Trabajo de Investigación Tutelada (Cañadas, 2002) constituyó el estudio piloto de nuestro trabajo actual y el objetivo general de investigación era *estudiar la utilización que hacen los individuos del razonamiento inductivo cuando se enfrentan a la realización de unas tareas matemáticas no rutinarias*. Tras la realización de entrevistas semiestructuradas a 12 estudiantes de 3º, 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato en el momento en el que resolvían dos tareas matemáticas no rutinarias en las que los alumnos podían poner de manifiesto el razonamiento inductivo, presentamos una serie de pasos que se basaban en los indicados por Pólya, los cuáles permitieron analizar el proceso de razonamiento que habían seguido aquellos alumnos en las tareas que se les propusieron.

Posteriormente, en Cañadas y Castro (En Prensa) presentamos una propuesta de pasos para analizar el razonamiento inductivo *real* que llevan a cabo los estudiantes. En esta propuesta identificamos los siguientes pasos:

1. Observación de casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Búsqueda y predicción de patrones.
4. Formulación de conjeturas.
5. Prueba de conjeturas.
6. Generalización de conjeturas.
7. Justificación de conjeturas para el caso general.

Los aportes principales de esta propuesta se refieren al trabajo con los casos particulares, se observa el tipo de trabajo que se lleva a cabo con ellos y la forma en que se trabajan. Por otro lado, en el proceso de validación, se diferencia entre la comprobación de las conjeturas generales mediante los casos particulares, característicos de la primera fase inductiva de la inducción matemática; y la demostración formal en la que predomina el razonamiento deductivo.

La descripción del razonamiento inductivo en nuestra investigación se hace con base en estos pasos.

CONTENIDO MATEMÁTICO

Para continuar la investigación sobre el razonamiento inductivo, se menciona la necesidad de concretar el contenido matemático (Cañadas, 2002). El contenido matemático es un factor fundamental, tanto para el razonamiento (Pólya, 1966) como para la resolución de problemas (Novick y Basokk, 2005). Para cada tipo de problema, la estrategia empleada tiene relación con el dominio específico de conocimiento que se esté tratando (Newell y Simon, 1972). "No se puede pensar que el conocimiento de estrategias generales de pensamiento, por sofisticado que sea, puede suplir al conocimiento puntual del campo concreto" (De Guzmán, 1999, p. 237).

La Teoría de Números es presentada como un candidato idóneo para el trabajo del razonamiento inductivo (Pólya, 1966). Partiendo de esta idea, las secuencias numéricas se utilizan en los trabajos realizados en investigaciones en la línea de razonamiento inductivo dentro de nuestro grupo de investigación (Castro, 1995; Ortiz, 1993; Ortiz, 1995; Cañadas, 2002; Barrera, 2004). Siguiendo esta línea, hicimos un análisis de los contenidos curriculares de la ESO en España (M.E.C., 2003) y obtuvimos que las progresiones aritméticas y geométricas eran las únicas sucesiones presentes. Finalmente, seleccionamos las *progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2*[2] como contenido matemático porque los estudiantes de 3º y 4º de ESO han trabajado los contenidos suficientes para poder afrontar problemas relacionados con ellas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Siguiendo a Pólya, así como a otros antecedentes de nuestra investigación, utilizamos la resolución de problemas como metodología de investigación. El trabajo de Pólya se

[2] Adoptamos la definición de García (2005, p. 258), donde una progresión aritmética de orden p es una sucesión de números resultante de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable". En esta investigación nos limitaremos a progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2 donde los valores de la variable sean números naturales y el resultado de calcular los valores numéricos de los respectivos polinomios también.

refiere a resolutores "ideales", tanto para el proceso de resolución de problemas (Pólya, 1945) como para el proceso de razonamiento inductivo (Pólya, 1966). Seguimos el modelo teórico de Pólya, donde se considera la resolución de problemas como metodología adecuada para el análisis del razonamiento que se lleva a cabo.

Schoenfeld (1985) se considera seguidor de Pólya, aunque su metodología de investigación es significativamente diferente (Puig, 1996), ya que su interés se centra en la resolución de problemas que llevan a cabo resolutores *reales* (y no ideales, como es el caso de Pólya). En este sentido, seguimos el enfoque de Schoenfeld para la resolución de problemas, ya que nuestra investigación se lleva a cabo con resolutores reales y nuestro objetivo general es caracterizar el razonamiento inductivo que ponen de manifiesto.

CONCRECIÓN DEL OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Por lo mencionado hasta este momento, nuestro objetivo general de investigación se puede concretar en:

Describir y caracterizar el razonamiento inductivo empleado por estudiantes de 3º y 4º de la Educación Secundaria Obligatoria cuando se enfrentan a problemas de progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2.

En este objetivo general se identifican cuatro elementos clave que se recogen en la Figura 1:

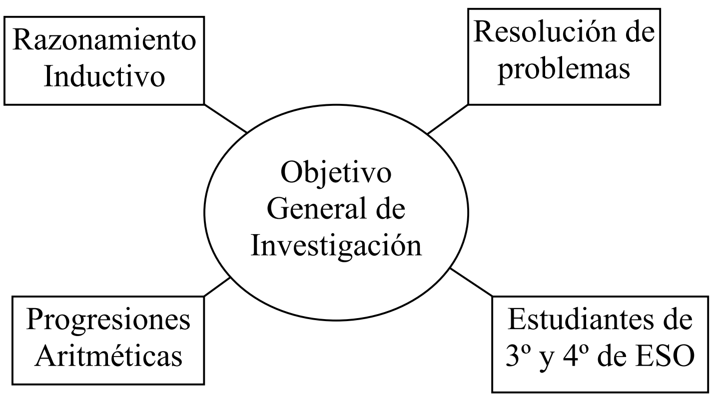

Figura 1. *Elementos clave del objetivo general de investigación*

Este objetivo general se concreta en otros más específicos:

1. Definir un marco teórico para el análisis del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes de 3º y 4º de la ESO.

2. Describir los pasos del razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes al resolver los problemas
3. Detectar la existencia de regularidades en las frecuencias de empleo de los pasos del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes
4. Identificar las relaciones de dependencia entre la realización de diferentes pasos del razonamiento inductivo
5. Crear un marco teórico para el análisis de la resolución de problemas que involucran progresiones, teniendo en cuenta el contenido matemático y variables relacionadas con éste
6. Describir las representaciones y las traducciones entre las mismas que utilizan los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos

VARIABLES[3] EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Kilpatrick (1978) distingue entre las variables independientes[4] y las variables dependientes[5] que intervienen en la resolución de problemas y que es necesario considerar para analizar este proceso con cierto detalle.

Las variables independientes que considera Kilpatrick son: (a) variables del sujeto, (b) variables de la tarea y (c) variables de la situación. Las variables de situación provienen de la situación didáctica en la que se plantee la tarea, por lo que quedan fuera de nuestros intereses investigadores.

Las variables dependientes se considerarán para el análisis de datos de esta investigación, por lo que no son tratadas en este documento.

Variables del Sujeto

Las variables del sujeto hacen referencia a las características de los resolutores, los estudiantes de 3º y 4º de ESO cuya resolución de problemas interesa analizar.

Se ha seleccionado un grupo de estudiantes de 3º y 4º de la ESO de forma intencional. Este grupo de 359 estudiantes pertenecen a centros públicos que incluyen en su oferta educativa la Educación Secundaria Obligatoria y que se encuentran en distintas zonas

---

[3] Una variable de tarea es “cualquier característica del problema que asume un valor particular dentro de un posible conjunto de valores” (Puig, 1996, p. 30).
[4] Las variables independientes son las que pueden medirse antes de la ejecución de la tarea (Kilpatrick, 1978).
[5] Las variables dependientes son las que obtienen de la medida de las respuestas de los sujetos a las tareas que se les plantean (Kilpatrick, 1978).

geográficas españolas: Madrid, Granada, Teruel y un pueblo de la provincia de Granada.

Mediante conversaciones con los profesores, previas al trabajo empírico y mediante una revisión de los libros de texto escolares, comprobamos que los alumnos seleccionados habían trabajado en el aula los contenidos matemáticos que podían necesitar para afrontar con éxito problemas relacionados con las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2, de forma que la atención se puede centrar en el razonamiento que llevan a cabo, como es nuestra intención.

Variables de Tarea

En nuestra investigación necesitamos problemas cuyas variables de tarea tomen ciertos valores que nos permitan analizar el razonamiento inductivo. Puig y Cerdán (1988) identifican las siguientes variables de tarea:

1. Variables de contenido. Se refieren al significado matemático profundo. Consideramos el formato de presentación de los datos como una variable de contenido, aunque los autores no lo hacen así.
2. Variables sintácticas. Son las relacionadas con cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema.
3. Variables de contexto. Se refieren a significados no matemáticos.

En este documento nos centramos en las variables de tarea.

VARIABLES DE CONTENIDO

Para la identificación de las variables de contenido utilizamos el análisis de contenido descrito en Gómez (2002) de las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. Este análisis, en relación a la estructura del propio concepto matemático, permite establecer: (a) los elementos que aparecen involucrados, (b) las propiedades de las progresiones y (c) las relaciones entre los elementos y las representaciones de los mismos.

Mencionamos en los siguientes epígrafes los principales aspectos que han permitido establecer las variables para la selección de los problemas que planteamos a los estudiantes para el análisis del razonamiento inductivo.

Elementos, Relaciones y Sistemas de Representación

Los elementos que aparecen en el trabajo con las progresiones son los *términos k-ésimos*, el *término general* y el *límite*. Para el análisis del razonamiento inductivo, nuestro interés se centra en los términos k-ésimos y en el término general.

Entre estos elementos se pueden establecer diferentes relaciones, las ilustramos gráficamente en la siguiente Figura 2:

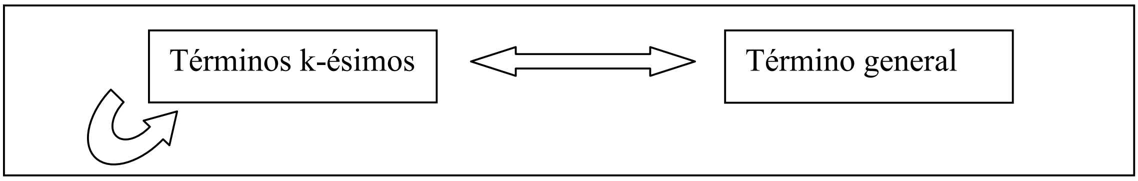

Figura 2. *Elementos y relaciones*

De este modo, se obtendrían dos relaciones generales, que quedan representadas por las dos flechas de la figura anterior. La primera relación es entre términos k-ésimos. La segunda, entre términos k-ésimos y el término general. Teniendo en cuenta estas relaciones y el lugar que ocupan los términos k-ésimos en la sucesión (Castro, 1995), identificamos un número de relaciones específicas más amplio a establecer entre estos elementos de la sucesión:

1. a. Entre los primeros términos k-ésimos consecutivos de una sucesión.
   b. Entre términos k-ésimos consecutivos de una sucesión.
2. a. Entre los primeros términos k-ésimos no consecutivos de una sucesión.
   b. Entre términos k-ésimos no consecutivos de una sucesión.
3. a. Entre términos k-ésimos de una sucesión y el término general de la misma.
   b. Entre los primeros términos k-ésimos de una sucesión y el término general de la misma.
   c. Entre el término general de una sucesión y los primeros términos k-ésimos de la misma.
   d. Entre el término general de una sucesión y los términos k-ésimos de la misma

Estas relaciones dan lugar a operaciones que se pueden llevar a cabo con los elementos de las sucesiones. Estas operaciones con los elementos así como las relaciones a partir de las cuales se definen, aparecen recogidas en la Tabla 1:

Tabla 1. *Relaciones y operaciones*

RELACIONES ENTRE:	OPERACIONES:
1. a. Primeros términos k-ésimos consecutivos. b. Términos k-ésimos consecutivo.	1. a. Continuar la sucesión conociendo los primeros términos k-ésimos (Continuación 1) b. Continuar la sucesión conociendo algunos términos k-ésimos (Continuación 2)
2. a. Primeros términos k-ésimos no consecutivos b. Términos k-ésimos no consecutivos	2. a. Extrapolar términos k-ésimos conociendo los primeros términos k-ésimos (Extrapolación 1) b. Extrapolar términos k-ésimos conociendo algunos términos k-ésimos (Extrapolación 2)
3. a. Primeros términos k-ésimos y término general b. Términos k-ésimos y término general c. Término general y primeros términos k-ésimos d. Término general y términos k-ésimos	3. a. Encontrar el término general conociendo los primeros términos k-ésimos (Generalización 1) b. Encontrar el término general conociendo algunos términos k-ésimos (Generalización 1) c. Obtener los primeros términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 1) d. Obtener algunos términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 2)

Las operaciones entre términos k-ésimos (continuación y extrapolación) se pueden llevar a cabo directamente entre términos k-ésimos o mediante la generalización y la particularización posterior. En este caso, la generalización y la particularización aparecen como estrategias en la continuación y extrapolación.

Sistemas de Representación (Externos)

Tanto los elementos de las progresiones como las relaciones entre ellos, pueden estar expresados en diferentes sistemas de representación. Considerando las progresiones como un tipo particular de funciones (discretas), se deben incluir al menos cuatro sistemas de representación: tablas numéricas, representaciones gráficas, notaciones analíticas (por lo general algebraicas) y expresiones verbales de dependencias funcionales (Verstappen, 1982[6]; Castro, 1995, p. 21). En la Figura 3 se reflejan estos cuatro sistemas de representación y los diferentes tipos en que se puede manifestar dicha representación:

[6] En el trabajo de Verstappen (1982) se distingue entre el lenguaje matemático y el no matemático en el trabajo con las funciones. Dentro del lenguaje matemático considera el geométrico, el aritmético y el algebraico; mientras que el lenguaje verbal es considerado lenguaje no matemático.

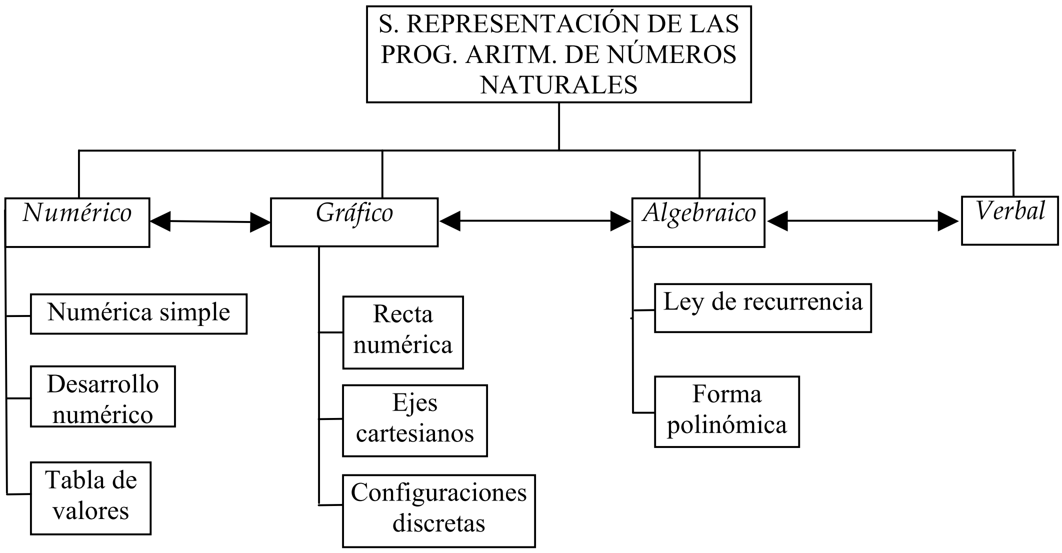

Figura 3. *Sistemas de representación de las sucesiones de números naturales*

Algunos sistemas de representación son exclusivos para ciertos elementos de las progresiones. En la Figura 4 aparecen reflejados los sistemas de representación en los que se pueden expresar los términos k-ésimos y el término general.

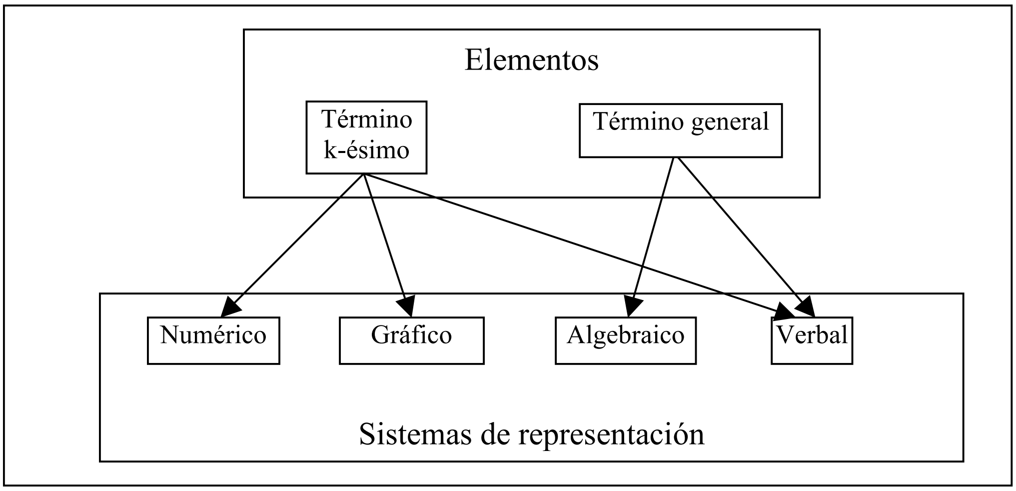

Figura 4. *Sistemas de representación de los elementos de las sucesiones*

VARIABLES SINTÁCTICAS

En el enunciado de los problemas, se busca la mayor facilidad de comprensión para los estudiantes con la intención de evitar dificultades añadidas a la tarea propuesta y analizar el razonamiento que llevan a cabo. En esta variable se ha considerado:

1. Evitar términos técnicos que puedan condicionar la respuesta de los estudiantes.
2. Seguir el mismo esquema en la organización de los problemas, teniendo en cuenta, por ejemplo, plantear la pregunta al final del enunciado.

3. Presentar el mismo número de términos k-ésimos en problemas que toman valores iguales en las variables de contenido.
4. Dar el mismo tipo de información, independientemente de los valores de las otras variables consideradas.

VARIABLES DE CONTEXTO

Para la determinación de las variables de contexto, nos basamos en la información recopilada acerca de:
1. Antecedentes a nuestra investigación.
2. Aspectos fenomenológicos del contenido matemático.
3. Trabajo previo de los alumnos en el aula.

Las investigaciones previas fueron una importante fuente de información para determinar las situaciones en las que se podía trabajar el contenido matemático seleccionado con los alumnos de educación secundaria.

Los aspectos fenomenológicos del contenido matemático permiten identificar situaciones para los que este tipo de progresiones sirven de modelo matemático. En este caso se han encontrado situaciones de la vida cotidiana, con juegos o con otras áreas específicas como la economía, la cinemática o la arquitectura.

A partir de la recopilación de problemas hecha sobre la revisión de literatura, tuvimos en cuenta el trabajo sobre el contenido matemático y sobre resolución de problemas que habían llevado a cabo los alumnos en el aula, de forma que los problemas propuestos fueran novedosos para los alumnos.

MÉTODO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN: PRUEBA ESCRITA

Dado que interesa caracterizar el modo en que los estudiantes de 3º y 4º de ESO realizan su razonamiento inductivo, conviene tener una muestra heterogénea. Una vez seleccionada la muestra y con los diferentes tipos de problemas que pueden ser propuestos, decidimos seleccionar algunos problemas para que los alumnos los resolvieran de manera individual y la información quedara registrada por escrito. El estudio piloto (Cañadas, 2002) ayudó a tomar esta decisión, ya que se trata de que los alumnos trabajen individualmente, sin interacción alguna y se pueda ver hasta donde y cómo avanzan en el proceso de razonamiento cuando se enfrentan a un problema para el que se supone que tienen los conocimientos matemáticos necesarios.

Se planteó una prueba escrita conformada por problemas cuyo objetivo es que los estudiantes pongan de manifiesto su razonamiento inductivo.

Por una cuestión práctica, se decidió que la prueba debía ser tal que pudiera ser resuelta por los estudiantes en, aproximadamente, una hora lectiva.

Variables Consideradas para la Selección de Problemas para la Prueba

Identificamos las siguientes variables que se deben considerar para el análisis del razonamiento inductivo con el contenido matemático que se ha seleccionado, partiendo del trabajo con términos k-ésimos:

1. Tipo de progresión aritmética: de orden 1 o de orden 2.
2. Tarea propuesta: continuar o extrapolar.
3. Sistema de representación en el que expresa el enunciado del problema. Teniendo en cuenta la información recogida en la Figura 4, el sistema de representación que aparezca en el enunciado puede ser: numérico, gráfico o verbal.

Haciendo la combinación de los valores de estas variables, obtendríamos 12 tipos de problemas diferentes. En todos ellos hay que incluir la tarea de justificación para poder analizar el proceso de razonamiento inductivo completo.

Tipos de Problemas Seleccionados

Por lo observado en el trabajo experimental presentado en Cañadas (2002) y por nuestra experiencia docente, decidimos elaborar una prueba compuesta por seis problemas en los que se les propone la continuación en tres de ellos, y la extrapolación en los otros tres (combinando estas tareas aleatoriamente con los restantes valores de las otras variables). En la Tabla 2 se recogen los tipos de problemas que se plantearon a los alumnos, teniendo en cuenta los valores de las variables mencionados:

Tabla 2. *Tipos de problemas*

		SISTEMA DE REPRESENTACIÓN		
		Verbal	Numérico	Gráfico
PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE ÓRDEN *P*	Orden 1	Continuar	Extrapolar	Extrapolar
	Orden 2	Extrapolar	Continuar	Continuar

Problemas para la Prueba

Para la selección final de los problemas, llevamos a cabo una revisión de la literatura de investigación que utiliza problemas relacionados con el razonamiento inductivo. En este aspecto destacamos las investigaciones de Stacey (1989), Lee (1996), Szetela (1999), Orton, Orton y Roper (1999), Radford (2002), Küchemann y Hoyles (2005), y Bell, Burkhardt, Crust, Pead y Swan (2004); y las propuestas de trabajo del NCTM (1978), Shell Centre (1984) y Grupo Azarquiel (1993).

CORRECCIÓN DE LA PRUEBA

La corrección de la prueba en esta investigación debe considerar, por un lado, los pasos del razonamiento inductivo que se han determinado con anterioridad y, por otro lado, las estrategias que emplean los alumnos en la resolución de problemas. En Cañadas y Castro (2006) se describe un procedimiento para caracterizar las estrategias empleadas en la resolución de los tipos de problemas seleccionados. Los pasos del razonamiento inductivo y las variables de tarea presentadas en este documento juegan un papel fundamental ya que este procedimiento se fundamenta en la naturaleza del razonamiento inductivo y en el análisis de contenido de las sucesiones, teniendo en cuenta la estructura conceptual, los sistemas de representación y los aspectos cognitivos asociados al contenido matemático.

En la corrección de la prueba se pueden identificar dos partes: la identificación de los pasos del razonamiento inductivo y la detección de estrategias empleadas.

Pasos del Razonamiento Inductivo

Para las progresiones aritméticas, los pasos considerados para el razonamiento inductivo, pueden ser reformulados como sigue:

1. Observación de términos k-ésimos.
2. Organización de términos k-ésimos.
3. Búsqueda y predicción de patrones.
4. Formulación de conjeturas.
5. Prueba de conjeturas (basada en términos k-ésimos).
6. Generalización de conjeturas. Obtención del términos general de la progresión.
7. Justificación de conjeturas para el caso general (demostración).

Estrategias Inductivas

En cada uno de esos pasos, se pueden asociar los diferentes términos que aparecen en este trabajo. Recogemos esa información en la Tabla 3:

Tabla 3. *Pasos y Términos*

PASOS	TÉRMINOS RELACIONADOS
1. Observación de términos k-ésimos	términos k-ésimos – términos k-ésimos
2. Organización de términos k-ésimos	términos k-ésimos – términos k-ésimos
3. Búsqueda y predicción de patrones	términos k-ésimos – términos k-ésimos
4. Formulación de conjeturas	términos k-ésimos – términos k-ésimos
5. Validación de conjeturas (basada en términos k-ésimos)	términos k-ésimos – términos k-ésimos
6. Generalización (obtención del término general de la sucesión)	términos k-ésimos – término general
7. Justificación de conjeturas generales (demostración)	término general – término general

En la identificación y descripción del razonamiento inductivo y las estrategias en la resolución de problemas que llevan a cabo los estudiantes se tiene en cuenta:

1. Pasos en el razonamiento inductivo.
2. Elementos con los que trabajan los estudiantes para dar los pasos.
3. Sistemas de representación que emplean.
4. Transformaciones entre los diferentes sistemas de representación que pueden aparecer involucrados.

Con base en estos cuatro puntos, se han definido diferentes categorías para la corrección de las pruebas y el análisis de datos.

REFLEXIONES SOBRE LA METODOLOGÍA EMPLEADA

Las variables de la resolución de problemas han sido útiles para la selección del tipo de problemas y son tenidas en cuenta para el posterior análisis de la información. El análisis de la información obtenida también permitirá identificar las variables dependientes en la resolución de problemas.

Los problemas en los que se les propone a los estudiantes la continuación y la extrapolación se confirman como problemas adecuados para el análisis de los pasos del razonamiento inductivo considerados. Es posible que los estudiantes lleguen a la generalización o no pero, en cualquier caso, tienen la oportunidad de trabajar con los términos k-ésimos y de continuar o extrapolar y continuar, lo cual les invita a razonar inductivamente.

La prueba escrita es una forma operativa de recoger información perteneciente a un elevado número de estudiantes para conseguir nuestro objetivo general de investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrera, V. J. (2004). *Trabajo con razonamiento inductivo por profesores de educación primaria en formación*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.

Bell, A., Burkhardt, H., Crust, R., Pead, D. and Swan, M. (2004). Strategies for Problem Solving and Proof. En NCTM (Ed.), *International Perspective on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 129- 143). Sweden: Göteborg University.

Cañadas, M. C. (2002*). Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.* Trabajo de Investigación Tutelada. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, Monografía IV,* 13-24.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (En Prensa) *PNA.*

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

De Guzmán, M. (1999). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Málaga: Universidad de Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving*. Athens, GA: Hatfield y Bradbard.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2005). *Pupils Awareness of structure on two number/algebra questions.* Trabajo presentado en el Fourth Congress of the European Society in Mathematics Education. Sant Feliu de Guixols (Girona, Spain)

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, pp. 87-106. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

M.E.C. (2003). *Real Decreto 831/2003*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

NCTM (1978). *Practical ways to teach the basic mathematical skills*. Virginia: Virginia Council of Teachers of Mathematics.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novick, L. R. y Basokk, M. (2005). Problem Solving. En Holyoak y R. G. Morrison (Eds.). *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 321-350). Cambridge: Cambridge University Press.

Ortiz, A. (1993). *Series numéricas y razonamiento inductivo*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, A. (1997) *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Orton, J., Orton, A. y Roper, T. (1999). Pictorial al Practical Contexts and the Perception of Pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 121-136. London: Cassell.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. (Princeton University Press: Princeton, NJ) [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965)].

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Tesis Doctoral. Granada: Editorial Comares.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objetification of mathematical knowledge. *For the learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academia Press.

Shell Centre for Mathematical Education. (1984). *Problems with patterns and numbers*. Manchester: University of Notthingham.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Szetela, W. (1999). Triangular Numbers in Problem Solving. *The Mathematics Teacher, 92*, 820-824.

Verstappen, P. (1982). Some reflections on the introduction of relations and functions. *Trabajo presentado en Conference on Functions*. National Institute for Curriculum Development, Enschede.