A LEI DOS COSSENOS NOS AMBIENTES GEOGEBRA E PAPEL E LÁPIS

Lidiane Ferreira Nunes [1]
Colégio Alfa Guarujá
Monica Karrer [2]
Universidade Anhanguera de São Paulo

RESUMO

Neste artigo apresentamos os resultados da aplicação de um experimento de ensino sobre a lei dos cossenos, elaborado nos ambientes papel e lápis e *GeoGebra*. Tivemos por objetivo investigar as compreensões de oito estudantes ao participarem de um experimento que procurou integrar principalmente os registros figural, algébrico e da língua natural, e que visou fornecer um ambiente favorável para a construção da lei dos cossenos partindo do registro figural. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval e a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. balizou a construção e a condução das atividades. O *design* foi aplicado a quatro duplas de estudantes com idades entre quatorze e dezessete anos, que cursavam o primeiro ano do ensino médio de uma escola privada do estado de São Paulo. Na disciplina de Matemática, os sujeitos já haviam estudado o teorema de Pitágoras, mas não a lei dos cossenos. A análise das produções dos estudantes indicou sucesso na construção da lei dos cossenos por meio de conversões entre os registros figural e algébrico e avanços na diferenciação entre situações de aplicação do teorema de Pitágoras e da lei dos cossenos. Apesar disso, foram necessárias várias reformulações no desenho inicial, conforme previsto na metodologia adotada, para que os estudantes construíssem e compreendessem o objeto matemático em questão. O aspecto dinâmico do recurso computacional foi fundamental para a análise de padrões e para a elaboração de conjecturas.

[1] lidimatematica@hotmail.com
[2] mkarrer@uol.com.br

Palavras-chave: Lei dos cossenos. Registros de representações semióticas. *Design Experiment. GeoGebra.*

ABSTRACT

In this article we present the results of a teaching experiment about the Cosine Rule, carried out on paper and in the *GeoGebra* environment. We had the goal to investigate the understanding of eight students participating in an experiment that tried to integrate mainly the figural, algebraic and natural language registers, and that aimed at providing a suitable environment for the creation of the Law of cosines starting from the figural register. The study was based on Raymond Duval's theory of Semiotic Representation Registers, and Cobb et al.'s Design Experiment methodology framed the construction and developing of the activities. The design was carried out by four couples of students, aged fourteen to seventeen, who were freshmen at a private High School in São Paulo state. In Mathematics, they had already studied the Pythagorean Theorem, but not the Law of cosines. The analysis of the results showed that the students were successful in creating the Law of cosines through conversions between the figural and algebraic registers; it also showed progress in differentiating situations where to apply the Theorem of Pythagoras or the Law of cosines. In spite of this, it was necessary to reformulate the initial project various times, in order to make the students understand the specific mathematical topic. The dynamic aspect of the computational resource has been fundamental for analyzing standards and elaborating hypotheses.

Keywords: Cosine Rule; Semiotic Representations Registers; Design Experiment; *GeoGebra*.

INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos os resultados de um trabalho de mestrado que tratou do objeto matemático lei dos cossenos. Foi elaborado e aplicado um experimento de ensino sobre esse tema, desenvolvido nos ambientes papel e lápis e computacional. A concepção das atividades previu a exploração principalmente dos registros algébrico, figural e da língua natural, a partir de uma entrada experimental na ferramenta *GeoGebra*, visando a construção algébrica da lei dos cossenos partindo do registro figural. Nesse contexto, o presente estudo objetivou investigar que compreensões emergiriam de oito estudantes do ensino médio ao participarem desse tipo de abordagem.

O objeto matemático lei dos cossenos é um conteúdo desenvolvido na primeira série do ensino médio na disciplina de Matemática, sendo muito aplicado também na disciplina de Física. Pudemos verificar, por meio de análise de material didático, que no processo de ensino desse conteúdo, normalmente o foco está mais no cálculo e na sua aplicação para a resolução de problemas propostos do que na efetiva construção e compreensão da lei. Consideramos que tal fato pode desencadear dificuldades nos estudantes em diferenciar situações nas quais é possível aplicar o teorema de Pitágoras daquelas em que a lei dos cossenos é necessária e em aplicar a lei em situações em que o triângulo não é dado na posição usualmente presente nos livros didáticos.

Na literatura científica, não foram encontrados muitos trabalhos que trataram especificamente da lei dos cossenos, mas foram identificados estudos, tais como os de Bastian (2000), Procópio (2011), Aguiar (2011) e Fortes (2012), que lidaram com outros temas correlatos da trigonometria, tais como as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras. Dentre as dificuldades dos estudantes em trigonometria apontadas por estes estudos, destacam-se as de identificação de um triângulo retângulo quando este não é apresentado na forma usual e as de identificação de elementos de um triângulo retângulo (catetos e hipotenusa). Ainda, foram observados o uso indevido do teorema de Pitágoras em triângulos não retângulos, erros de cálculo, equívocos em tratamentos algébricos e dificuldades em interpretar problemas aplicados.

Com relação ao uso de recursos computacionais, Neto (2010), Aguiar (2011), Gravina (1998) e Procópio (2011) apontaram como vantagens a possibilidade de manipular objetos abstratos, a autonomia desenvolvida pelos estudantes, a manipulação dinâmica e a possibilidade de experimentação.

Partindo das evidências apontadas por estes trabalhos, construímos um experimento de ensino com a intenção de amenizar as dificuldades constatadas. Procuramos investigar as compreensões dos estudantes durante o processo de aplicação do experimento e em que aspectos o trabalho integrado entre a ferramenta computacional adotada e as situações propostas no ambiente papel e lápis influenciaria na construção do conhecimento. Ressaltamos que, enquanto as tarefas no *GeoGebra* previam a exploração do dinamismo e a elaboração de conjecturas principalmente com atividades no registro figural, o trabalho no ambiente papel e lápis teve por função organizar as ideias observadas no *software*, por meio do preenchimento de tabelas e de produções na língua natural e nos registros figural e algébrico. As atividades no papel e lápis representaram uma complementação do que era observado no ambiente computacional. Sendo assim, para investigar as trajetórias dos estudantes, a análise dos dados contou com as produções provenientes desses dois ambientes.

Tivemos por hipótese que os alunos conseguiriam, de forma independente, construir a lei dos cossenos partindo de uma exploração dinâmica no registro figural. Ainda, conjecturamos que eles seriam capazes de identificar os elementos básicos dos triângulos retângulos, independentemente de suas posições, e que conseguiriam diferenciar situações nas quais seria possível usar o teorema de Pitágoras daquelas em que seria necessário usar a lei dos cossenos. Prevíamos que a ferramenta adotada favoreceria a construção da lei dos cossenos, por permitir a análise dinâmica de relações entre os registros figural e algébrico.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DE LITERATURA

Considerando que nosso estudo procurou integrar relações principalmente entre as representações algébrica, figural e da língua natural, procuramos fundamentá-lo nos pressupostos teóricos de Duval (1995, 2003, 2009, 2011).

Para o autor, a Matemática difere das outras ciências no sentido de necessitar da utilização de registros de representações semióticas para acessar seus objetos. Isso faz com que a análise dos processos de ensino e de aprendizagem de objetos matemáticos seja diferenciada e voltada a essa especificidade. Para essa análise, Duval (2009) utiliza um modelo denominado modelo cognitivo, no qual ele define registro de representação semiótica. Podem existir três atividades cognitivas sobre representações semióticas relacionadas a um sistema semiótico: a formação, o tratamento e a conversão. Na atividade cognitiva de formação de representações em determinado sistema semiótico, exprime-se uma representação mental ou evoca-se um objeto real. Quando se faz uma transformação entre representações, tem-se um tratamento se esta transformação é realizada no interior do sistema semiótico onde a representação foi criada e, uma conversão, se a transformação ocorrer entre representações vinculadas a sistemas semióticos distintos. Duval chama de registro de representações semióticas um sistema semiótico que permite que as representações a ele vinculadas possam sofrer esses três tipos de transformações. Sistemas semióticos como o gráfico, o algébrico, o figural e o da língua natural são exemplos de registros de representações semióticas. Já o sistema semiótico relativo às placas de trânsito, por exemplo, não é um registro de representação semiótica porque tal sistema não permite transformações cognitivas das representações a ele vinculadas.

Para Duval (2011), a atividade cognitiva de conversão pode sofrer o fenômeno da não congruência. A congruência entre duas representações de registros distintos prevê a verificação de três condições: a correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Se uma dessas condições não ocorrer, então a conversão é classificada como não congruente.

Ainda, Duval (2003) alerta para o fato de que uma conversão pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido oposto, o que pode implicar em desempenhos diferentes quando uma situação é proposta nos dois sentidos de conversão. O autor relata que normalmente no ensino de Matemática esse fato não é observado, privilegiando apenas um sentido de conversão, porém, o fato de um aluno ter sucesso em uma tarefa proposta em um sentido de conversão não implica que ele será capaz de efetuar a mesma tarefa quando proposta no sentido contrário.

Um registro pode ser classificado com relação a sua funcionalidade em monofuncional, se permitir um tratamento algoritmizável, ou multifuncional, caso não possa ser tratado de forma algorítmica.

Outra classificação dos registros refere-se à sua discursividade, ou seja, se o registro permitir o discurso, é denominado discursivo e, caso contrário, não discursivo. Por exemplo, de acordo com essa classificação, o registro da língua natural é considerado como multifuncional discursivo, o figural como multifuncional não discursivo, o algébrico como monofuncional discursivo e o gráfico como monofuncional não discursivo.

Duval (2003) alerta que a conversão é vista de forma diferente na atividade puramente matemática e na atividade de ensino de matemática.

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. (DUVAL, 2003, p. 16)

Duval (1995) ainda afirma que os registros monofuncionais discursivos são os mais privilegiados na Matemática, independentemente do nível de ensino, sendo que o ideal seria que um objeto matemático fosse tratado por meio de diversos registros, com pelo menos um multi e outro monofuncional. Partindo dessa afirmação, no presente trabalho procuramos explorar tratamentos e conversões envolvendo registros com características diferentes de funcionalidade e discursividade, uma vez que incluímos os registros figural, algébrico e da língua natural.

Ao optarmos por trabalhar com o objeto matemático lei dos cossenos, deparamos com a dificuldade de encontrar pesquisas em Educação Matemática que fizessem alusão especificamente a esse tema. Por um lado, esse aspecto foi positivo, pois representou um desafio para trazer contribuições e resgatar a importância desse conteúdo tanto na Matemática quanto na Física, mas, por outro lado, trouxe uma complexidade para lidar com o tema.

Dentre os trabalhos analisados e que apresentaram proximidade com a nossa temática, destacamos o de Procópio (2011), o qual sugeriu o uso do *GeoGebra* para articular situações de aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo de 2009, referentes ao estudo de triângulos retângulos e não retângulos. O pesquisador adaptou cada atividade ao uso da ferramenta computacional, visando criar para o aluno um ambiente de manipulação dinâmica e de experimentação.

Aguiar (2011) adaptou as situações de aprendizagem do quarto volume do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo de 2009 utilizando o *GeoGebra* e o *Moodle*, este último recurso para desenvolver atividades a distância. Em uma das situações, propôs a identificação de triângulos retângulos numa coleção de vários triângulos. Ele observou que houve um maior sucesso quando o triangulo retângulo era dado na posição comumente apresentada nos livros didáticos, com o ângulo reto na base. Quando o ângulo reto era apresentado no “topo”, o pesquisador constatou que vários alunos não conseguiram reconhecê-lo.

Bastian (2000) apresentou um estudo sobre a aprendizagem do teorema de Pitágoras. Ela identificou equívocos recorrentes cometidos pelos estudantes, dentre eles, a utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triangulo não retângulo, dificuldades em identificar catetos e hipotenusa, para em seguida aplicá-los no teorema de Pitágoras, e equívocos no tratamento algébrico. Com isso, elaborou e aplicou uma sequência didática que procurou aliar a abordagem matemática com sua história e com problemas aplicados no cotidiano. Ela constatou avanços nas produções dos estudantes que participaram dessa sequência.

Fortes (2012) elaborou um estudo sobre o conteúdo de razões trigonométricas no triangulo retângulo. Primeiramente, ela analisou os conhecimentos prévios de setenta estudantes do ensino Médio para levantar os erros mais frequentes em situações envolvendo as razões trigonométricas. A pesquisadora constatou como equívocos o uso de relações trigonométricas que não se adequavam ao problema proposto, dificuldades no reconhecimento dos elementos de um triângulo retângulo, o uso do ângulo como valor de um dos catetos, dificuldades de interpretação de situações aplicadas, problemas na linguagem escrita matemática e erros de cálculo.

Esses estudos influenciaram a construção de nosso experimento, dado que procuramos tratar os triângulos em diferentes posições, para favorecer o reconhecimento de seus elementos em qualquer disposição, e fornecemos um ambiente favorável para os alunos construírem a lei dos cossenos partindo de uma abordagem dinâmica no *software GeoGebra*, visando dar sentido à fórmula. Ainda, utilizamos as potencialidades do recurso computacional para favorecer a elaboração de conjecturas e a verificação de padrões, procuramos elaborar um *design* que permitisse ao aluno, da forma mais independente possível, construir o conhecimento em jogo, e inserimos problemas, para instigar a relação entre o objeto matemático estudado e suas possíveis aplicações.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia de Design Experiment

No presente estudo, utilizamos a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), que prevê a obtenção de inovações no ensino de Matemática, por meio da construção e aplicação de experimentos de ensino de domínios matemáticos específicos. Neste tipo de metodologia, o foco está na análise das compreensões dos sujeitos durante o processo, verificando suas trajetórias, suas dificuldades e seus avanços.

Nessa metodologia, pode-se aplicar um modelo em pequena escala, para classes numerosas, para professores, para avaliar a possibilidade de reestruturação escolar de uma comunidade, dentre outras manifestações. No presente estudo, foi utilizado o modelo em pequena escala, tendo em vista que pretendíamos trabalhar com um grupo reduzido de alunos, visando uma análise minuciosa de suas trajetórias.

Independente do tipo de manifestação, Cobb et al. (2003) destacam cinco características presentes em qualquer *design*. Em primeiro lugar, a teoria é desenvolvida com base nos processos de aprendizagem e nos materiais que a asseguram. Como segunda característica, a metodologia é dotada de um caráter intervencionista, que possibilita investigar novas formas de aprendizagem, permitindo mudanças educacionais. Em terceiro lugar, a princípio, uma conjectura é elaborada com base nos resultados da literatura científica, porém, ela pode ser reestruturada em função das produções dos participantes, o que dota a metodologia de um caráter flexível. A quarta característica refere-se ao fato de existirem dois aspectos, o prospectivo e o reflexivo. Enquanto o prospectivo permite elaborar hipóteses que nortearão a concepção do desenho, o reflexivo comporta a elaboração de novas conjecturas à medida que as atividades são realizadas pelos alunos, o que faz com que a metodologia tenha como elementos os aspectos cíclico e iterativo, ou seja, a aplicação é realizada em ciclos e, a cada ciclo, podem ser realizadas reformulações e complementações, representando um processo contínuo de construção e reconstrução. Por fim, em quinto lugar, a metodologia é dotada de característica pragmática, dado que aspectos teóricos são extraídos da prática, do processo experimental.

Participaram do estudo oito voluntários do primeiro ano do ensino médio de uma instituição particular, com faixa etária entre catorze e dezessete anos. Na ocasião, esses estudantes já haviam tido contato com o teorema de Pitágoras na disciplina de Matemática, mas não com a lei dos cossenos. Ainda, eles não haviam utilizado qualquer recurso computacional quando do estudo deste tópico.

A pesquisadora, que também atuava como professora desses alunos, assumiu o papel de orientadora, interferindo apenas nos momentos de bloqueio, por meio de questionamentos ou de reformulações das atividades. Ela também se responsabilizou por identificar a necessidade de *redesign*.

As atividades foram realizadas em horário extraclasse no laboratório de informática da escola e, com exceção da atividade exploratória e da avaliação final, os alunos foram organizados em duplas, visando favorecer a discussão e interação entre os estudantes.

Foram coletadas, para a análise dos dados, as produções escritas presentes nas fichas das atividades distribuídas a cada dupla, a áudio-gravação das falas dos estudantes e as telas dos computadores capturadas por meio do *software Camtasia*.

Descrição e Análise das Atividades

No primeiro encontro foi aplicada a Atividade Exploratória, que continha situações sobre o teorema de Pitágoras e sobre a lei dos cossenos. Pretendíamos, com essa atividade, investigar os conhecimentos prévios dos alunos sobre esses temas. Dado que eles já haviam estudado o teorema de Pitágoras, mas não a lei dos cossenos, esperávamos que resolvessem somente parte da atividade. Foram propostas cinco questões. A questão 1, composta de dois itens, solicitava apenas a aplicação do teorema de Pitágoras, requerendo conversões do registro figural para o numérico. Para investigar a habilidade de interpretação dos alunos, nas questões 2 e 3 foram propostos problemas aplicados que envolviam conversões da língua natural para o registro figural e deste para o algébrico. Por fim, as questões 4 e 5 trataram da lei dos cossenos e envolveram conversões do registro figural para o numérico.

Apenas um estudante teve sucesso no primeiro item da primeira questão. Quatro alunos não apresentaram qualquer resolução, um não efetuou corretamente a conversão requerida e dois conseguiram efetuar a conversão do registro figural para o algébrico com sucesso, mas apresentaram problemas nos tratamentos algébricos. No segundo item da mesma questão, nenhum aluno teve sucesso. Três sujeitos deixaram a questão sem resolução, três aplicaram corretamente o teorema de Pitágoras, mas apresentaram problemas nos tratamentos algébricos, e os demais não souberam fazer a conversão do registro figural para o algébrico. Com isso, concluímos que a maioria dos alunos, apesar de já ter estudado o teorema de Pitágoras, apresentou dificuldades em aplicá-lo em uma situação usual, ou seja, em uma tarefa simples normalmente presente no ensino desse tópico. Na Figura 1, a título de ilustração, apresentamos as produções de três estudantes referentes à primeira questão.

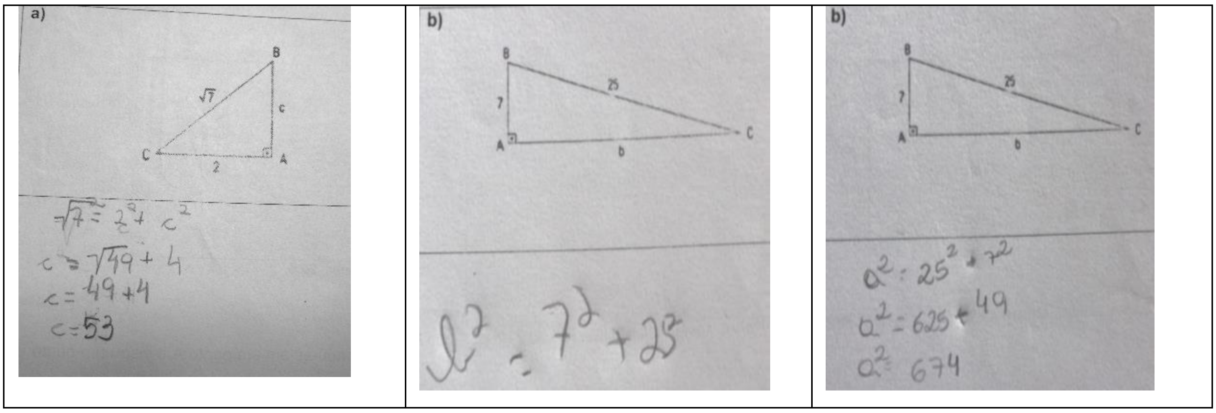


Figura 1: Produção de três estudantes na Atividade Exploratória - Questão 1
Fonte: Nunes, 2014, pp. 73-74

Salientamos que dificuldades em reconhecer os elementos de um triângulo retângulo e problemas em cálculos básicos também foram apontados por Fortes (2012) e Bastian (2000).

Com relação ao problema aplicado, presente na questão 2, apenas dois alunos tiveram sucesso na aplicação do teorema, efetuando com êxito as conversões do registro da língua natural para o figural e deste para o algébrico. Quatro alunos deixaram a questão sem resolução e os demais aplicaram corretamente o teorema, mas apresentaram problemas nos tratamentos algébricos. No problema da questão 3, havia a necessidade de uma conversão da língua natural para o registro figural, um tratamento no figural e, em seguida, uma conversão do figural para o algébrico, conforme exposto na Figura 2.

Questão 3 - Quantos metros de fio serão necessários para ligar o ponto A, que fica na ponta de um poste de 9 m de altura (figura abaixo), com o ponto B, situado a 3 m de altura em uma caixa de luz que dista 8 m do poste?

Fonte: GIOVANNI, J. R. , 2007, p. 139

Figura 2: Apresentação da Questão 3 da Primeira Atividade
Fonte: Nunes, 2014, p. 58.

Observamos que nenhum aluno conseguiu determinar os elementos do triângulo retângulo por meio de tratamentos no registro figural. Da mesma forma que constatado por Bastian (2000), provavelmente a não congruência presente na conversão entre a língua natural do enunciado e a representação figural do problema representou um fator que dificultou sua resolução.

As questões 4 e 5, que envolviam a lei dos cossenos, foram colocadas somente para constatar que os alunos realmente não conheciam esse tema. Conforme esperado, os alunos deixaram essas questões sem resolução. Ressaltamos que eles forneceram justificativas escritas para a não resolução dessas questões, mencionando que não se lembravam do conteúdo. Eles achavam que haviam esquecido da fórmula. Nenhum aluno se manifestou dizendo que o conteúdo não havia sido estudado.

Diante disso, concluímos, pela análise dessa Atividade Exploratória, que a maioria dos estudantes de nossa amostra não tinha domínio do teorema de Pitágoras, apresentando dificuldades na conversão que partia da língua natural, decorrente da resolução de situações propostas na forma de problemas aplicados. Os estudantes também demonstraram dificuldades em tratamentos algébricos e, conforme esperado, eles não conheciam a lei dos cossenos.

Ainda nesse encontro, foi realizada uma familiarização com o *software GeoGebra*, incluindo os comandos necessários para a realização do *design*. Os alunos não conheciam o *software* e se mostraram muito interessados em explorar suas potencialidades.

A partir da segunda atividade, os alunos foram organizados em duplas, uma vez que tínhamos a intenção de favorecer as interações entre os membros durante o processo. Na segunda atividade, aos alunos foi solicitada a abertura de um arquivo no *software GeoGebra*, o qual continha um triângulo. Dado o caráter dinâmico do recurso computacional, havia a possibilidade de alterar o ângulo e observar o que ocorria com os valores dos quadrados das medidas dos lados, conforme apresentado na Figura 3.

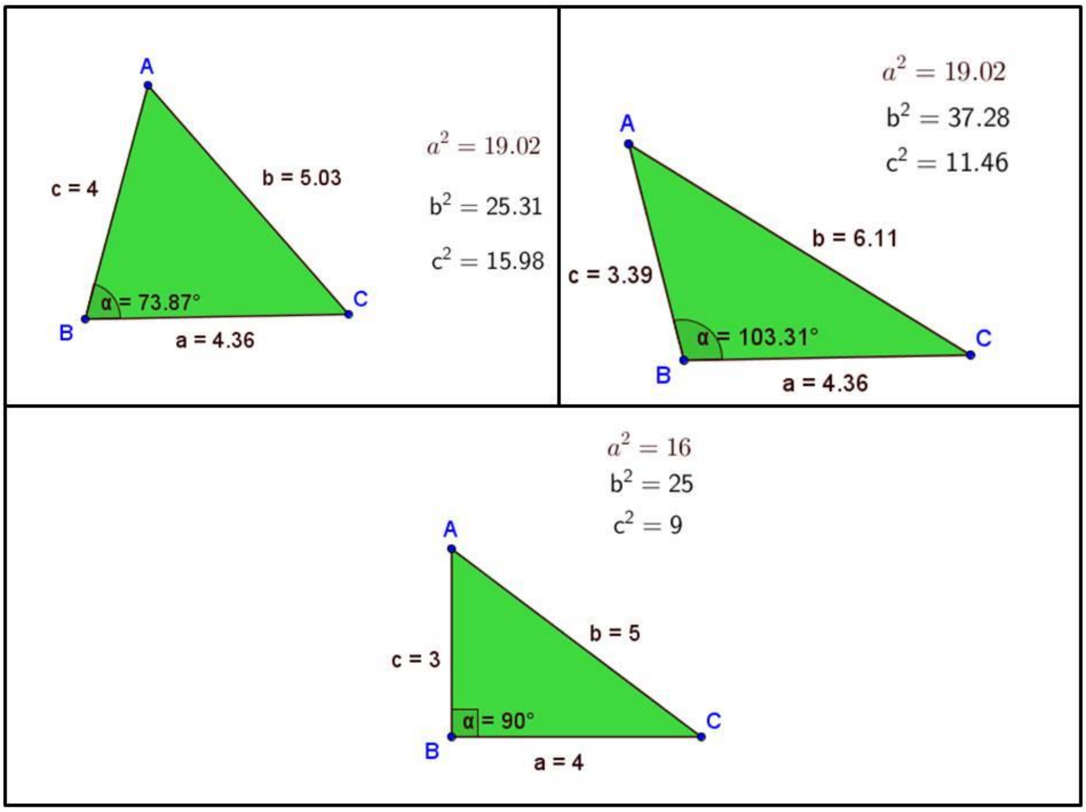


Figura 3: Apresentação da Segunda Atividade - Parte 1
Fonte: Nunes, 2014, p. 61.

Esperávamos que os alunos, por meio de relações entre os registros simbólico e figural, observassem que se o ângulo fosse igual a 90º, obteriam $b^2 = a^2 + c^2$, quando ele fosse menor do que 90º, obteriam $b^2 < a^2 + c^2$ e que quando fosse maior que 90º, obteriam $b^2 > a^2 + c^2$. Para isso, solicitamos que preenchessem uma tabela, conforme apresentado na Figura 4.

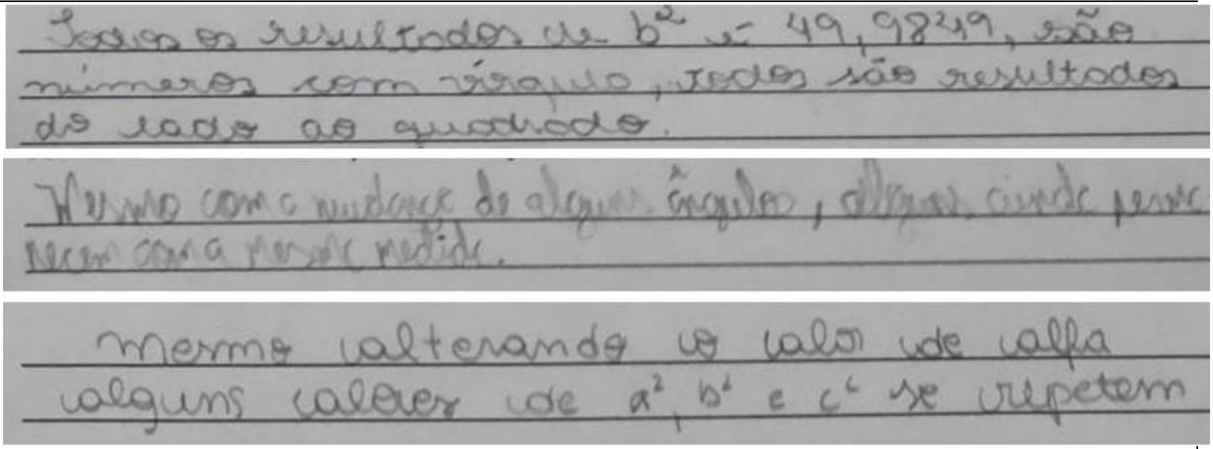
Abra o arquivo "Triângulo_1". Manipulando o *software*, varie o ângulo α de forma a obter o valor 90º, valores menores que 90º e valores maiores que 90º.

α	a^2	b^2	c^2

Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação.

Figura 4: Apresentação da Segunda Atividade - Parte 2
Fonte: Nunes, 2014, pp. 61-62.

Observamos que, da forma como a atividade foi proposta, as conclusões esperadas não foram construídas, ou seja, os alunos estabeleceram relações entre a^2, b^2 e c^2, mas não direcionadas à propriedade esperada, conforme ilustrado a seguir.

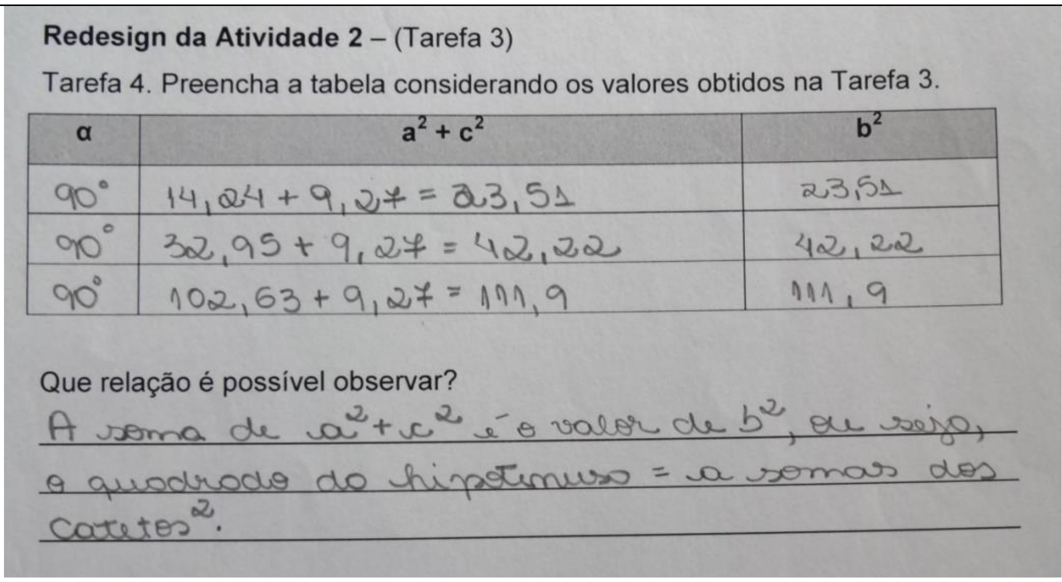

Todos os resultados de b^2 e 49,9849, são números com vírgula, todos são resultados do lado ao quadrado.

Mesmo com a mudança de alguns ângulos, alguns ainda permanecem com a mesma medida.

mesmo alterando o valor de alfa alguns valores de a^2, b^2 e c^2 se repetem

Figura 5: Produções das duplas A, B e C, respectivamente - Conclusão da Atividade 2
Fonte: Nunes, 2014, pp. 81-82.

Dada a dificuldade apresentada, foi necessário realizar um *redesign* da atividade. Notamos que a análise de todos os casos simultaneamente dificultou a construção das relações esperadas. Com isso, optamos por fornecer tabelas separadas para os casos em que o ângulo era igual a 90º, menor do que 90º e maior do que 90º. Com isso, a maior parte dos alunos conseguiu observar a relação para o caso de triângulo retângulo, conforme ilustrado na Figura 6.


Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

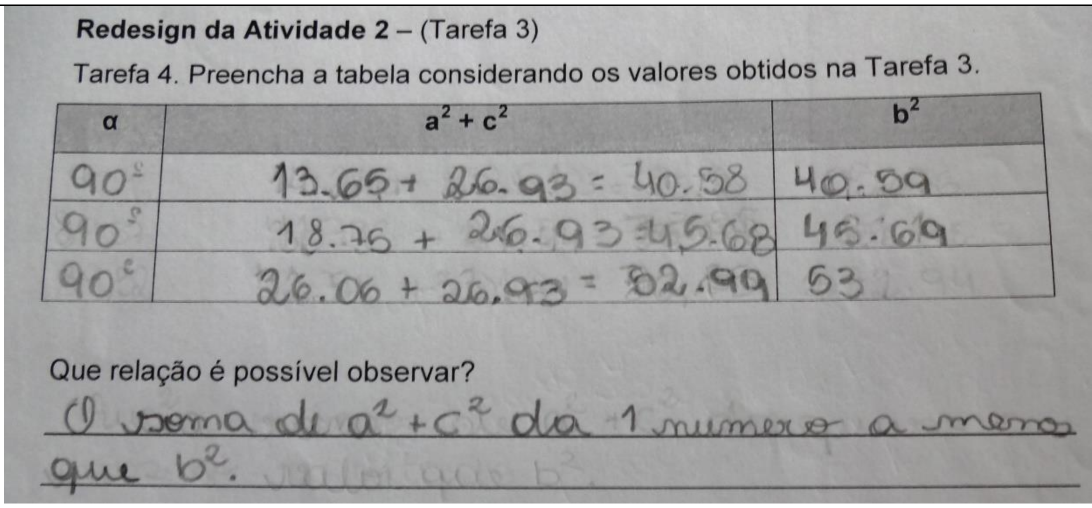
α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	14,24 + 9,27 = 23,51	23,51
90°	32,95 + 9,27 = 42,22	42,22
90°	102,63 + 9,27 = 111,9	111,9

Que relação é possível observar?

A soma de $a^2 + c^2$ é o valor de b^2, ou seja, o quadrado do hipotenusa = a somas dos catetos^2.

Figura 6: Produção da Dupla A - *Redesign* da Atividade 2.
Fonte: Nunes, 2014, p. 85.

Salientamos que a conclusão de alguns alunos foi afetada pelo arredondamento do *software*, conforme podemos observar na Figura 7.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

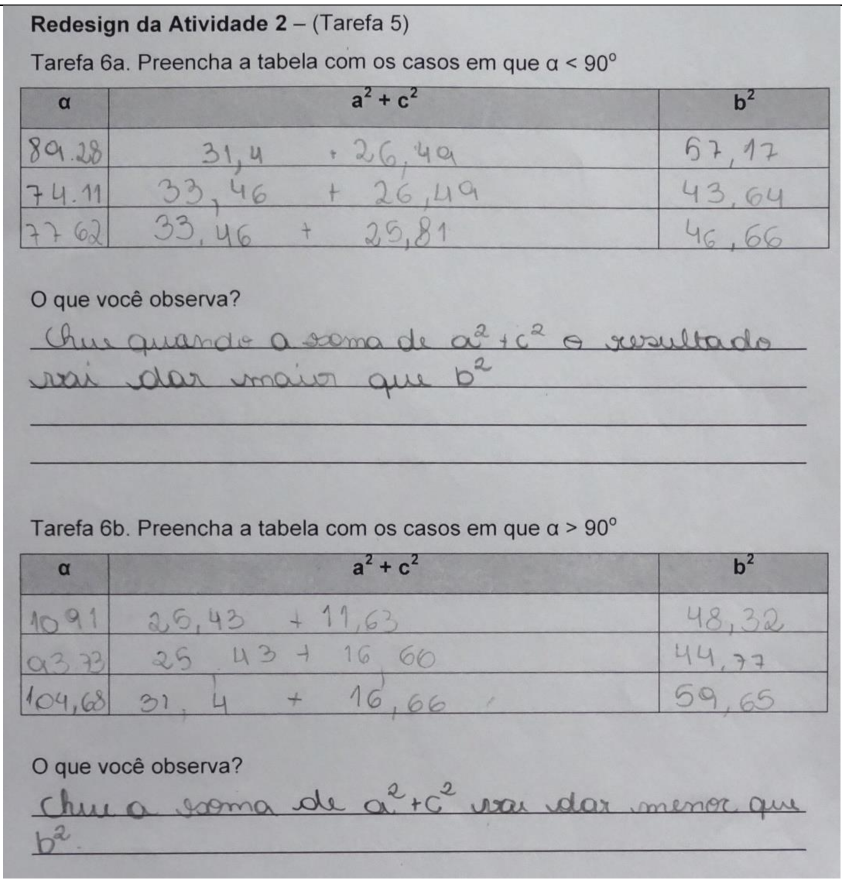
α	$a^2 + c^2$	b^2
90º	13.65 + 26.93 = 40.58	40.59
90º	18.76 + 26.93 = 45.68	45.69
90º	26.06 + 26.93 = 52.99	53

Que relação é possível observar?

A soma de $a^2 + c^2$ da 1 numero a menos que b^2.

Figura 7: Produção da dupla D - *Redesign* da Atividade 2
Fonte: Nunes, 2014, p. 86.

Para que essa especificidade do *software* não influenciasse negativamente na construção do conhecimento, optamos, a partir dessa atividade, por programar os cálculos no próprio arquivo, evitando, assim, os equívocos provenientes do cálculo manual. Com isso, todas as duplas constataram que se o ângulo fosse igual a 90º, obteriam $b^2 = a^2 + c^2$ e que, nos outros casos, b^2 seria diferente de $a^2 + c^2$. Salientamos que essa atividade demandou diversas reformulações e, somente após várias intervenções, o objetivo foi atingido. Ilustramos essa situação com a produção de uma das duplas.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que α < 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
89.28	31,4 + 26,49	57,17
74.11	33,46 + 26,49	43,64
77.62	33,46 + 25,81	46,66

O que você observa?

Que quando a soma de a^2+c^2 o resultado vai dar maior que b^2

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que α > 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
109.1	25,43 + 11,63	48,32
93.73	25,43 + 16,66	44,77
104,68	31,4 + 16,66	59,65

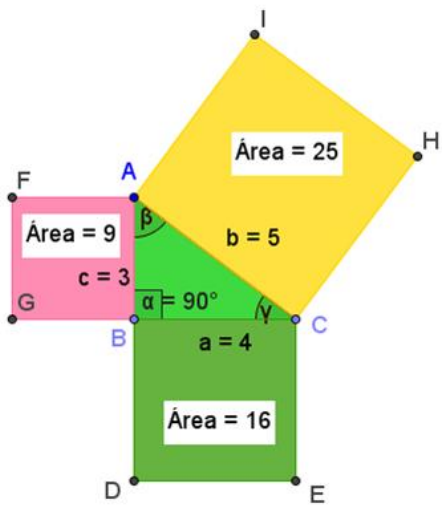
O que você observa?

Que a soma de a^2+c^2 vai dar menor que b^2.

Figura 8: Produção da Dupla D - Segundo *redesign* da Atividade 2
Fonte: Nunes, 2014, p. 100.

Na atividade 3, aos alunos foi solicitada a abertura de um arquivo que continha um triângulo com um quadrado sobre cada lado, conforme apresentado na Figura 9. Essa atividade tratou da mesma relação da Atividade 2, porém no registro figural.

Tarefa 1 - Abra o arquivo Triângulo_3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Utilize o vértice C para alterar os lados do triângulo.



Tarefa 2 - Partindo de suas observações, pede-se:

a) o que representa o valor de a^2?

b) o que representa o valor de b^2?

c) o que representa o valor de c^2?

Tarefa 3 - Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90º. O que você observa?

Tarefa 4 - Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

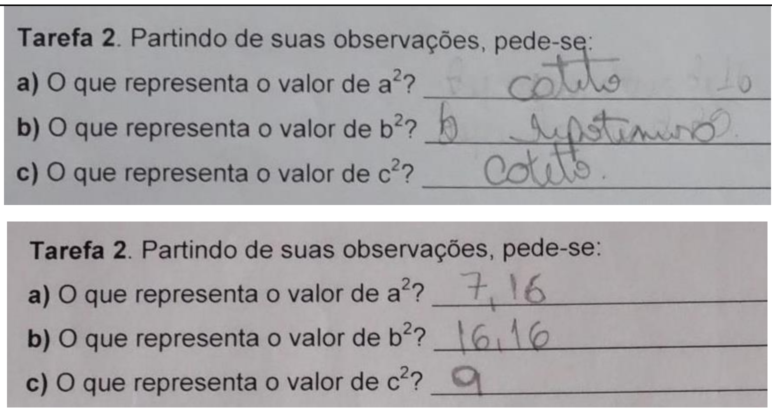
a) Em que situação a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Figura 9: Apresentação da Atividade 3
Fonte: Nunes, 2014, p. 63.

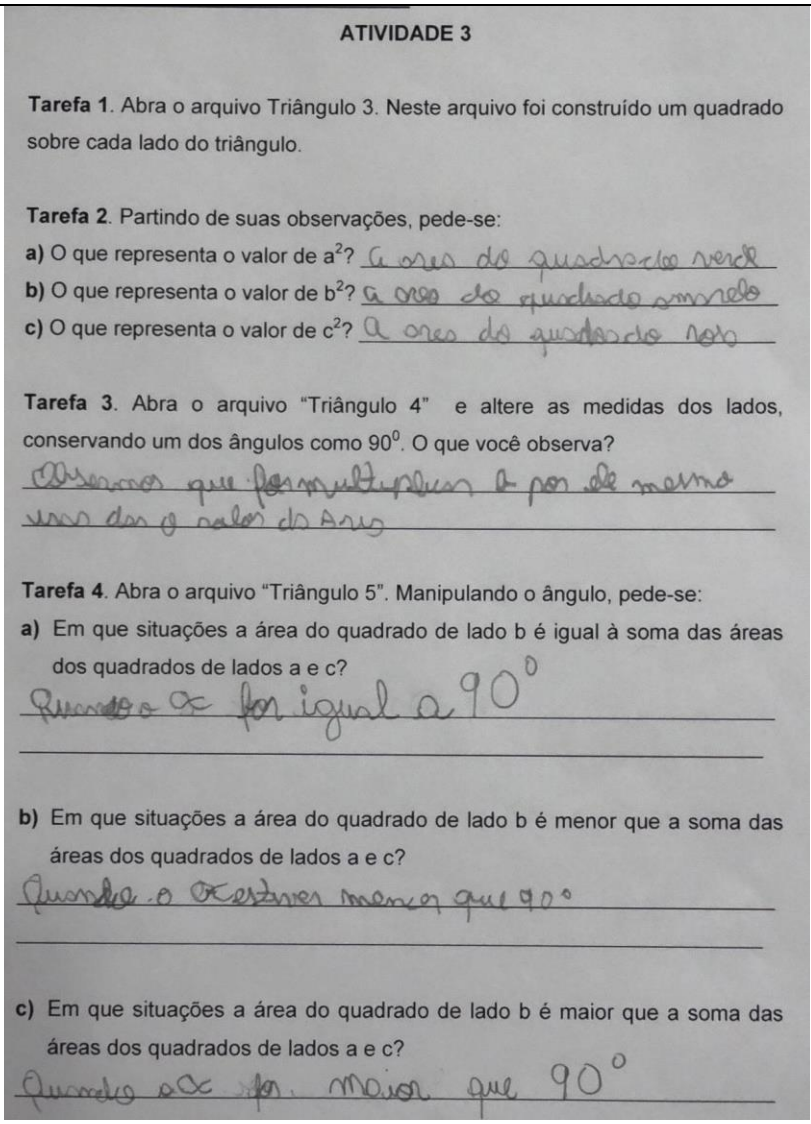
Pretendia-se que o aluno concluísse que, no caso em que o ângulo era reto, a área do quadrado do maior lado era igual à soma das áreas dos quadrados dos outros lados, mas que isso não ocorria quando o triângulo não era retângulo. Na aplicação dessa atividade, somente a dupla A teve sucesso. As demais duplas apresentaram problemas de interpretação. Por exemplo, ao serem questionadas sobre o significado dos valores de a^2, b^2 e c^2, esperávamos que elas dissessem que se tratavam das áreas dos quadrados, porém, não foi o que ocorreu. Para ilustrar esse fato, na Figura 10, apresentamos as respostas das duplas B e C para a tarefa 2 da Atividade 3.


Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:
a) O que representa o valor de a^2? cateto
b) O que representa o valor de b^2? b hipotenusa.
c) O que representa o valor de c^2? cateto.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:
a) O que representa o valor de a^2? 7,16
b) O que representa o valor de b^2? 16,16
c) O que representa o valor de c^2? 9

Figura 10: Produção das duplas B e C - Atividade 3
Fonte: Nunes, 2014, p. 102.

Diante disso, a professora-pesquisadora optou por aplicar novamente a atividade para essas duplas, questionando-as individualmente e, com isso, elas atingiram o objetivo. A partir dessa atividade, os estudantes da Dupla D, por motivos pessoais, não participaram mais das atividades do experimento. Apresentamos, a seguir, a produção fornecida pela Dupla C após os questionamentos.


ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? a area do quadrado verde

b) O que representa o valor de b^2? a area do quadrado amarelo

c) O que representa o valor de c^2? a area do quadrado roxo

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Observamos que for multiplicar a por ele mesmo vai dar o valor da Area

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α for igual a 90^0

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α estiver menor que $90°$

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α for maior que 90^0

Figura 11: Produção da Dupla C - Atividade 3
Fonte: Nunes, 2014, p. 106.

Para a atividade 4, que objetivava a construção da lei algébrica dos cossenos partindo de experimentações no registro figural do *GeoGebra*, primeiramente foi realizada uma familiarização no *software*, evidenciando os comandos de cálculo de áreas e de edição de figuras. Em seguida foi proposta a atividade assim descrita.

Tarefa 1. Abra o arquivo "Colorir". Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Observe que cada quadrado foi dividido em dois retângulos. Utilizando o comando do *software*, determine a área de cada retângulo e pinte da mesma cor os retângulos que tiverem a mesma área.

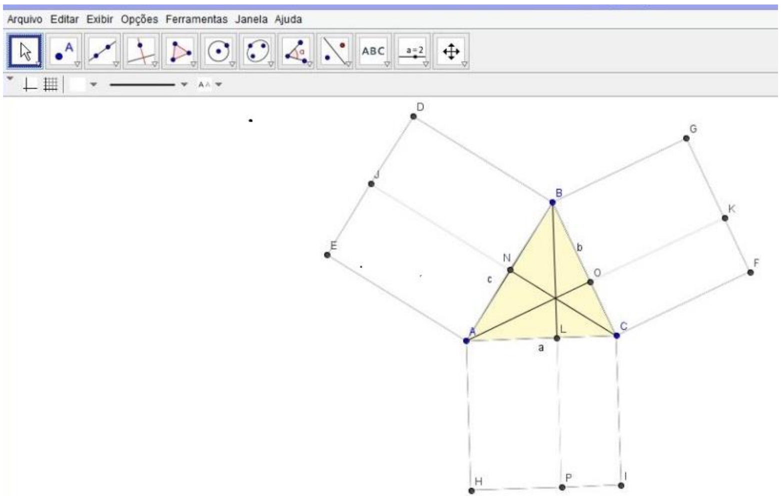


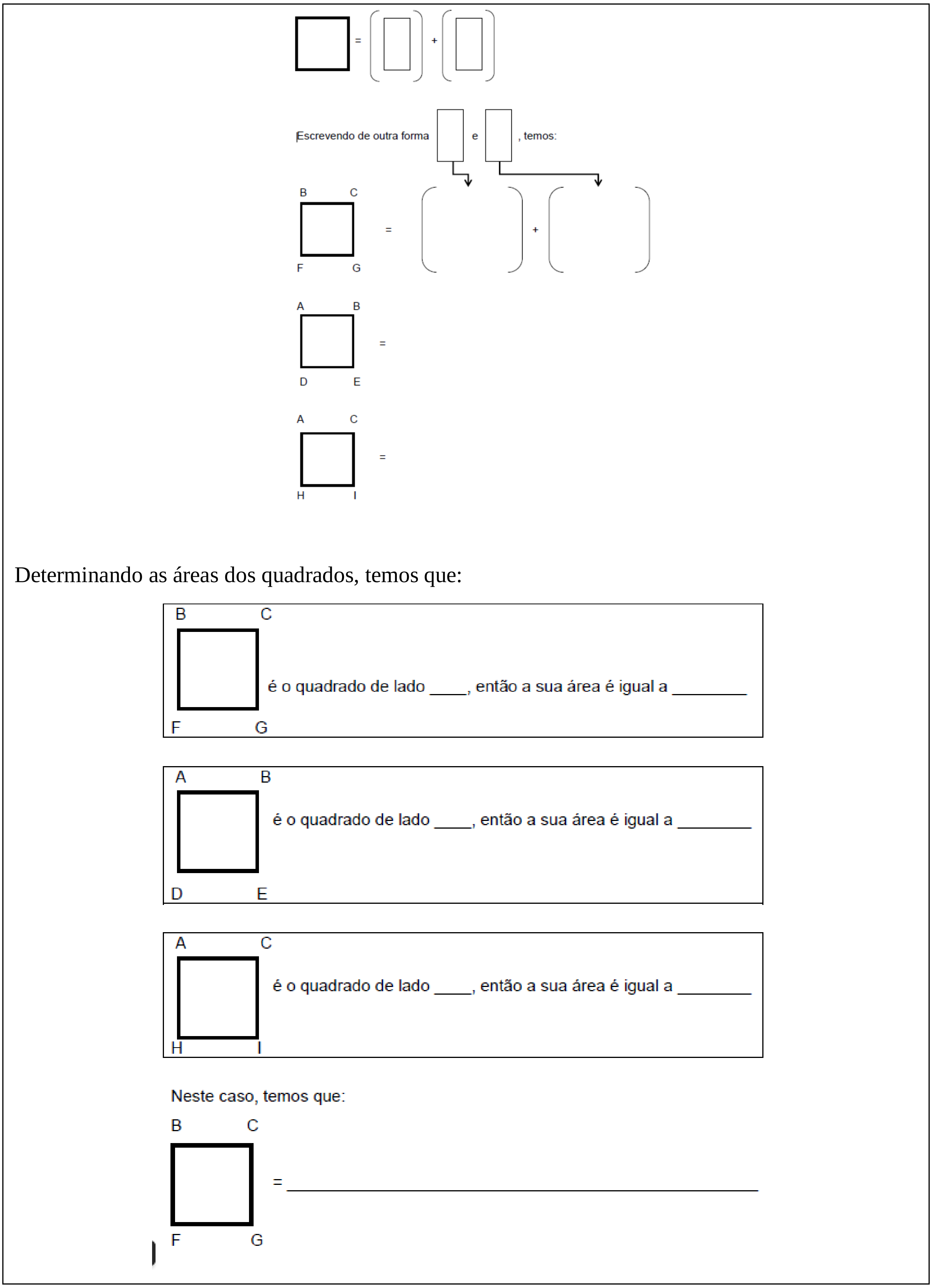
Figura 17: Colorir no ambiente *GeoGebra*.

Tarefa 2. Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

Tarefa 3. Pinte, com cores diferentes, os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI.

Tarefa 4. Complete:

Temos que:



Escrevendo de outra forma e , temos:

B C

F G

A B

D E

A C

H I

Determinando as áreas dos quadrados, temos que:

B C

é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________

F G

A B

é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________

D E

A C

é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________

H I

Neste caso, temos que:

B C

= ____

F G

Figura 12: Apresentação da Atividade 4
Fonte: Nunes, 2014, p. 64-65.

Ressaltamos que na aplicação da primeira versão dessa atividade, os alunos não compreenderam o seu objetivo. Com isso, o desenho inicial foi reformulado, culminando na versão apresentada na Figura 12. Como no desenho inicial os vértices dos quadrados não estavam nomeados e a sequência de tarefas não estava clara para os alunos, procuramos efetuar algumas alterações. Com isso, optamos por inserir flechas para favorecer a compreensão da atividade e os vértices dos quadrados foram nomeados. Após essa reformulação, a atividade redesenhada foi aplicada aos alunos. Inicialmente, eles calcularam as áreas dos retângulos e pintaram, da mesma cor, os retângulos de áreas iguais. Em seguida, manipulando um vértice do triângulo, constataram que os retângulos de mesma cor permaneciam com a mesma área. Observamos que eles manipularam outros vértices, verificando que a conjectura estabelecida continuava válida. Ressaltamos que essa constatação só foi possível devido ao dinamismo da ferramenta adotada. Em consonância com Neto (2010), notamos que o trabalho com o dinamismo permitiu aos sujeitos de pesquisa assumir papeis menos passivos na busca por novos conhecimentos matemáticos.

Já familiarizados com o *software* e o instrumento de ensino disponibilizados, cada dupla personalizou sua atividade, selecionando as cores desejadas para pintar os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI. Segue, a título de ilustração, a produção da Dupla A para essa atividade.

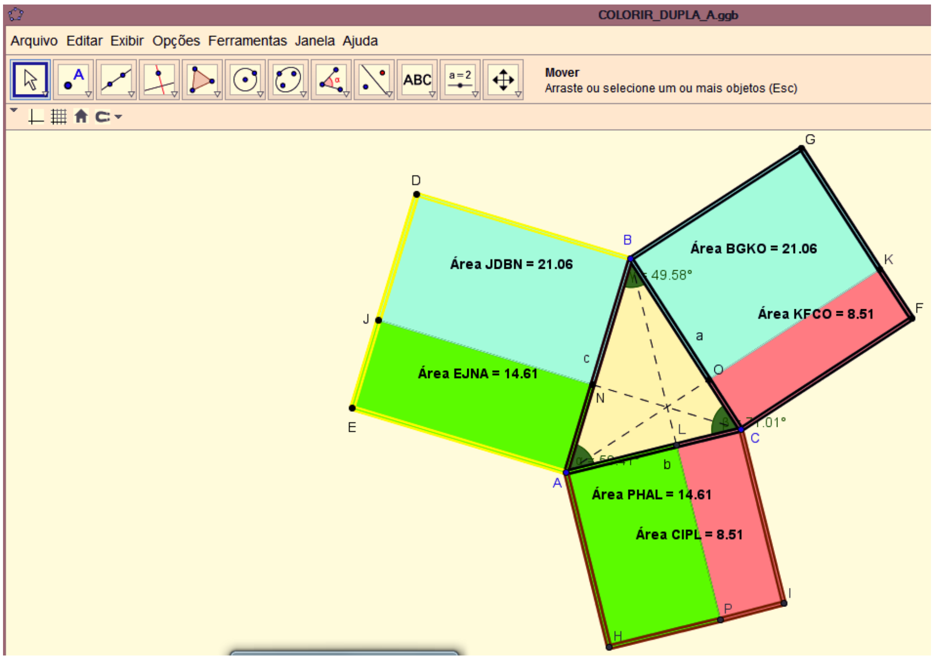
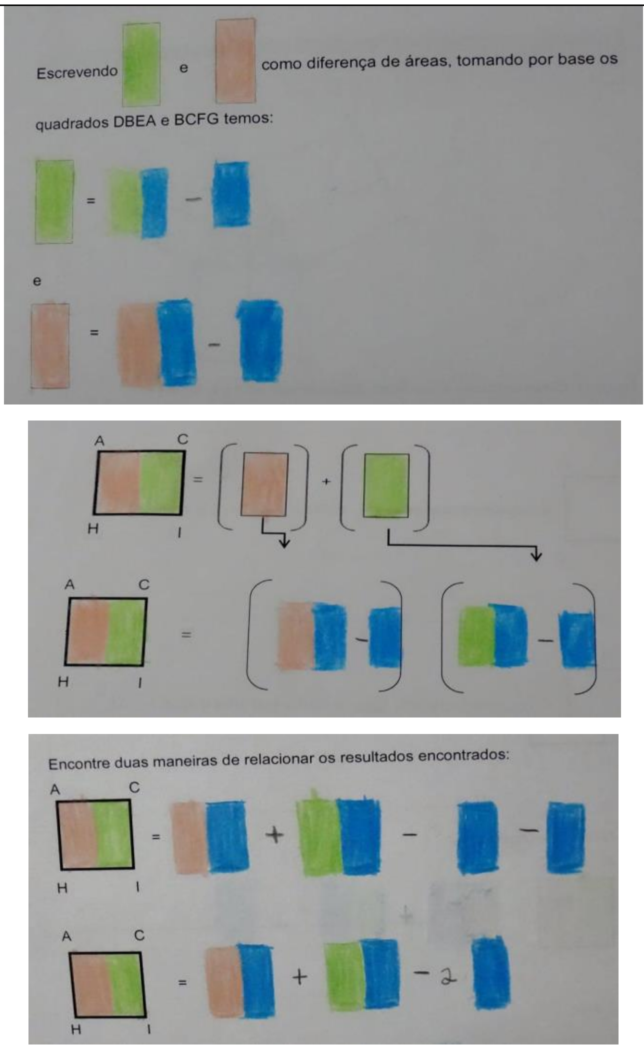


Figura 13: Produção da Dupla A no *software* - Atividade 4
Fonte: Acervo pessoal

Na Tarefa 4, partindo dessa construção no *software*, os alunos transferiram seus dados para o ambiente papel e lápis. Tomando como exemplo a produção da Dupla A, podemos observar que ela realizou tratamentos no registro figural para obter os retângulos verde e rosa como diferença de áreas. Em seguida, ela escreveu o quadrado ACIH em função do obtido. Realizando tratamentos no registro figural, os estudantes desta dupla deduziram a lei ainda neste sistema semiótico. Em seguida, relacionaram o obtido no registro figural com sua representação algébrica. Podemos observar que essa conversão ainda ocorreu de forma parcial, dado que o resultado envolveu dois registros, o algébrico e o figural, conforme apresentado na Figura 14.



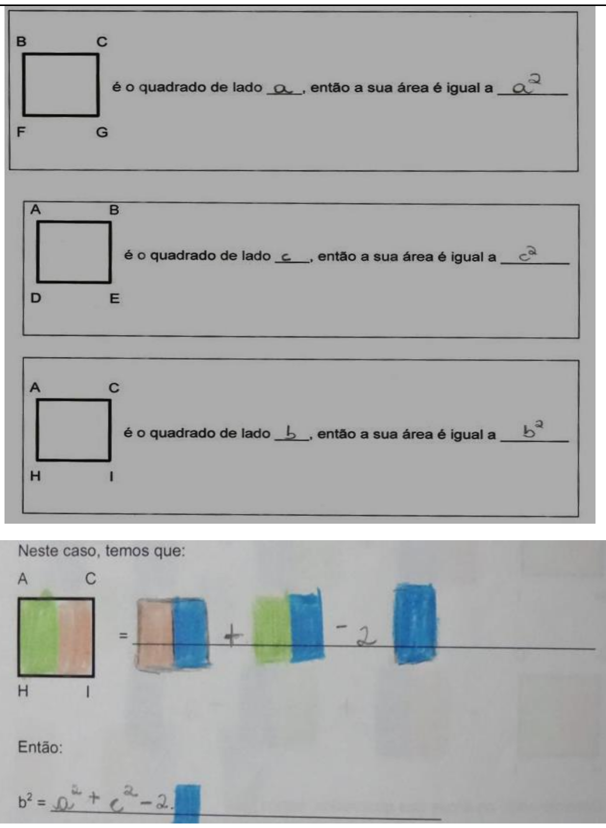
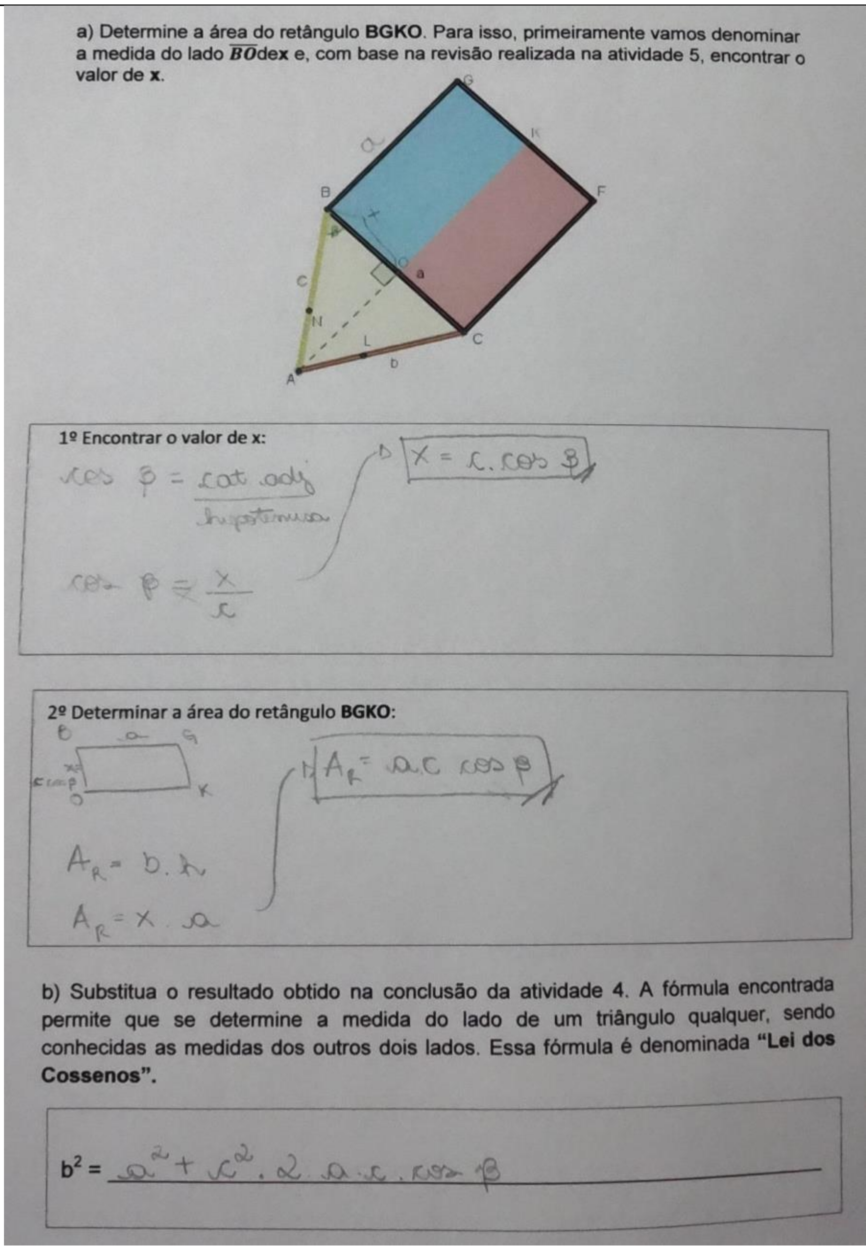


Figura 14: Produção da Dupla A - Atividade 4
Fonte: Nunes, 2014, p. 118-120

Salientamos aqui a importância de um trabalho de coordenação de registros defendido por Duval (2009), uma vez que, nesta fase do experimento, os alunos apresentaram uma conclusão algébrica ainda apoiada no registro figural. A conversão se deu gradativamente, sendo concluída apenas na atividade 6.

O retângulo BGKO, o qual permaneceu no registro figural nessa última conclusão, foi denominado pelos alunos como o “retângulo que sobra”. Para determinar a área desse retângulo, inicialmente foi realizada uma revisão de trigonometria, representando assim a Atividade 5 do experimento. Na ocasião, o professor-pesquisador procurou relembrar o cálculo do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo. Em seguida, foi proposta uma atividade para verificar se os alunos haviam compreendido essa revisão, fato que foi confirmado. Por fim, na Atividade 6, retomamos a conclusão da Atividade 4 com cada dupla, para que completassem a conversão para o registro algébrico. Dado que as duplas utilizaram cores diferentes na construção da Atividade 4, foi elaborada uma atividade para cada dupla, respeitando as cores selecionadas. Apresentamos, na Figura 14, a produção apresentada pela Dupla A nesta atividade.



a) Determine a área do retângulo **BGKO**. Para isso, primeiramente vamos denominar a medida do lado $\overline{BO}$ de **x** e, com base na revisão realizada na atividade 5, encontrar o valor de **x**.

1º Encontrar o valor de x:

$\cos \beta = \frac{\text{cat. adj}}{\text{hipotenusa}}$

$\cos \beta = \frac{x}{c}$

$\boxed{X = c.\cos \beta}$

2º Determinar a área do retângulo **BGKO**:

$A_R = b.h$

$A_R = x.a$

$\boxed{A_R = a.c \cos \beta}$

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos".**

$b^2 = a^2 + c^2 . 2\, a.c.\cos \beta$

Figura 15: Produção da Dupla A - Atividade 6
Fonte: Nunes, 2014, p. 130

Apesar de inicialmente as duplas apresentarem dificuldades para calcular a área do "retângulo que sobra", o que demandou algumas reformulações no desenho inicial, todas conseguiram concluir a atividade com êxito, ou seja, deduziram a lei dos cossenos por meio da conversão do registro figural para o algébrico.

Por fim, foi aplicada a Atividade 7, que objetivou investigar se os alunos conseguiam construir a lei independente do lado solicitado, se diferenciavam as situações em que poderiam aplicar Pitágoras daquelas em que deveriam aplicar a lei dos cossenos e se resolviam um problema aplicado que requeria a aplicação da lei dos cossenos.

Pela análise das produções das duplas, constatamos que elas conseguiram construir a lei dos cossenos independente do lado solicitado e tiveram sucesso em situações de cálculo e de interpretação de problemas aplicados. Na Figura 15, apresentamos a produção da Dupla A que ilustra essa afirmação.

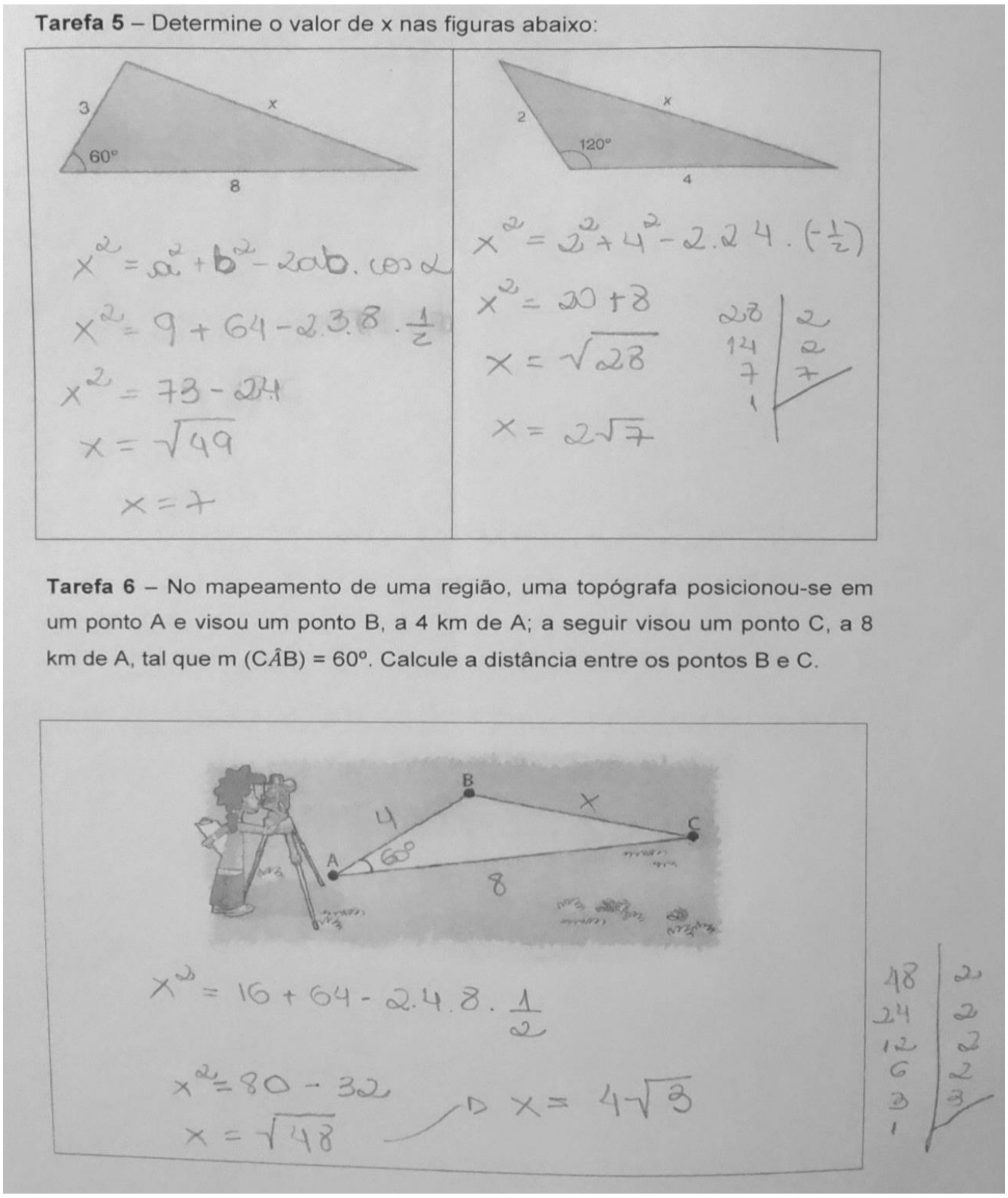


Figura 16: Produção da Dupla A para tarefas sobre a lei dos cossenos - Atividade 7
Fonte: Nunes, 2014, p. 136

Ainda, o teorema de Pitágoras também foi aplicado com sucesso, independente da posição do triângulo retângulo. Apresentamos, na Figura 15, a produção da dupla B/C. Como houve ausência de um aluno de cada dupla, solicitamos que os membros presentes das duplas B e C formassem uma nova dupla para resolver a situação proposta.

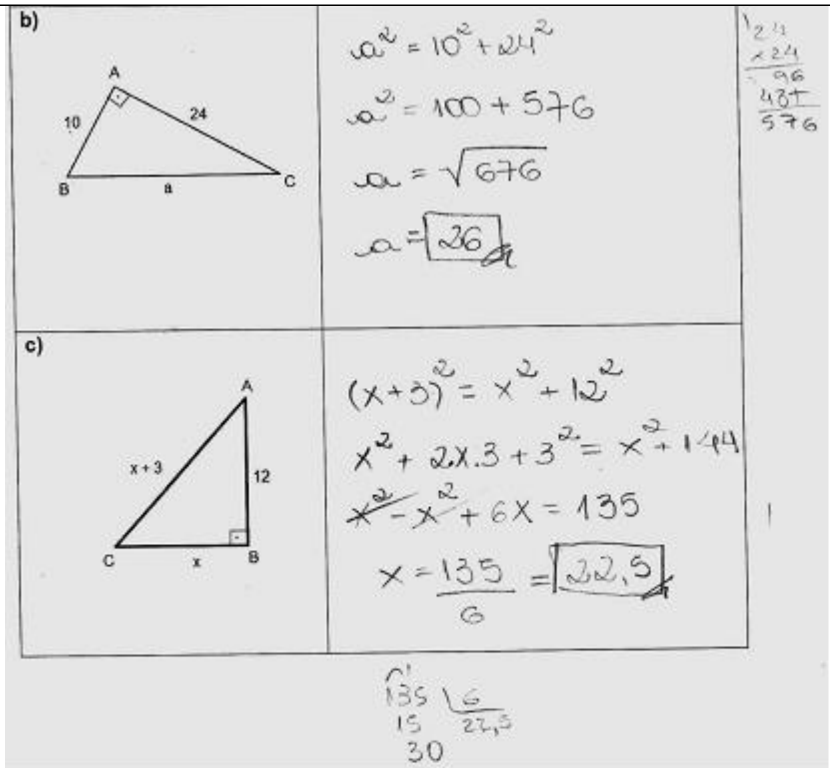


Figura 17: Produção da Dupla B/C para tarefas sobre o teorema de Pitágoras - Atividade 7
Fonte: Nunes, 2014, p. 135

Diante do exposto, apesar de observarmos alguns equívocos pontuais nas produções dos estudantes nesta atividade, os quais foram discutidos com cada dupla, concluímos que o objetivo do estudo foi atingido. Ressaltamos que, em relação ao teorema de Pitágoras, houve um grande avanço se compararmos as produções da Atividade 7 com as da Atividade Exploratória e, diferentemente do que foi apontado por Fortes (2012), nessa atividade os nossos sujeitos não apresentaram dificuldades em reconhecer os elementos de um triângulo retângulo. Desta forma, consideramos que os principais resultados evidenciados nas produções dos estudantes durante a execução do experimento foram caracterizados pela habilidade em deduzir a lei dos cossenos partindo do registro figural e em aplicar tal lei em situações diversas, além dos avanços na compreensão do teorema de Pitágoras. Ressaltamos, também, que o trabalho conjunto nos ambientes papel e lápis e *GeoGebra* foi fundamental, uma vez que as conjecturas obtidas por meio da exploração do dinamismo do *software* foram estruturadas no ambiente papel e lápis.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, procuramos investigar as compreensões de oito estudantes do ensino médio ao participarem de um experimento de ensino sobre o objeto matemático lei dos cossenos. O experimento foi concebido de forma a propor uma abordagem de construção dessa lei partindo do registro figural, com apoio do *software* dinâmico *GeoGebra*. Ele foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2003, 2009, 2011) e se baseou na metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003).

A nossa hipótese de que a abordagem proposta favoreceria a dedução e a compreensão da lei dos cossenos foi confirmada. Ainda, notamos que houve avanços na compreensão do teorema de Pitágoras, uma vez que na Atividade Exploratória a maioria dos alunos não sabia aplicá-lo tanto em exercícios de cálculo como em problemas aplicados e, na atividade final, grande parte teve êxito em questões que requeriam esse teorema. Consideramos, portanto, que, para os nossos sujeitos, a abordagem favoreceu a minimização das dificuldades nesse conteúdo.

Notamos, também, que ao final do experimento, os estudantes demonstraram segurança em diferenciar situações em que podiam aplicar o teorema de Pitágoras daquelas em que era necessária a lei dos cossenos. A atividade de conversão principal, que partia do registro figural para o algébrico, ocorreu de forma gradativa, uma vez que houve momentos em que todas as duplas apresentaram uma produção que combinava as duas representações, fato que aponta a importância de propor situações que requeiram a coordenação de representações de diferentes registros.

A opção pela metodologia de *Design Experiment* foi essencial para atingir os objetivos, por comportar reformulações durante o processo e adaptações às produções dos estudantes. Em diversos momentos fizemos reformulações no desenho inicial para favorecer a compreensão dos estudantes e, com isso, utilizamos os aspectos de flexibilidade e iteração, tornando o processo cíclico.

Salientamos que a utilização do *software* foi primordial, ao permitir explorações que não seriam possíveis em ambientes estáticos, favorecendo a análise de padrões, a elaboração de conjecturas e a visualização dinâmica e simultânea da relação entre representações de diferentes registros. Já o trabalho no ambiente papel e lápis permitiu estruturar e organizar as observações feitas com o uso da ferramenta computacional.

Concluímos que o experimento elaborado favoreceu a construção do objeto matemático lei dos cossenos e esperamos que ele possa contribuir para a área de Educação Matemática, representando um cenário diferente de abordagem para esse conteúdo.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Anderson Luiz de. ***Moodle* e *GeoGebra* como apoio virtual ao ensino de trigonometria segundo a nova proposta curricular do Estado de São Paulo**. Dissertação (Mestrado) – Unversidade Federal de São Carlos, 2011.

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo – SP, 2000.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. Educational Researcher, v. 32, n.1, 2003. p. 9–13.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003. pp. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Semiósis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fassículo I).** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2009. pp. 11-33.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar os registros de representações semióticas.** Organização Tânia M.M. Campos; [tradução Marlene Alves Dias]. São Paulo: PROEM, 2011.

FORTES, A. W. B. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: Análise de erros no ensino médio**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – (Centro Universitário Franciscano, UNIFRA).

GIOVANNI, José Ruy. **Aprendendo Matemática** / José Ruy Giovanni, Eduardo Parente. - Ed. renovada, São Paulo: FTD, 2007. (Coleção aprendendo matemática). pp. 137;139.

GRAVINA, M. A.; Santarosa, L. M, **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados,** In: **Revista Informática na Educação: Teoria & prática**. Porto Alegre, vol. 1, n.2. UFRGS, pág. 73 -88. 1998. Disponível em http://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275. Acesso em: 20/07/2010

MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

NETO. José Roque Damasco. **Registros de Representação Semiótica e o *GeoGebra*: um ensaio para o ensino de Funções trigonométricas**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2010.

NUNES, L.F. **A Lei dos Cossenos no ambiente GeoGebra: explorando relações de registros de representações semióticas.** Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Anhanguera, São Paulo - SP, 2014.

PROCÓPIO, W. **O currículo de matemática do Estado de São Paulo: sugestões de atividades com o uso do *GeoGebra***. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo – SP, 2011.

Submetido: outubro de 2014

Aceito: novembro de 2014