USO DE SITUAÇÕES QUOCIENTE NO ENSINO DE FRAÇÕES

Tânia Maria Mendonça Campos [1]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Terezinha Nunes [2]
University of Oxford
Peter Bryant
University of Oxford
Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Anhanguera de São Paulo
Raquel Factori Canova
Universidade Anhanguera de São Paulo
Patrícia de Barros Monteiro Cervantes
Universidade Anhanguera de São Paulo

RESUMO

O objetivo deste estudo foi investigar se os resultados encontrados em outros países, que registram entre alunos de 8-9 anos noções intuitivas sobre frações em situações quociente, podem ser generalizados à nossa realidade. As frações representam um grande desafio para os alunos desde o ensino fundamental até o secundário; é, portanto, urgente que se encontrem soluções efetivas para o ensino desse conceito. O estudo, realizado em São Paulo, envolveu a apresentação de questões usadas em investigações em outros países por duas professoras a seus alunos em sala de aula. Os alunos responderam as questões individualmente, discutindo a seguir suas respostas em pequenos grupos, e finalmente apresentando as conclusões do grupo em uma sessão coletiva. Também foi analisada a atuação dos professores desses alunos, uma vez que os pesquisadores atuaram como **se** fossem professores compartilhando a sala de aula. Este artigo apresenta exemplos de produções dos alunos e discute seu significado com relação a ideias importantes para a compreensão de frações, como a relação inversa entre o denominador e a

[1] taniammcampos@hotmail.com
[2] terezinha.nunes@education.ox.ac.uk

quantidade representada, a equivalência entre frações diferentes e a importância do todo. Essas produções mostraram que os resultados observados na literatura européia são replicados em nossa realidade. Espera-se que a análise dessas produções possa contribuir para que professores que desejem iniciar o ensino de frações em situações quociente possam antecipar as reações de seus alunos e facilitar o processo de reflexão sobre as noções complexas envolvidas nesse conceito.

Palavras-chave: educação matemática, ensino e aprendizagem, frações.

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate whether observations regarding 8- and 9-year-olds intuitive notions about fractions in quotient situations can be generalized to Brazilian students. Fractions are a challenge for primary as well as secondary students; it is thus urgent to find more effective teaching methods and promote better understanding of this concept. Problems used to investigate students' fraction understanding in quotient situations in other countries were presented by two teachers to their students in São Paulo. Students answered the questions individually, then discussed their answers in small groups, and finally presented their solutions in a whole-class session. Was also analyzed the performance of teachers of these students, since the researchers acted as if they were teachers sharing the classroom. This paper presents examples of students' productions and discusses what these productions reveal about students' understanding of significant fraction related concepts, such as the inverse relation between the divisor and the quotient, the equivalence of fractions obtained by partitioning of the same quantities in different ways, and the relation between the fraction and the whole to which it refers. The students' productions showed that Brazilian students' performance is similar to their European age cohorts. It is hoped that the paper will contribute insights for teachers who wish to use quotient situations to introduce fraction concepts to Brazilian students in the future.

Keywords: mathematics education, teaching and learning processes, fractions.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho foi investigar a adequação à nossa realidade de abordagens ao ensino de frações desenvolvidas em outros países, tendo em vista as dificuldades que professoras e alunos do ensino fundamental têm com esse conceito. Embora existam correntes teóricas diversas sobre a natureza do pensamento matemático e essas divergências se reflitam nas análises de questões relacionadas ao ensino, há um tema sobre o qual pesquisadores das mais diversas perspectivas concordam: os números racionais envolvem uma das noções mais complexas que os alunos do ensino fundamental encontram em matemática (ver, por exemplo, Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Carpenter, Lindquist, Brown, Kouba, Silver, and Swafford, 1988; Hart, 1981; Kerslake, 1986; Kieren, 1988, Charalambous e Pitta-Pantazi, 2005). As frações representam o primeiro encontro dos alunos do ensino fundamental com os números racionais. Segundo Tirosh, Fischbein, Graeber, e Wilson (1999), os desafios que os alunos encontram na aprendizagem de frações resultam de vários fatores:

(1) as crianças não têm com as frações a mesma familiaridade fora da sala de aula que têm com os números naturais (Greer, 1994);

(2) é difícil compreender que uma representação que requer dois números possa ser um número só e representar uma só quantidade (Hart, 1981; Kerslake, 1986);

(3) as crianças incorretamente atribuem à notação fracionária as mesmas propriedades dos números naturais (Bell, Fischbein and Greer, 1984; Mack, 1995; Sowder, 1988; Stafylidou & Vosniadou, 2004);

(4) as situações em que os racionais são usados e os diferentes tipos de representação convencional (razões, frações e decimais) podem parecer muito diferentes para as crianças (Campos, Nunes, da Costa, & Ceragioli, 2012; Moseley, 2005; Tirosh et AL, 1999), exigindo um grande esforço para se compreender que os mesmos invariantes possam estar subjacentes a todos esses usos.

Diante de tal complexidade, não pode ser surpresa que o ensino e aprendizagem de frações constituam um obstáculo considerável para professores e alunos no Brasil, desde o 4º ano do ensino fundamental, quando as frações são incluídas no currículo pela primeira vez, até o final dessa escolaridade. No entanto, as frações (ou números racionais na sua representação fracionária) são essenciais para o progresso do aluno na aprendizagem de matemática, sendo, portanto necessário que a escola encontre meios para promover a compreensão desse objeto matemático.

A literatura sobre educação matemática já investigou vários aspectos da compreensão dos racionais, identificando aspectos fundamentais da lógica subjacente às frações e diferentes usos das frações compatíveis com o ensino no nível fundamental. Behr et al. (1984) salientam que a compreensão dos racionais, como a dos inteiros, requer no mínimo que os alunos sejam capazes de reconhecer situações de equivalência das quantidades representadas e sejam capazes de colocar os números em ordem ascendente ou decrescente.

Em uma extensa revisão da literatura, Nunes e Bryant (2009) salientaram alguns pressupostos necessários à compreensão das frações, que as distinguem dos números naturais. Por exemplo, no campo dos números naturais, o princípio da cardinalidade significa que as quantidades representadas por um mesmo número são equivalentes e aquelas que são representadas por números diferentes não são equivalentes. Em contraste, no campo das frações esses pressupostos não se aplicam: $\frac{1}{2}\ e\ \frac{2}{4}$ são frações diferentes que representam quantidades equivalentes se forem frações de todos equivalentes. Similarmente, quantidades representadas pela mesma fração podem ser diferentes, pois a fração é relativa a um todo: $\frac{1}{3}\ de\ 12\ \ e\ \ \frac{1}{3}\ de\ 15$ são exemplos de quantidades representadas pela mesma fração, $\frac{1}{3}$, mas a fração se refere a quantidades diferentes.

Apesar das dificuldades com a representação fracionária, a literatura sugere que os alunos têm noções intuitivas sobre aspectos centrais ao conceito de frações. Vários autores (Irwin, 2001; Mack, 1990; 2001; Streefland, 1990; 1993; 1997) argumentam que, dada a complexidade das frações, é essencial que o ensino capitalize as noções intuitivas que os alunos trazem para a escola, as quais podem criar um alicerce para construção de uma compreensão adequada das frações. Duas situações em que as frações são usadas aparecem na literatura como possíveis oportunidades para introduzir o aluno às frações: a situação parte-todo e a situação quociente. É, portanto, necessário considerar o que as investigações anteriores indicam sobre que noções intuitivas as crianças desenvolvem nessas situações assim como as possíveis dificuldades que surgem.

Na situação parte-todo, uma unidade (como uma pizza, uma barra de chocolate, ou uma figura geométrica) é dividida em partes iguais. A unidade passa a ser concebida como o todo ao qual a fração se refere. O denominador da fração representa o número de partes em que o todo foi dividido. O numerador da fração representa o número de partes às quais a quantidade se refere: por exemplo, em um retângulo que foi dividido em quatro partes iguais, três das quais foram pintadas, a fração $\frac{3}{4}$ representa a parte pintada. Na situação quociente, a fração representa a divisão de uma medida por outra: por exemplo, se tivermos 3 barras de chocolate para repartir igualmente para 4 crianças, a fração $\frac{3}{4}$ representa, ao mesmo tempo, o número de barras de chocolate através do numerador (3), o número de crianças que vão repartir o chocolate através do denominador (4), a divisão é representada pela barra entre o numerador e o denominador ($\frac{3}{4}$ significa 3 dividido por 4) e a quantidade de chocolate que cada criança recebe ($\frac{3}{4}$), independentemente de como foram cortados e distribuídos os chocolates. Portanto, a representação fracionária nas situações quociente gera um signo extremamente rico em significado.

Em muitos países o ensino de frações inicia-se com a situação parte-todo, que pode ser ampliada para incluir frações de quantidades discretas (por exemplo, $\frac{3}{4}$ de 12). As frações de conjuntos envolvem novas considerações além das frações de quantidades contínuas, que não serão discutidas no presente artigo. Em consequência do uso de situações parte-todo em muitos países, e principalmente naqueles que são os maiores produtores de conhecimento em educação matemática para o mundo ocidental[3], um grande número de estudos tem analisado quase que exclusivamente as dificuldades das crianças na compreensão das frações em

[3] As situações quociente são usadas em alguns países orientais, como em Taiwan e no Japão, mas as dificuldades de comunicação de seus resultados em países do Ocidente impedem sua disseminação entre nós.

situações parte-todo (para uma revisão dessa literatura, ver Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992) bem como a eficácia de diferentes formas de se apresentar as situações parte-todo, como por meio de materiais concretos produzidos para o ensino de frações usando situações parte-todo (por exemplo, Cramer, Post, & DelMas, 2002) ou da reta numérica, uma representação consistentemente associada à representações parte-todo (Gearhart, Saxe, Seltzer, Schlackman, Ching, Nasir, et al. (1999). Os proponentes do ensino de frações a partir de situações parte-todo (ver Pitkethly & Hunting, 1996 para uma análise) consideram que estas situações facilitam as conexões que os alunos podem estabelecer entre seu conhecimento de números naturais e frações. Primeiramente, a representação fracionária deveria ser aprendida facilmente porque ela utiliza apenas a dupla de contagem de partes, algo que os alunos sabem fazer, e a memorização do que é o denominador e o que é o numerador. Em segundo lugar, argumenta-se que os alunos do ensino fundamental podem beneficiar- se do uso de imagens que representam as frações: a imagem de $\frac{1}{2}$ seria diferente da de $\frac{1}{3}$ e facilmente coordenável com a imagem de $\frac{2}{4}$ por meio de superposições de cortes sobre o mesmo objeto. Finalmente, os alunos deveriam beneficiar-se de sua compreensão de relações entre o todo e as partes, que se desenvolve a partir de 6 ou 7 anos de idade (Armstrong & Larson,1995).

Essa visão otimista da eficácia do ensino de frações em situações parte-todo não é confirmada por pesquisas que analisam os resultados desse ensino por meio do conhecimento dos alunos identificados em resultados de avaliações. As dificuldades da situação parte-todo são muitas e não podem ser subestimadas. Por exemplo, a partição necessária para se dividir uma quantidade contínua em partes iguais é, por si só, um obstáculo. A fim de dividir corretamente, as crianças precisam antecipar quantos cortes devem fazer e qual a sua posição, mas muitas não compreendem facilmente a relação entre o número de cortes e o número de partes, esperando que dois cortes resultem em duas partes (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960). Além disso, as crianças se deixam facilmente seduzir pela percepção, e julgam, por exemplo, que as metades de dois retângulos do mesmo tamanho não são equivalentes se sua aparência perceptual for muito diferente porque elas resultam de cortes feitos de modo diverso (um retângulo cortado na diagonal e o outro dividido com um corte paralelo à base produzem metades de aparência bastante distinta; ver Hunting, 1983; Kamii & Clark, 1995; Lima, 1982; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960). É possível que o uso de imagens, ao invés de facilitar a compreensão, torne-se um obstáculo para a mesma. Armstrong e Larson (1995), por exemplo, investigaram a comparação de frações entre alunos da 4ª à 8ª série nos Estados Unidos. Os pesquisadores observaram que a maioria alunos ignorava as relações parte-todo e tentava resolver as questões por meio de comparações perceptuais diretas. O uso de raciocínios baseados em relações parte-todo aparecia somente entre os alunos das séries mais avançadas, principalmente os da 8ª série. Também no Brasil, Lima (1982) observou o uso de estratégias visuais na comparação de frações e um aparecimento relativamente tardio do uso de raciocínios baseados na relação entre as partes e o todo para comparar áreas resultantes de divisões de retângulos equivalentes. Tais resultados são consistentes com os observados por Piaget et al (1960) em Genebra e por Kamii e Clark (1995) nos Estados Unidos.

Quanto ao uso da representação fracionária em situações parte-todo, Campos, Jahn, Leme da Silva, da Silva (1995) observaram que muitos alunos na faixa etária de 10 e 12 anos executavam a dupla contagem sem preocupar-se com o tamanho das partes; quando um retângulo estava dividido em retângulos menores e triângulos que correspondiam à metade dos retângulos menores, muitos alunos contavam as partes sem considerar a relação entre elas. Similarmente, muitos alunos pintam adequadamente $\frac{2}{3}$ de uma figura dividida em 3 partes mas não conseguem pintar $\frac{2}{3}$ de figuras divididas em 6 e 9 partes, revelando, assim, que as imagens que formaram das frações interferem com sua compreensão da equivalência (Brown, Hart, & Kücherman, 1984; Campos, Kerslake, 1986). Larson (1980) obteve resultados semelhantes nos Estados Unidos.

Os trabalhos de Kieren (1988) no Canadá, Streefland (1990; 1993; 1997) na Holanda e Mack (1990; 2001) nos Estados Unidos desempenharam um papel significativo na disseminação da hipótese de que o uso de situações quociente poderia oferecer uma alternativa válida para o início da aprendizagem de frações no ensino fundamental. Estes trabalhos documentam, consistentemente, que os alunos demonstram ter noções intuitivas sobre a situação de divisão, as quais podem constituir um bom fundamento para a construção da compreensão de frações, pois estão relacionadas aos invariantes das frações. A situação quociente envolve a divisão de uma medida por outra. A partir dos 6 ou 7 anos, os alunos começam a compreender que, quanto maior o número de crianças repartindo um certo número de chocolates, por exemplo, menor será a porção que cada um recebe (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005; Squire & Bryant, 2002 a; 2002 b; 2003). Essa relação inversa entre o divisor e o quociente constitui uma janela por meio da qual os alunos podem apreciar que, quando o numerador é constante, quanto maior o denominador, menor o valor da fração. Ainda nas situações quociente, as crianças de 8-9 anos começam também a compreender que diferentes frações podem indicar quantidades equivalentes: parafraseando uma aluna, "não importa como os chocolates foram cortados, não é a fração que importa, mas a quantidade que cada um recebe" (Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans, & Wade, 2007).

Investigações sobre a compreensão de invariantes da divisão por crianças de 6 a 8 anos são bastante conhecidas no Brasil. No entanto, as implicações educacionais de resultados de pesquisas feitas em outros países nem sempre são aceitas pelos professores e pelos responsáveis pelas políticas educacionais. Existem diversas razões que podem explicar a resistência a mudanças educacionais, mesmo quando essas mudanças parecem justificadas por pesquisas. Entre elas, salientamos o apego às tradições, a possibilidade de que estudos feitos em outros países não reflitam a realidade brasileira, e a ideia de que resultados de pesquisas feitas por pesquisadores diretamente em interação com as crianças podem não representar o que aconteceria se as mesmas questões fossem colocadas por professores em sala de aula. Essas preocupações são, de fato, relevantes. Nunes e Bryant (2006) argumentam que a passagem da pesquisa do laboratório para a sala de aula não pode ser feita sem investigações adicionais, relevantes à sala de aula. Quando os investigadores interagem individualmente com as crianças, podem acompanhar seu raciocínio e provocar na criança a consciência de suas contradições. É necessário demonstrar que esta forma de interação pode ser usada em sala de aula, quando muitos alunos estão resolvendo as mesmas questões, com resultados positivos para a aprendizagem.

O presente estudo parte do reconhecimento da dificuldade de se trabalhar com frações e, ao mesmo tempo, de sua importância para o desenvolvimento conceitual dos alunos. Estudos anteriores mostraram que o ensino feito atualmente no Brasil, baseado primordialmente na situação parte-todo, não parece ser suficiente para que os alunos atinjam desempenho satisfatório em avaliações da competência no uso da representação fracionária bem como da compreensão de frações. Desta forma, o estudo visa analisar em nosso meio a validade de resultados obtidos em outros países, descrevendo como alunos do ensino fundamental reagem a problemas em situação quociente apresentados em sala de aula por suas professoras.

Os objetivos específicos desta pesquisa foram:

- adaptar tarefas planejadas por Streefland (1997) e Nunes et AL (2007) para nossa realidade e sistematizar os resultados dessa investigação de modo a oferecer aos professores da rede de ensino fundamental elementos para trabalhar o conceito de frações em situações quociente;

- verificar se os alunos demonstram, em geral, noções intuitivas relevantes para a compreensão do conceito de frações, como a relação inversa entre o divisor e o quociente e a equivalência de quantidades partidas de diferentes formas;

- analisar o processo de ensino e aprendizagem da notação fracionária apresentada em situações quocientes.

- analisar a atuação de professores do Ensino Fundamental durante essas atividades, realizadas com a participação de pesquisadores atuando como se fossem professores compartilhando uma classe.

MÉTODO

Tendo em vista o objetivo descritivo desta investigação, o estudo envolveu a participação de alunos de uma classe de 4º ano e uma de 5º ano, e um total de 37 alunos e 2 professoras. Segundo o depoimento das professoras das classes, os alunos do 4º ano ainda não haviam recebido instrução sobre frações; os alunos do 5º ano tinham participado de aulas sobre frações ilustradas em situações parte-todo. A fim de atingir os objetivos do estudo, os pesquisadores prepararam uma série de atividades a serem utilizadas em sala de aula pelas professoras com seus alunos.

Antes da intervenção foi realizada uma sessão de uma hora e meia, com as professoras, a fim de lhes apresentar os pressupostos da pesquisa. As professoras tiveram a oportunidade de olhar as atividades que seriam propostas e os pesquisadores comentaram algumas das reações de alunos descritas em estudos anteriores, salientando a necessidade de se observar se tais reações também seriam observadas em alunos brasileiros. Em cada classe foram realizadas três sessões. Durante a intervenção os alunos foram distribuídos em mesas com 4 ou 5 alunos cada.

Os problemas, adaptados de Streffland (1997) e Nunes et al. (2007), foram escolhidos para atingir os seguintes objetivos:

-promover uma reflexão sobre a natureza multiplicativa das relações entre as medidas em situações quociente;

-promover a reflexão sobre a relação inversa entre o divisor e o quociente em situações em que os alunos não sabem as quantidades;

-ensinar a representação fracionária em uma situação quociente e, após apenas um exemplo, levar os alunos a discutirem sobre a possibilidade de representar quantidades em outros exemplos, tornando o estudo da representação uma atividade de resolução de problemas;

-estimular os alunos a considerarem que a mesma quantidade pode ser dividida de diversas maneiras e, ainda assim, resultar em porções equivalentes;

-estimular os alunos a estabelecerem ligações entre as noções intuitivas que eles já têm sobre as situações de divisão e a representação fracionária;

-provocar discussões em torno da importância do todo para o valor da mesma fração.

Os problemas que compunham o protocolo de pesquisa foram apresentados por meio de slides projetados em uma tela na frente da sala de aula. Os alunos resolviam cada problema individualmente, sem suporte de material concreto, e registravam suas respostas numa folha de papel. Quando todos haviam respondido, cada aluno apresentava sua resposta para o grupo. Após discussão com seu grupo, eles transcreviam a solução da tarefa numa transparência. Caso não houvesse acordo e o grupo tivesse mais de uma solução, todas as respostas eram transcritas para a transparência. Neste momento um aluno era escolhido pelo grupo para ser o relator do mesmo e dirigia-se à frente da classe, colocava sua transparência no retroprojetor e defendia a solução encontrada pelo grupo. Um debate coletivo era estabelecido para promover a aprendizagem colaborativa. A pesquisadora questionava o raciocínio dos alunos, mesmo quando correto, apresentando contra-sugestões no estilo do método clínico-piagetiano (ver Carraher, 1982).

Três pesquisadoras estavam presentes durante todas as sessões, mas apenas uma interagiu com os alunos durante suas apresentações coletivas, sendo que as outras assumiram o papel de observadoras participantes, filmando os grupos, mas também respondendo a questões dos alunos quando solicitadas. As sessões foram gravadas e filmadas; o material apresentado neste trabalho baseou-se nas produções individuais e coletivas dos alunos, registradas durante as sessões.

RESULTADOS

Nesta seção descrevemos a atuação das professoras de um modo geral e, a seguir, exemplificamos algumas das respostas dos alunos.

A atuação das professoras

As professoras aceitaram a proposta de apresentar os problemas aos alunos e dirigir as classes, embora não tivessem usado metodologias semelhantes anteriormente. Nas duas primeiras aulas, elas apresentaram todos os problemas e observaram o trabalho dos alunos em diferentes grupos durante a aula. Os alunos frequentemente perguntavam se tinham resolvido as questões corretamente e as professoras explicavam que naquele momento eles não deveriam preocupar-se se estavam certos ou errados, mas deveriam pensar sobre as questões e procurar explicar como tinham pensado. Em alguns problemas, as professoras sugeriram aos alunos que desenhassem os objetos e fizessem a partição, remetendo-os às situações parte-todo com as quais estão mais familiarizadas, mas essa sugestão nem sempre era feita. Em geral, essa sugestão levava os alunos a buscarem comparações perceptuais ao invés de pensar sobre as divisões que tinham sido feitas. Em algumas ocasiões os alunos apresentaram questões inesperadas e as professoras solicitaram a participação dos pesquisadores na discussão dos grupos. Na terceira aula, nenhuma das duas professoras seguiu o trabalho dos grupos. Após apresentarem os problemas, elas usaram o tempo para outras atividades, mas voltavam a acompanhar as atividades dos alunos durante a discussão coletiva. No entanto, os alunos continuaram a trabalhar na resolução dos problemas.

Não foi possível avaliar se as professoras desenvolveram uma maior compreensão dos processos envolvidos no ensino e aprendizagem de frações em situações quociente. Elas expressaram surpresa diante da qualidade do raciocínio dos alunos, especialmente nos dois primeiros dias, porém essa reação positiva não se traduziu em persistência na observação dos trabalhos dos grupos no terceiro dia.

Em resumo, as professoras adaptaram-se facilmente ao método de apresentação dos problemas e à maneira de interagir sugerida por nós, focalizando o raciocínio dos alunos e não somente se suas respostas estavam corretas ou não, mas foram menos participativas na última aula. Essas observações nos levam a concluir que não seria difícil introduzir no currículo atividades para apresentar o conceito de frações em situações quociente, embora as professoras possam sugerir aos alunos a adoção de estratégias de partição de figuras e comparação visual. É possível que as professoras tenham julgado que as relações que estávamos buscando estabelecer com os alunos entre quantidades e frações são óbvias e não precisam ser analisadas em três aulas, o que explicaria sua ausência nos grupos de alunos no terceiro dia. Outra possível explicação seria a observação de respostas não antecipadas, em virtude de ter sido sua exposição aos objetivos da investigação muito breve.

As reações dos alunos

1. *A relação entre os três termos da divisão*

A Figura 1 apresenta os dois primeiros problemas, cujo objetivo é estimular entre os alunos a discussão das relações entre quantidades numa situação de divisão. Esses foram os problemas usados no primeiro dia.

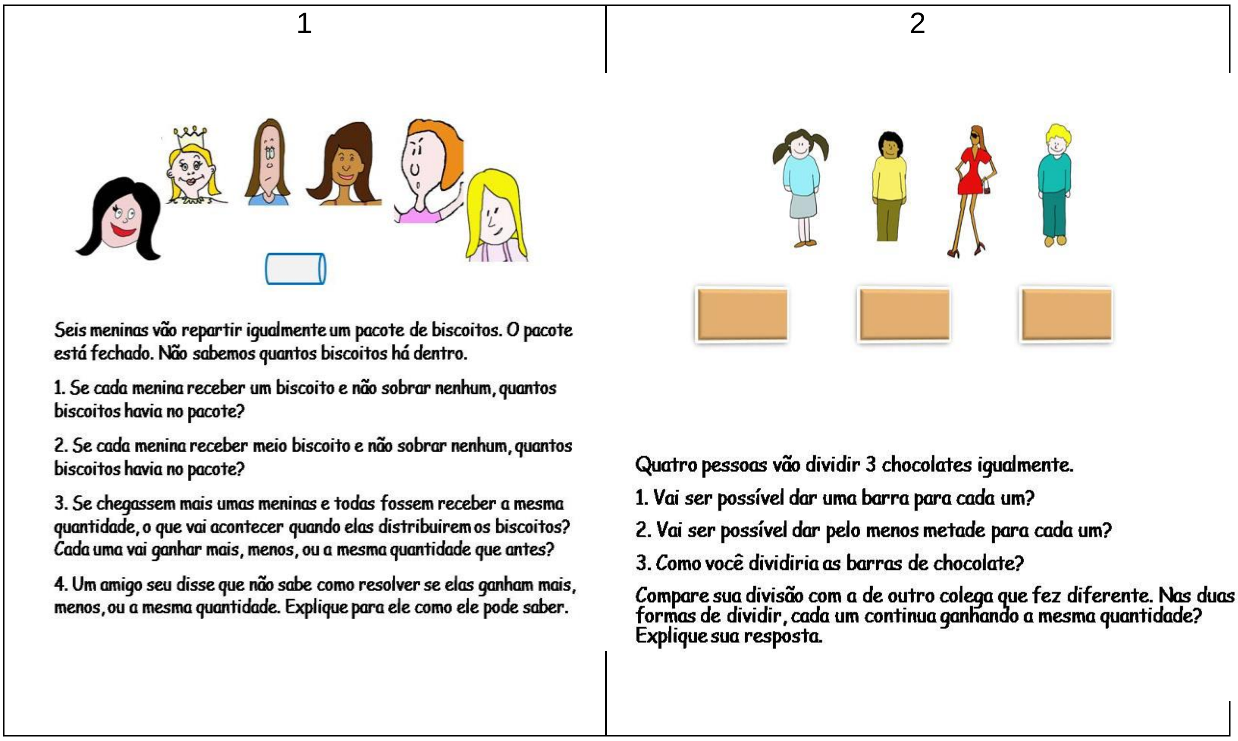

Figura 1: Os dois primeiros problemas apresentados aos alunos.

As perguntas 1.1 e 1.2 provocam a discussão da relação multiplicativa entre o divisor e o dividendo e as perguntas 1.3 e 1.4 focalizam a relação inversa entre divisor e quociente. Os alunos não precisam saber a notação fracionária e a única fração mencionada é "meio", que faz parte do vocabulário quotidiano. A dificuldade da questão 1.3 é que ela requer que os alunos raciocinem sobre uma relação entre quantidades – quanto maior o número de crianças, menor a quantidade que cada um recebe – sem que tenham o conhecimento das quantidades. No entanto, como nas questões 1.1 e 1.2 os alunos seguem hipóteses sobre qual poderia ser o valor do dividendo, a reflexão nestas questões pode ajudar aqueles alunos que precisam de pensar em quantidades específicas para resolver a questão.

A Figura 2 apresenta as produções de três alunos nas duas primeiras questões e a resposta coletiva de um dos grupos, apresentada para a classe na transparência. As produções desses alunos exemplificam as tendências observadas, descritas brevemente a seguir.

1	2

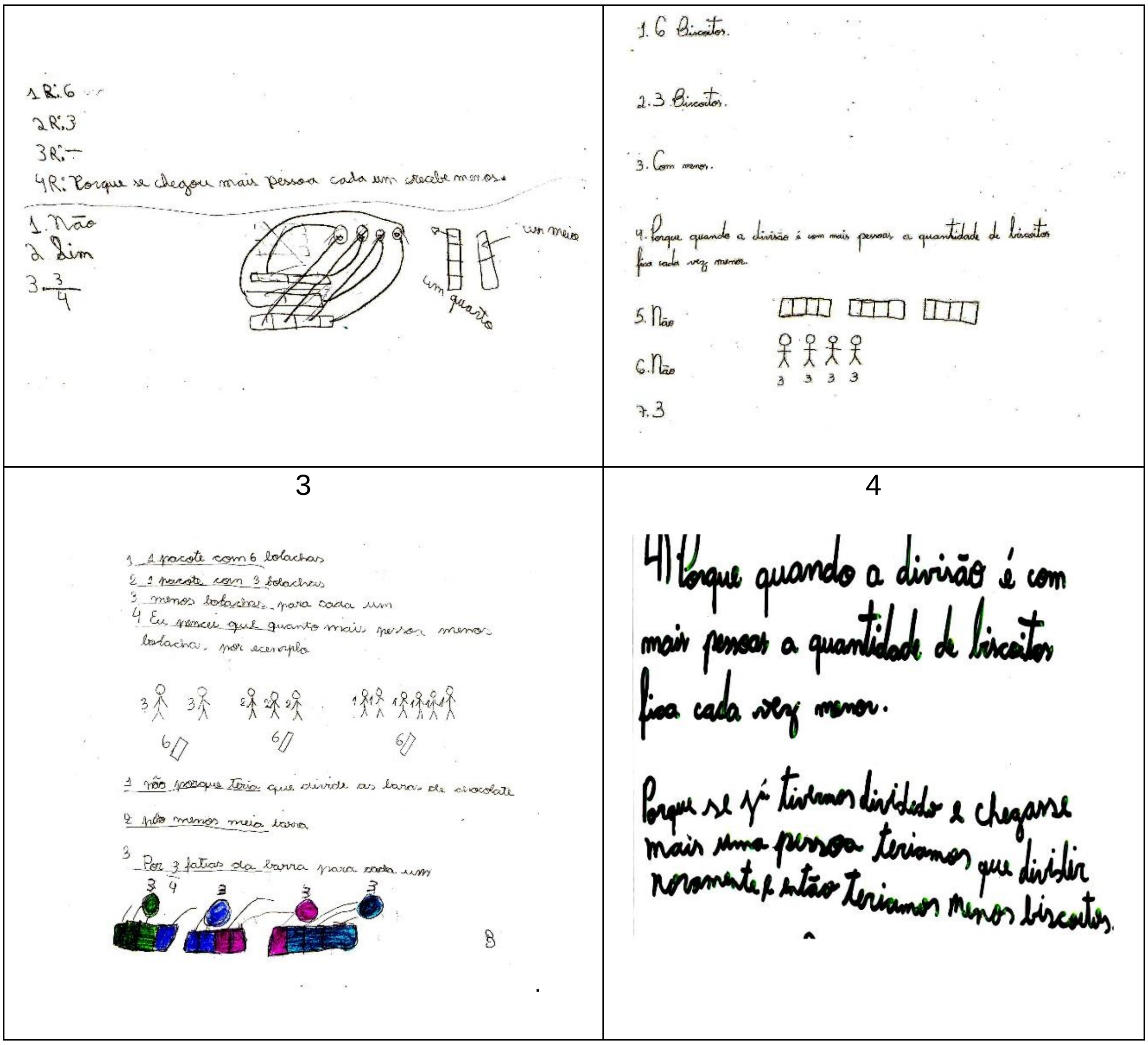

Figura 2: Quatro produções de alunos nas duas questões iniciais.

Primeiro, os alunos em geral não tiveram dificuldade em estabelecer a relação multiplicativa entre quociente e dividendo. Alguns alunos hesitaram quando questionados sobre o número de biscoitos se cada menina recebesse meio biscoito. Quando lhes foi sugerido que desenhassem um biscoito partido ao meio para pensarem sobre a questão, imediatamente encontraram a solução, pois contaram seis metades e concluíram que haveria 3 biscoitos no pacote.

A maioria dos grupos concluiu que quanto maior o número de meninas, menos elas iriam receber. Na Figura 2, a quarta produção, são explicações de um dos grupos transcritas na transparência. Porém, nem todos os grupos concluíram que quando chegassem mais meninas cada uma receberia menos do que anteriormente, argumentando que a quantidade de biscoitos a ser dividida não tinha mudado e, portanto, elas continuariam recebendo a mesma quantidade. Esse argumento, baseado na consideração apenas do dividendo, foi apresentado ao restante dos alunos na situação de debate coletivo. Nas duas classes, os alunos de outros grupos tentaram demonstrar que, ao chegarem mais meninas, cada um receberia menos. Dois tipos de argumento foram registrados. O primeiro usava a ideia de subtração: se as meninas já tivessem repartido os biscoitos quando as outras chegassem, cada menina teria de tirar um pouco de sua parte para as que haviam chegado mais tarde. O segundo baseava-se no uso de uma quantia imaginária, geralmente 6: se o pacote tivesse 6 bolachas e cada uma fosse ganhar uma bolacha, quando chegassem mais meninas, elas já não poderiam ganhar uma bolacha inteira pois teriam de repartir. Este segundo argumento foi sempre convincente. No entanto, as pesquisadoras concluíram que seria necessário voltar a essa discussão mais tarde, pois esses alunos não estavam analisando a relação entre quantidades, mas calculando o que acontecia quando um valor imaginário era utilizado na resolução do problema. Thompson (1993; 1994) argumenta que é importante que os alunos aprendam a pensar e operar sobre relações, não apenas sobre quantidades. Como as frações envolvem sempre uma relação, decidiu-se incluir outros problemas que envolviam a relação inversa entre o divisor e o quociente na terceira sessão.

A produção 3 na Figura 2 ilustra uma resposta em que o aluno utiliza quantidades hipotéticas. Como não acompanhamos sua produção, não sabemos se a quantidade foi usada para ilustrar o raciocínio ou se, ao contrário, possibilitou o raciocínio.

2. *Iniciando a reflexão sobre equivalência*

Note-se que a questão sobre a equivalência é colocada em relação a divisões das mesmas barras de chocolate porém feitas de diferentes maneiras. Esse não é um detalhe metodológico, mas é uma decisão importante, baseada em investigações anteriores. Piaget et al. (1960) observaram que algumas crianças podem compreender a equivalência entre, por exemplo, $\frac{1}{2} e \frac{2}{4}$ quando os $\frac{2}{4}$ resultam da partição do $\frac{1}{2}$ mas deixam de reconhecer a equivalência das mesmas frações se elas resultarem da partição de duas figuras do mesmo tamanho.

As respostas à questão 2 apresentadas nas Figuras 2 e 3 ilustram um resultado interessante: alguns alunos se referem a frações e outros a pedaços. Essa diferença não coincide com a escolaridade dos alunos, pois alguns alunos do 4º ano usaram frações e alguns alunos do 5º ano referiram-se a pedaços. A Figura 3 apresenta outros exemplos de respostas à questão 2.

O exemplo apresentado em 3.1 ilustra uma resposta menos elaborada às perguntas se as crianças poderiam receber uma barra e se poderiam receber pelo menos metade: o aluno não parece pensar na divisão exaustiva, admitindo que é possível sobrar uma pessoa ou uma barra. Quando estas respostas apareciam nos grupos, os outros alunos consistentemente argumentavam que não se podia deixar a divisão incompleta ou deixar algum aluno sem receber nada. A pesquisadora também questionava se as crianças deveriam dar meia barra para cada um e jogar o restante fora. A importância da divisão exaustiva foi facilmente reconhecida nesse contexto, uma vez que a ideia de jogar fora uma barra de chocolate parecia absurda aos alunos.

As produções das Figuras 2 e 3 mostram que entre os alunos brasileiros, como entre os holandeses e ingleses, aparecem tanto a divisão de cada chocolate em 4 partes como a divisão de dois chocolates ao meio, sendo o último dividido em 4 partes. Os exemplos em 3.3 e 3.4 foram retirados das transparências, na qual os grupos apresentam diferentes maneiras de se repartir os chocolates. Como aparecem essas duas formas de partição da barra, a oportunidade de se discutir a equivalência surge entre os alunos brasileiros como nos estudos feitos anteriormente.

Um aspecto a ser destacado nas produções dos alunos é o uso de diagramas que mostram correspondências entre as crianças e as partes. O uso de correspondências pelos alunos durante o estudo de frações já foi relatado também nos trabalhos de Kieren (1988) e Nunes et al (2007). Becker (1993) e Nunes, Bryant, Evans, e Bell (2009) propõem que o esquema de correspondência um-a-muitos é a base dos raciocínios multiplicativos, sendo usado em ação por crianças desde os cinco ou seis anos para resolver problemas de multiplicação e divisão. O uso de diagramas que representam essas correspondências em problemas de fração é certamente uma indicação de que os alunos estão abordando as questões em termos de relações multiplicativas, mas é possível que esse conhecimento seja implícito.

1	2

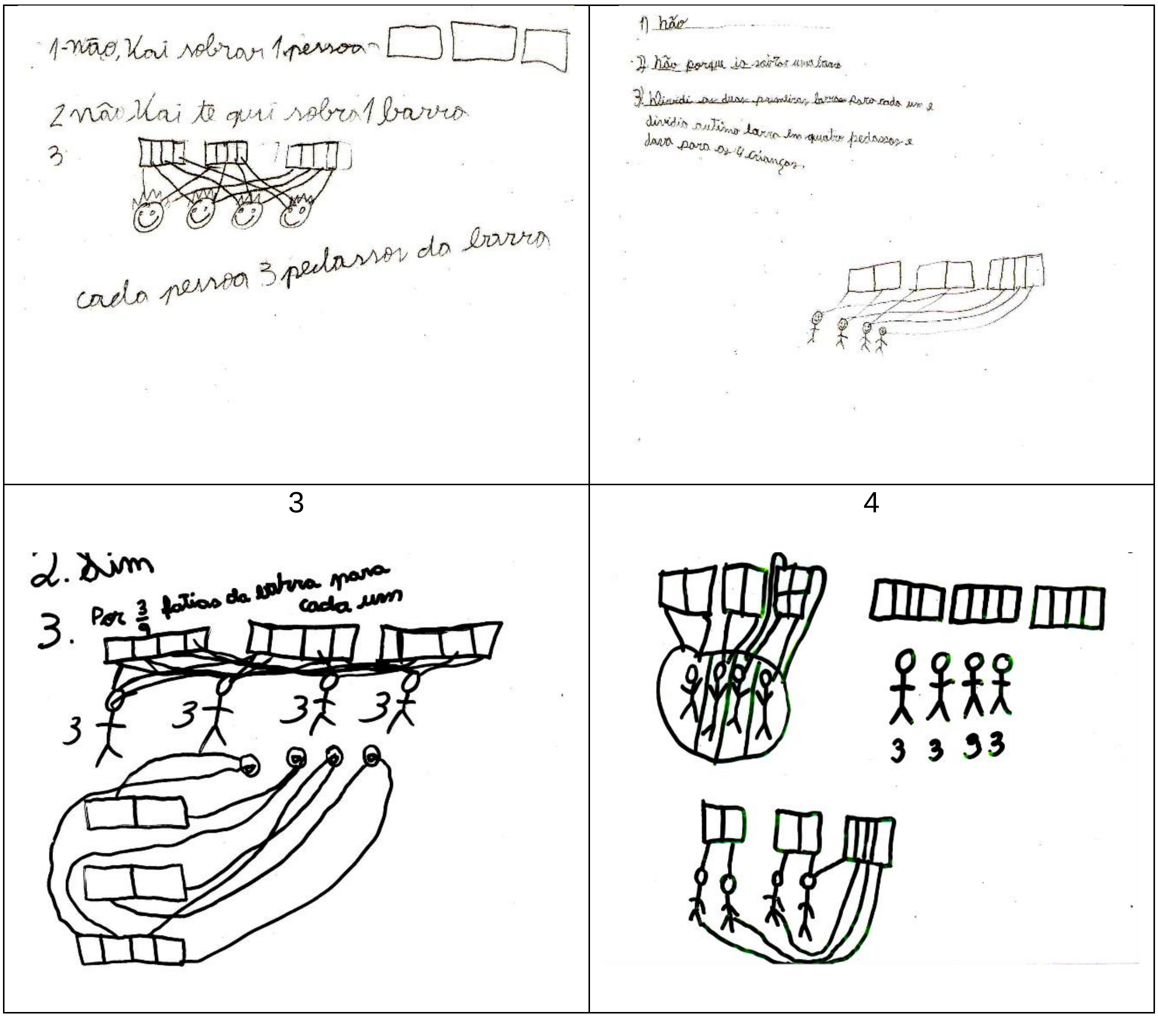

Figura 3: Exemplos de respostas à questão 2.

No que se refere aos alunos que participaram desta pesquisa, não sabemos dizer se o uso de correspondências foi provocado pelos desenhos utilizados para apresentar as questões, se foi espontaneamente adotado por alguns alunos e se difundiu entre os outros durante a aula, ou se muitos adotariam tais diagramas por si mesmos. De qualquer forma, o que importa é que muitos alunos usaram diagramas baseados em correspondências e essa maneira de representar as questões pode ter sido instrumental para seu raciocínio. Como os racionais são baseados em relações, o uso de correspondências entre quantidades nos diagramas expressa uma noção intuitiva dessas relações.

As discussões relativas à equivalência entre as porções evidenciaram diferentes pontos de vista. Os alunos que não concluíam pela equivalência argumentavam que, quando os chocolates eram divididos em quatro, as crianças ganhavam três pedaços, mas quando dois chocolates eram divididos ao meio e o outro em quatro, elas ganhavam dois pedaços, concluindo que a divisão em quartos resulta numa quantidade maior de chocolate. Esse raciocínio ilustra a consideração do numerador como indicador da quantidade, sem que sua relação seja feita com o denominador, uma forma de pensar que já foi registrada na literatura anteriormente mesmo em estudantes do curso secundário (ver, por exemplo, Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Diante de respostas que focalizavam apenas os numeradores, os alunos que concluíam pela equivalência argumentavam que cada metade correspondia a dois quartos. Dois tipos de argumento eram usados nessa discussão: (1) quando se corta as metades ao meio, obtêm-se quartos e (2) quando o número de pedaços é o dobro, o tamanho de cada pedaço é a metade do outro. As apresentações em grupo, em geral, resultaram na unificação dessas respostas, e a maioria dos grupos concluiu, após as discussões coletivas, que o modo como a divisão foi feita não importava: se a divisão fosse justa, as crianças receberiam a mesma quantidade.

3. *Aprendendo a usar a representação fracionária*

Um argumento frequentemente usado para que o conceito de fração seja apresentado primeiro nas situações parte-todo seria a facilidade com que os alunos adotam a notação fracionária. No entanto, estudos feitos no Brasil (Campos et al, 2012) encontraram um nível de respostas corretas em questões que envolvem situações parte-todo em torno de 65% após o ensino, um índice de acerto que não pode ser considerado satisfatório. Portanto, é de grande interesse observar se os alunos parecem adotar a notação fracionária sem grande dificuldade nas situações quociente. Em geral, os alunos não mostraram dificuldades em passar do primeiro exemplo de representação fracionária na situação quociente para outros exemplos. Quando alguns alunos sentiam dificuldade em um grupo, havia sempre outros alunos que os auxiliavam. A Figura 4 apresenta dois exemplos de produções dos alunos durante a aprendizagem da notação bem como a resposta à questão seguinte.

As produções dos alunos nas questões de notação fracionária sugerem que, pelo menos nos primeiros momentos, não houve dificuldade na adoção desta representação em situações quociente. Não podemos, entretanto, concluir que esta dificuldade não surgiria mais tarde, pois o estudo não envolveu o acompanhamento posterior dos alunos, dado seu caráter descritivo. O que se pode concluir é que o uso da notação fracionária em situações quociente não pareceu causar dificuldades aos alunos.

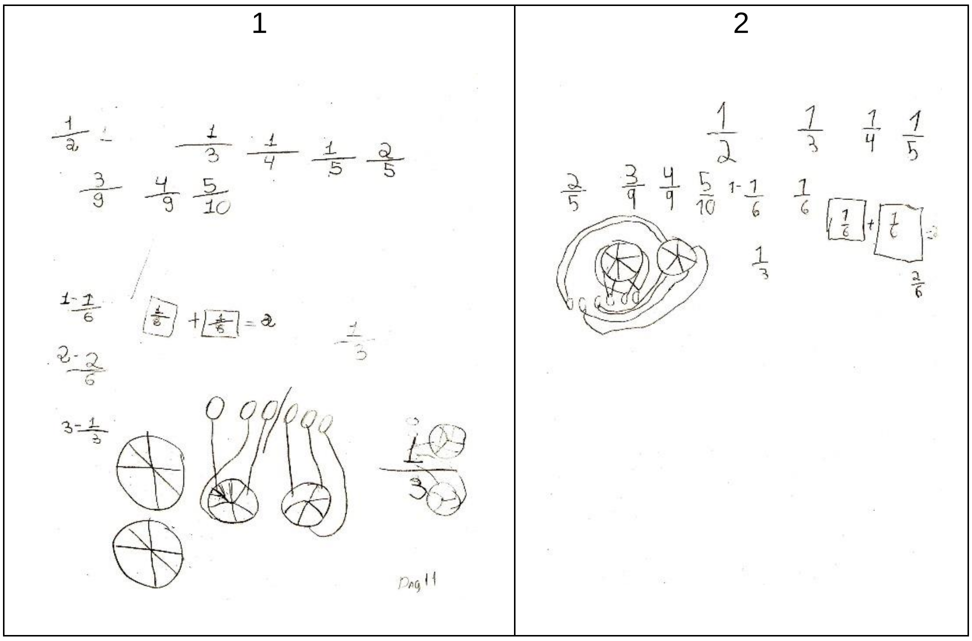

Figura 4: O uso de notação fracionária e a comparação entre 2/6 e 1/3.

4. Novas discussões sobre a equivalência

A Figura 5 apresenta as questões que introduzem as reflexões sobre equivalência após os alunos terem a experiência de nomear frações em situações quociente; as questões foram adaptadas do trabalho de Streefland (1997).

Figura 5: Examinado a equivalência de 2/6 e 1/3.

A maioria das atividades que se seguiram nas sessões dois e três focalizaram ou a equivalência ou ordenação das frações, porém algumas focalizavam a relação inversa entre o divisor e o quociente sem solicitar uma representação fracionária. Em todas as questões de equivalência, os problemas envolvem a divisão da mesma quantidade inicial para o mesmo número de pessoas, de forma que os alunos possam tornar-se conscientes da importância da relação entre numerador e denominador para a equivalência, e do fato de que os valores do numerador e denominador não podem ser considerados isoladamente.

Note-se que os alunos cujas produções aparecem na Figura 3 inicialmente representaram a soma de $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ como 2, não usando a representação fracionária. Essa resposta não é incomum, mas não é difícil estimular os alunos a refletirem sobre ela, pois basta perguntar-lhes se a resposta é duas pizzas para que eles tomem consciência de que a resposta deve ser uma fração, e não um inteiro.

Quando os alunos usam uma fração, surgem duas respostas: $\frac{2}{6} e \frac{2}{12}$. No estudo presente, observamos as duas respostas e discussões interessantes entre os alunos. Os alunos que respondiam $\frac{2}{12}$ indicavam que havia 12 pedaços de pizza no total. Os alunos que respondiam $\frac{2}{6}$ indicavam que nenhuma pizza havia sido dividida em 12 pedaços. Como intervenção na discussão, foram apresentadas duas questões suplementares pelos pesquisadores: (1) se vocês tivessem dividido desde o início as duas pizzas pelas seis crianças, que fração seria esta? (2) o que esta fração representa? Em geral, essas questões remetiam os alunos à representação fracionária que haviam aprendido em situações quociente, na qual o numerador indica o dividendo, o denominador indica o divisor, e a fração representa a quantidade que cada um recebe. Desta forma, os alunos podiam tomar consciência de que a resposta $\frac{2}{12}$ entrava em contradição com a representação fracionária que haviam aprendido no início da aula.

Embora as questões suplementares tenham, em geral, levado a uma solução, não se deve subestimar o calor dessas discussões, pois os alunos defendendo cada uma das duas respostas tinham boas razões para crer nas suas respostas. É possível que essa questão ofereça uma boa iniciação à soma de frações, porém a sequência de atividades usada no presente estudo não investigou a soma de frações.

A comparação entre $\frac{2}{6} e \frac{1}{3}$ também provoca discussões interessantes, que proporcionam novamente aos alunos a oportunidade de refletir sobre o fato de que o numerador não pode ser considerado por si só, mas deve ser considerado em relação com o denominador. Poderia parecer que, tendo os alunos considerado o problema quando discutiram a divisão de três chocolates para quatro crianças, já não teriam mais o que aprender nessa questão. No entanto, a ideia de não considerar o numerador em si mesmo, mas em relação ao denominador é muito nova e bastante complexa, e os alunos se beneficiam de diversas oportunidades de reflexão. Muitos dos argumentos na análise dessa questão foram semelhantes aos usados na questão sobre a divisão dos chocolates, mas encontramos também novas explicações. A Figura 6 ilustra essas novas explicações.

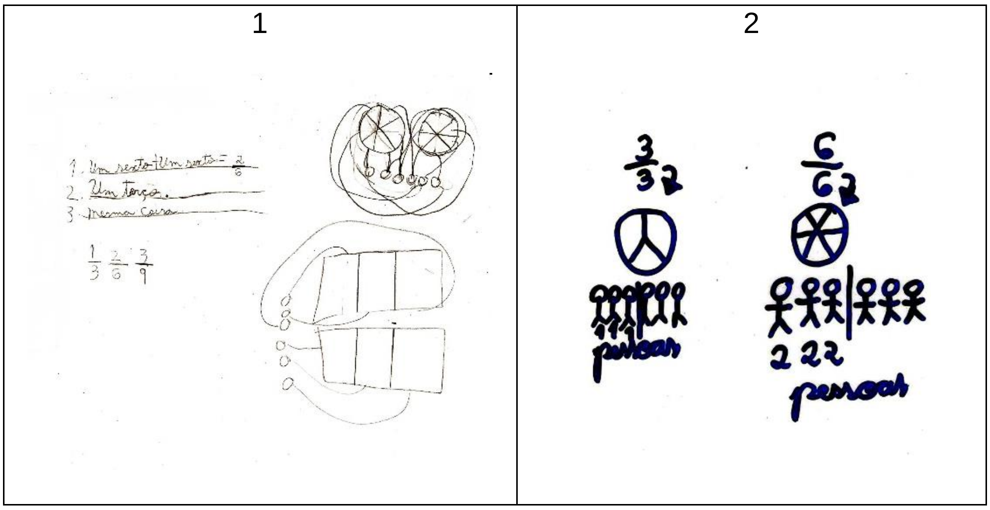

Figura 6: Duas produções relativas à comparação entre 2/6 e 1/3.

A produção em 6.1 sugere que o aluno começa a identificar um padrão nas equivalências, pois acrescenta uma fração, $\frac{3}{9}$, que não está representada nas divisões, mas na qual a relação entre o numerador e o denominador é multiplicativa e constante quando as frações são equivalentes. Alguns alunos expressaram essa observação, dizendo que as frações todas faziam parte da tabuada do três. Observe-se que em nossa sequência de atividades não proporcionamos aos alunos a oportunidade de explorar a ideia de relação multiplicativa constante facilmente. Se tivéssemos utilizado outras frações – por exemplo, frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ *ou* $\frac{1}{5}$, teríamos facilitado a exploração desse raciocínio. No entanto, utilizamos frações como

$\frac{2}{3}$ (no problema 6 chocolates repartidos entre 9 crianças), em que a relação constante entre o numerador e o denominador é 1.5, e portanto é ainda muito difícil para os alunos.

A produção apresentada em 6.2 talvez não pudesse ser interpretada se o aluno não a tivesse explicado usando a transparência reproduzida na figura. Segundo sua explicação, se dermos $\frac{1}{3}$ de pizza para três crianças, usamos uma pizza inteira, ou seja $\frac{3}{3}$, e ainda podemos dar à cada uma das outras três crianças a mesma quantidade. Da mesma forma, se dermos $\frac{2}{6}$ de uma pizza para três crianças, também usamos uma pizza inteira, ou seja, $\frac{6}{6}$, e ainda podemos dar a cada uma das outras crianças a mesma quantidade. Esse argumento, que parece ter como teorema em ação a ideia de que, se uma parte tomada três vezes dá certa quantidade e outra parte também tomada três vezes dá uma quantidade equivalente, as partes são necessariamente iguais. Ou seja, se $3a = x$ e $3b=x$, $a=b$. Esse argumento parece refletir um uso avançado de relações parte-todo que provavelmente poucos alunos desenvolveram nessa idade, mas já observamos explicações semelhantes em crianças inglesas, embora em muito poucas crianças. Em nosso estudo, duas produções dos alunos apresentam esse argumento, mas não podemos saber se ele foi produzido independentemente pelos dois alunos ou em conjunto.

Foram incluídos outros problemas examinando a equivalência de frações entre as atividades realizadas, que mostraram que os alunos continuavam a explorar a equivalência, produzindo diversas partições representadas por diversas frações. Embora tivéssemos receio de que os alunos achassem a atividade repetitiva, isso não ocorreu, e eles continuaram a explorar a ideia de que se pode dividir quantidades de diferentes maneiras e representar essas partições por frações diferentes, mas as crianças recebem sempre a mesma quantidade.

5. *Analisando o papel do todo*

Finalmente, incluímos questões relativas ao todo, em que a mesma fração – por exemplo, $\frac{1}{2}$, representava quantidades diferentes, pois duas meninas iam dividir um saco de pipocas menor do que o que seria dividido por dois meninos. As questões relativas ao todo não causaram qualquer dificuldade entre os alunos, que expressavam claramente a noção de que metade de uma quantidade menor não pode ser igual à metade de uma maior. Dada à facilidade com que a questão foi resolvida, não são apresentados aqui exemplos de produções dos alunos.

CONCLUSÕES E DISCUSSÃO

As respostas das crianças durante o processo de ensino e aprendizagem nos levam a concluir que encontramos entre os alunos brasileiros que participaram deste estudo, noções intuitivas semelhantes às descritas em pesquisas feitas em outros países. A compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente e a compreensão do fato de que divisões sucessivas de uma mesma quantidade não alteram a quantidade, embora as frações que representem partições diversas sejam diferentes, foram exprimidas pela maioria dos alunos durante o processo, talvez por todos. No entanto, não é possível ter certeza sobre os resultados dessas sessões a nível individual, por não terem sido utilizadas avaliações individuais ao final do processo. Ainda assim, pode-se concluir que o receio de que os resultados observados em outros países não se apliquem à realidade brasileira não tem razão de ser. Como as intervenções foram feitas com crianças frequentando os níveis de escolaridade em que as frações são ensinadas, as produções dos alunos ilustram a possibilidade de promover em sala de aula discussões sobre invariantes relevantes para a compreensão de frações. O processo de refletir sobre esses invariantes e expressá-los durante as discussões em grupo e as apresentações coletivas certamente deve trazer benefícios para a aprendizagem dos alunos.

Uma segunda conclusão é que a metodologia usada para ensinar a notação fracionária em situações quociente foi efetiva: os alunos resolveram questões sobre a notação fracionária sem dificuldade. Salientamos, porém, que um acompanhamento em longo prazo é necessário para investigar se essa aprendizagem é ou não duradoura.

Apesar de mostrar resultados tão encorajadores, o estudo tem limitações que devem ser reconhecidas, como um número reduzido de professores e alunos, o que não permite a generalização. Além disso, as professoras tiveram uma oportunidade limitada para refletir sobre as questões e receberam apenas informações verbais sobre o que se observou em outros países. Isto significou que as pesquisadoras precisaram atuar como professores, participando da discussão realizada em pequenos grupos e coletivamente. Nesse sentido, a contribuição do estudo presente é essencial para facilitar novas investigações em sala de aula, pois as anotações apresentadas sobre as reações dos alunos poderão no futuro apoiar aqueles professores que desejem implementar atividades semelhantes em outras classes.

Finalmente, deve ser salientado que de modo algum se propõe que essas três aulas devam ser vistas como um programa de ensino de frações. A finalidade das atividades foi, essencialmente, tornar mais claras para os próprios alunos suas noções intuitivas sobre as relações matemáticas numa situação de divisão e desencadear um processo de capitalização dessas noções intuitivas. São necessários outros estudos que demonstrem se de fato é possível tirar proveito dessas noções intuitivas durante o ensino subseqüente de frações. Por exemplo, pode-se investigar se a soma e subtração de frações podem ser introduzidas mais facilmente aos alunos a partir de discussões como as que observamos em torno da questão em que se perguntava que fração cada criança comeu tendo recebido $\frac{1}{6}$ mais $\frac{1}{6}$. Questões sobre a adição de frações poderiam representar o próximo passo numa sequência didática, após essas aulas introdutórias.

Deve ser salientado, também, que não se pretende que as situações quociente devam ser as únicas consideradas no ensino de frações. Estudos anteriores (Moseley, 2005) mostram que a combinação de duas situações no ensino leva à formação de representações múltiplas para o significado de frações, que resultam em uma compreensão mais ampla dos conceitos. A passagem de situações quociente para situações parte-todo envolvendo quantidades contínuas e discretas também deveria ser objeto de investigações futuras.

REFERÊNCIAS

Armstrong, B. E., & Larson, C. N. (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. *Journal for Research In Mathematics Education, 26*, 2-19.

Becker, J. (1993). Young children's numerical use of number words: counting in many-to-one situations. *Developmental Psychology, 19*, 458-465.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and content. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 399-420.

Brown, M., Hart, K., & Kücherman, D. (1984). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Fractions 1. Incorporting Fractions 1 (Computation)*. Windsor (Berks): The NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Campos, T. Jahn, A. P.; Leme da Silva, M. C. e da Silva, M. J. (1995*). Lógica das equivalências*. Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC.

Campos, T. M.; Nunes, T.; da Costa, N. M. L.; & Ceragioli,L. (2012) A Representação de Quantidades Menores do que uma Unidade. Revista Acta Scientiae, v. 14, p. 363-373, 2012.

Carpenter, T.C., Corbitt, M.K., Reys, R.E., & Wilson, J. (1976). Notes from national assessment: Addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher, 23*, 137-141.

Carpenter, T.C., Lindquist, M.M., Brown, C.A., Kouba, V.L., Silver, E.A. & Swafford, J.O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Trends and conclusions. *Arithmetic Teachers, 36*, 38-41.

Carraher, T. N. (1982). *O Método Clínico. Usando os exames de Piaget*. São Paulo: Cortez.

Charalambous, C.; Pitta-Pantazi, D. (2005). Drawing on a Theoretical Model to Study Students Understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, n. 3, 293-316.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula with the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 111-144.

Hart, K.(Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray.

Irwin, K. C. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 399-420.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor, England: Nfer-Nelson.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising Principles in spite of Procedural Differences: Children's Understanding of Division. *Cognitive Development, 20*, 388-406.

Larson, C. N. (1980). Locating proper fractions on number lines: Effect of length and equivalence. *School Science and Mathematics, 53*, 423-428.

Lima, M. F. (1982). Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento de conservação de quantitades. In T. N. Carraher (Ed.), *Aprender Pensando* (pp. 81-127). Petrópolis, Brazil: Editora Vozes.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 422-441.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 267-295.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 37-69.

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Key Understandings in Mathematics Learning. Paper 3. Understanding rational numbers and intensive quantities. http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P3_amended_FB2.pdf

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Bell, D. (2009). The scheme of correspondence and its role in children's mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 1-18.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D., & Wade, J. (2007). La compréhension des fractions chez les enfants. In M. Merri (Ed.), *Activité humaine et conceptualisation* (pp. 255-262). Toulouse: Presses Universitaires du Mirail.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. New York: Harper & Row.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of word problem. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 227-238.

Squire, S., & Bryant, P. (2002 a). From sharing to dividing: young children's understanding of division. *Developmental Science, 5*, 452-466.

Squire, S., & Bryant, P. (2002 b). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology, 81*, 1-43.

Squire, S., & Bryant, P. (2003). Children's understanding and misunderstanding of the inverse relation in division. *British Journal of Developmental Psychology, 21*, 507-526.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518

Streefland, L. (1990). Realistic Mathematics Education: what does it mean? In K. Gravemeijer, M. van den Heuvel & L. Streefland (Eds.), *Free Production Tests and Geometry in Realisitic* *mathematics Education* (pp. 79-90). Utrecht: Research Group for Mathematical Education and Educational Computer Centre, State University of Utrecht.

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 289-326). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed? In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (pp. 347-372). Hove (UK): Psychology Press.

Texto baixado de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html em 9 de Maio de 2012.

Thompson, P. (1994). The Development of the Concept of Speed and Its Relationship to Concepts of Rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 181-236). Albany, New York: State University of New York Press.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative Reasoning, Complexity, and Additive Structures. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 165-208.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14* 453-467.

Submetido: julho de 2014

Aceito: novembro de 2014