El paso más largo: sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla

RESUMEN

Estamos viendo como, en algunos institutos de investigación, algunos investigadores están destruyendo las viejas teorías que, a pesar de ser perfectamente capaces de responder a preguntas de investigación, sólo son culpables de ser anticuadas. Pero no siempre las teorías más recientes han surgido en respuesta a las mismas preguntas de investigación de las precedentes, y por lo tanto ni las incorporan ni las sustituyen, sino que simplemente las complementan. Creemos que un modernismo sin verdaderos fines sea perjudicial para las competencias en educación matemática de las futuras generaciones de investigadores y de los usuarios (como, por ejemplo, maestros).

Palabras llave: Teoría de las situaciones. Teorías de didáctica de la matemática. Test en aula.

The longest step: About the need to not throw away (in the name of modernism empty) theories of mathematics education that explain, perfectly, real classroom situations

ABSTRACT

At some research institutes and among some researchers there is an attitude of scrapping of old theories that, despite being perfectly able to answer research questions, are only guilty of being dated. But the most recent theories do not always have emerged to respond to the same research questions of the previous ones, and therefore they do not incorporate and do not replace them, but simply supplement them. We believe that a modernism that is an end in itself harms the skills in mathematics education of future generations of researchers and users (such as, for example, teachers).

Keywords: Situation theory. Theories of mathematics education. Test in the school room.

Bruno D'Amore é professor do departamento de Matemática da Universidade de Bologna, Itália. Faculdade de Ciência da Formação, Universidade de Bolzano, Itália. Endereço para correspondência: Università di Bologna.Via Zamboni, 33 – 40126 Bologna – Partita IVA: 01131710376. E-mail: damore@dm.unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla é professora de Didática da Matemática, Universidade de Bologna, Itália. Faculdade de Ciência da Formação, Universidade de Bolzano, Itália, e da Alta Escuela Pedagógica de Locarno, na Suíça. Università di Bologna. Endereço para correspondência: Via Zamboni, 33 – 40126 Bologna – Partita IVA: 01131710376. E-mail: damore@dm.unibo.it

1. LOS HECHOS

En el año escolar 2008-2009, entre las pruebas nacionales italianas de matemática para los estudiantes del quinto grado de la escuela primaria, apareció la siguiente pregunta:

D9. María, Renata y Fabio miden a pasos la longitud de su aula. María cuenta 26 pasos, Renata cuenta 30 y Fabio 28. ¿Quién tiene el paso más largo?
□ A. Renata.
□ B. Fabio.
□ C. María.
□ D. No se puede saber

Los resultados nacionales en porcentaje fueron los siguientes:

sin respuesta: 0,2; A: 42,9; B: 2,2; C: 49,5; D: 5,1.

A primera vista, el resultado es excelente: el 49,5% de los estudiantes italianos responde correctamente.

Pero si se leen estos datos desde otro punto de vista, el 50,5% de los estudiantes italianos no da la respuesta correcta a un problema, que nada tiene que ver con las competencias o con los conocimientos matemáticos; para dar la respuesta correcta sólo se requería un poco de sentido común, la capacidad para leer un texto y de imaginar la situación.

Dejamos de lado el 0,2% que no responde, el 2,2% que responde completamente fuera de lugar y el 5,1% que, sin saber qué decir, se refugió en la aspillera clásica "No se puede saber", y centramos toda la atención en las dos respuestas que tienen un cierto sentido:

- el sentido correcto, lo esperado (respuesta C): tiene el paso *más* largo quien hace *menos* pasos para medir el aula: 49,5% de las respuestas;
- el sentido incorrecto (respuesta A): tiene el paso *más* largo quien hizo *más* pasos para medir el aula: 42,9% de respuestas.

Pedimos comentarios sobre este resultado a profesores de matemática de diferentes niveles, a padres de familia que no son profesores, a colegas matemáticos que nada tienen que ver con la investigación en educación matemática; comentarios informales, por supuesto, sólo para ver qué tipo de percepción tienen ellos de este resultado. Fácil imaginar las respuestas. La "culpa" es de los estudiantes que "ya no saben leer" y que "no saben enfocarse"; o es de la escuela que "ya no enseña a razonar"; y luego de los profesores que "no saben enseñar" y que "esperan cada vez menos de sus alumnos". Son comentarios tan obvios y evidentes que ni siquiera los tomaremos en examen.

Pedimos su opinión, en particular, a los profesores de nivel primario, los más interesados en el resultado; en este caso aparece una explicación del fenómeno que no apareció en precedencia, una queja generalizada sobre la forma en que las propuestas hechas por el Invalsi son "diferentes a aquellas a los que los alumnos están acostumbrados"; el D9 es uno de los problemas poco comunes, una especie de trampa endiabladamente puesta a los alumnos; citamos una frase entre todas: «Nosotros, a nuestros niños los acostumbramos a ciertas situaciones problemáticas, y en aquellas ellos de hecho son buenos y competentes; y luego vienen estas y ellos ya no las reconocen».

Por lo tanto, se encuentran "situaciones problemáticas construidas según un cierto acuerdo entre niños y maestros" y "situaciones problemáticas diferentes de aquellas, por lo tanto inesperadas".

2. LAS PRUEBAS Y LOS RESULTADOS

Rehicimos la prueba, exactamente la misma, en Colombia, España, Chipre, Francia y estos fueron los resultados obtenidos.[1]

El extremo "negativo" es el siguiente, efectuado en un total de 83 estudiantes:

Sin respuesta: 0 % - A: 89,2 % - B: 3,6 % - C: 6 % - D: 0 % - respuesta múltiple: 1,2 %.

Presentamos los textos propuestos a los estudiantes, en los diversos idiomas:[2]

Italiano:

D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?

□ A. Renata.

□ B. Fabio.

□ C. Maria.

□ D. Non si può sapere.

Francés:

D9. Marie, Renata et Fabio mesurent avec ses pas la longueur de leurs salle. Marie compte 26 pas, Renata compte 30 et Fabio 28. Qui a le pas le plus long?

□ A. Renata.

□ B. Fabio.

[1] Para estos datos, agradecemos a varios nuestros amables colegas, entre los cuales: Angélica Molano, Clara Rivera y Deissy Narváez.

[2] Agradecemos a los colegas de los diversos Países por la valiosa colaboración.

□ C. Marie.

□ D. On ne peux pas le savoir.

Inglés:

D9. Mary, Renata and Fabio measure with their steps the length of the classroom. Mary counts 26 steps, Renata counts 30 and Fabio 28. Who has the longest step?

□ A. Renata.

□ B. Fabio.

□ C. Mary.

□ D. You can'not know.

¿Sorprende que el porcentaje de respuestas no correctas (es decir diversas de C) sea sustancialmente idéntico? No, no es sorprendente en absoluto, para nosotros.

Entrevistamos a algunos de estos niños, todos entre los 9-10 años de edad, para tratar de comprender las causas posibles *relacionadas con el texto*. Es fácil reconocer, de hecho, que el texto se ve estropeado por los llamados "datos implícitos" o "supuestos"; por ejemplo, no se dice que los alumnos pertenecen a la misma clase y que están midiendo el mismo salón de clases. La investigación evidenció claramente que muchos de los textos de los ejercicios o de problemas propuestos en las aulas se ven menoscabados por este defecto y que los niños se reinventan implícitamente el texto propuesto, reformulándolo de manera espontánea, ajustándolo así a sus necesidades; de hecho, la investigación demostró explícitamente la presencia de este fenómeno pidiendo a los niños que reformularan los textos de algunos problemas para hacerlos más comprensibles y fáciles de resolver para niños de otras clases. Véase, por ejemplo, D'Amore et al. (1995).

Sin embargo, las entrevistas informales revelan que quienes intentaban resolver el problema, infirieron sin duda alguna, en acuerdo con el anónimo autor del texto Invalsi, que los tres niños estaban midiendo su propio salón de clases (el mismo), aún más: que pertenecían a la misma clase, aún más (según muchos) que eran tres amigos.

Por lo tanto, el problema no es este. Hay algo más.

3. LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES Y EL CONTRATO DIDÁCTICO

La teoría de las situaciones, creada por Guy Brousseau a mediados de los '60 y devenida objeto compartido de estudio internacional desde los '80, explica perfectamente lo sucedido.

Existen acuerdos no expresados, no explícitos, que hacen que los maestros y los estudiantes construyan modalidades de interpretación de los test y de la resolución de los mismos. La teoría es tan conocida que nos parece ofensivo explicarla con más detalle.

Las indicaciones normativas típicas que el docente sugiere al estudiante "lee bien el texto", "identifica los datos útiles", "subraya la pregunta" etc., conducen al niño - solucionador, sin ninguna posibilidad de escapar, a inhabilitar su capacidad lógico - crítica basada en la experiencia, incluso una experiencia extra escolar (más largos son los pasos, menor es el número que expresa la medida de la habitación) y hacerse cargo de cláusulas implícitas: "más larga igual más pasos" (no importa de qué se está hablando), sin analizar la situación, sólo prendiendo acríticamente los datos numéricos. Es decir, se miran los números y la relación entre ellos, no el significado semántico de la pregunta y de la situación propuesta.

La famosa frase de un niño exasperado porque el investigador-profesor lo estaba obligando a razonar en vez de solucionar («¡Uf!, pero lo que tengo que hacer es resolver el problema, no tengo que razonar»), dice mucho sobre el comportamiento contractual que el alumno asume.

En nuestro problema hay datos, tres números: 26, 30, 28; y una pregunta que contiene la frase "más largo". Desde hace 5 años, a los niños se les invitó a razonar sobre el hecho de que "más largo" está en sintonía con "mayor", que se denota con >; ponemos en orden los tres números: 30>28>26. La respuesta sólo puede ser 30. Independiente de la condición descrita, o de la lógica invocada por el texto: hay que respetar los acuerdos tomados con el maestro.

Pero, de nuevo, estas cosas son tan conocidas que no consideramos necesario profundizar; creemos que todos nuestros lectores las conocen y que saben aplicarlas críticamente a la situación que estamos describiendo.

Lo que más llama la atención es el hecho de que los profesores sienten la prueba propuesta como un "truco dirigido a los niños", dado que no cumple con los estándares, no lleva a la pregunta que, de acuerdo con muchos de ellos, está en la base de la actividad de resolución de los problemas: ¿cuál es la operación aritmética (racional) a efectuar?

Un gran número de docentes encuestados dicen explícitamente que ellos enseñan a los niños a reconocer si, en la resolución de un problema, se debe utilizar la suma o la resta o la multiplicación o la división. Y los libros de texto, efectivamente, tratan de dar respuesta a esta elección didáctica, distinguiendo, desde primero de primaria, secciones de ejercicios con la siguiente modalidad: problemas de adicción, resta etc.; es más, a menudo aparecen también secciones tituladas: problemas imposibles, problemas con datos incompletos, problemas con datos redundantes (casi siempre faltan problemas con datos contradictorios que nunca les ha gustado a los maestros; alguien les incluye entre los problemas insolubles) (D'AMORE; SANDRI, 1993).

En estas situaciones, después de 5 años de condicionamiento y de enseñanza, ¿qué puede hacer un estudiante, si no comportarse de acuerdo con el contrato?

Dijimos anteriormente que este comportamiento y la reacción de los profesores puede ser calificada como sorprendente, pero no sorprende en absoluto. Todo, todo lo descrito, es parte de los estudios reveladores de Guy Brousseau y de sus seguidores, dentro de la teoría de situaciones. Son fenómenos científicamente bien explicados, en detalle, sin lugar a dudas, sin lagunas (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA; MARAZZANI; SARRAZY, 2010).

4. LAS TEORÍAS SUCESIVAS

La teoría de las situaciones fue una de las primeras teorías en nacer; a todos nosotros, investigadores en educación matemática de una cierta edad, nos fascinó; era la primera vez que matemáticos hacían reflexiones de este tipo, ofreciendo explicaciones científicas sobre la falta de aprendizaje en matemática.

Pero después la educación matemática evolucionó, y muchas otras teorías surgieron, no hace falta enumerarlas aquí: veremos brevemente algunas dentro de poco. Muchas de ellas son evoluciones de la teoría de las situaciones, otras examinan problemas diferentes; algunas nacieron y murieron rápidamente, otras se desarrollan de manera inesperada.

Las teorías nacen y mueren, se pueden poner entre ellas en contraste o intentar conectarlas o incluso intentar hacerlas coincidir, agregándolas a teorías más amplias. Muchos son los estudios en esta dirección, nos limitamos solamente a mencionar: Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008), Radford (2008a, 2008b, 2011), Bikner-Ahsbahs Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue e Sabena (2010).

Pero las (nuevas) teorías nacen con fines muy específicos, no sólo para absorber e incluir las teorías anteriores, sino para estudiar hechos que escapaban a las anteriores o para estudiar particularidades que a las anteriores no les interesaban (D'AMORE, 2007).

Por lo tanto, teorías construidas con posterioridad a la teoría de las situaciones tuvieron efectos diferentes, tuvieron, tal vez, una buena aceptación en el panorama internacional de investigación, pero no podían reemplazar la teoría de las situaciones porque dichas teorías tenían otros propósitos.

Por ejemplo, la teoría APOS (que describe cómo las Acciones se interiorizan en los Procesos y luego son encapsuladas como Objetos mentales, que toman su lugar en Esquemas cognitivos más sofisticados) (TALL, 1999), creada por Ed Dubinski en los '80, tuvo un gran éxito internacional y también grandes críticas, pero, entre sus objetivos no está el de entender las relaciones entre Saber-maestro-alumno en el salón de clase, objetivo que si tiene la teoría de situaciones.

Otro ejemplo, el gran aparato teórico introducido por Raymond Duval alrededor de 1993 para mostrar cómo las actividades de enseñanza - aprendizaje de la matemática en el aula están estrechamente vinculadas con las tres acciones cognitivas de la semiótica: representar, tratar y convertir, llevó a nuestra disciplina a obtener excelentes resultados, pero nada tiene que ver con las descripciones que la teoría de las situaciones nos ha enseñado a observar y a reconocer (DUVAL, 1993, 1995).

Otro ejemplo, la teoría EOS (Enfoque Onto-Semiótico) tuvo, y tiene aún hoy, un gran éxito internacional desde que fue creada en el decenio de los ’90 por uno de los grupos de investigación que trabajan en la Universidad de Granada, el grupo liderado por Juan Godino; esta teoría incorpora la llamada TAD (teoría antropológica de la didáctica) creada por Yves Chevallard en los primeros años 90, pero tiene y declara fines distintos a los de la teoría de situaciones (D’AMORE; GODINO, 2006, 2007; FONT; GODINO; D’AMORE, 2007).

Otro ejemplo, la teoría semiótico cultural de Luís Radford tiene la capacidad de explicar modalidades de aprendizaje relacionadas con actividades semióticas por parte de los estudiantes, por ejemplo, en el aprendizaje de la generalización, que ninguna de las teorías anteriores tiene, pero no incluye el estudio general de las situaciones de aula, que le son ajenas. Sin lugar a dudas esta es una de las teorías que, más que ninguna otra, ha cambiado nuestra actitud frente al aprendizaje de la matemática y hacía la educación matemática; en pocos años se ha impuesto con tanta fuerza que nos deja asombrados, por lo que no es fácil reconstruir su historia (cosa que intentamos hacer, incluso pidiendo ayuda al mismo creador: RADFORD, 1998, 2000a, 2000b, 2001, 2003, 2006a, 2006b).

Y así sucesivamente, podríamos seguir citando teorías que siguieron a la teoría de las situaciones, con sus características innovadoras y funcionales, a veces sólo descriptivas, a veces operativas.

Ahora bien, la actitud que observamos en algunos centros de investigación y entre algunos investigadores y profesores de educación matemática de menospreciar las teorías de una cierta edad en favor de las nuevas es, para decirlo en palabras pobres, ridículo; uno de los artículos de Radford, presentado a una revista de educación matemática en 1998 sólo fue publicado en 2003 porque en ese momento la mayoría de las revistas de educación matemática rechazaban sin apelación los artículos que hablaban de semiótica; hay que decir que, incluso en 2005, uno de los autores de este artículo se encontró con cierta dificultad para publicar un trabajo suyo porque, según un árbitro, “se menciona demasiado Raymond Duval” (conservamos esa carta).[3]

Pero esto es lo que sucede siempre, a los anticipadores; Guy Brousseau comenzó a desarrollar su teoría, que después tuvo reconocimiento mundial, en los años ‘60 y para los años ‘70 era ya madura; pero tuvo que esperar hasta 1986, para ver publicado su más famoso artículo, quizás el artículo más citado en el mundo de nuestra disciplina (BROUSSEAU, 1986). El hecho es que en los ‘60 y en los ‘70 las revistas de, por llamarlas de alguna forma, educación matemática de la época, rechazaban artículos tan “extraños y raros”, como se les juzgaban en ese entonces a los suyos; ¡tuvo que publicar sobre la *Revue de laryngologie, otologie, rinologie* (BROUSSEAU, 1980)! En ese momento, los nombres que dictaban ley eran los de Zoltan Dienes, Georges y Frédérique Papy... que, en lugar de crear teorías, proponían sistemas de enseñanza a veces extravagantes basados en sus propias intuiciones. Los estudios de Brousseau dedicados a reprimir duramente estos enfoques de la enseñanza de la matemática son bien conocidos y tuvieron un éxito evidente: ¿quién recuerda hoy estos nombres? Sin una teoría científicamente basada

[3] El artículo salió en el 2006, sin embargo.

en enfoques epistemológicos con sentido y bien fundamentados, estos episodios están destinados a perderse.

Pero las teorías sólidas, las que dan resultados, las que permiten entender la actitud de los estudiantes y profesores en situaciones de aula, no se pueden olvidar, al contrario hay que colocarlas a la base, al inicio de cualquier curso que pueda ayudar a quienes de estas teorías deben hacer un uso concreto en el aula, los profesores, y a los futuros investigadores (estamos hablando, respectivamente, de los cursos de formación para profesores en los cursos iniciales o en servicio, y de cursos de maestría o doctorado). De lo contrario, un día, alguien creerá haber descubierto las mismas cosas, sin saber que ya habían sido estudiadas y les dará un nuevo nombre, creyendo proponer un avance en el estudio de la educación matemática. Lo cual sería bastante ridículo.

Sería como volver a idear fórmulas generales que, utilizando sólo las operaciones racionales y la extracción de raíz cuadrada, permiten encontrar las raíces de ecuaciones algebraicas generales de grado III con coeficientes racionales o enteros; con todo el respeto, este resultado es debido a Tartaglia y Cardán en el siglo XVI.

5. PERO NO SÓLO EXISTE LA TEORÍA DE SITUACIONES...

Siempre inspirándonos en la prueba Invalsi, de 2012, en 6°, se les propuso a los alumnos la siguiente pregunta:

¿Cuál de las siguientes operaciones da el resultado más grande?

□ A. 10×0,5

□ B. 10×0,1

□ C. 10:0,5

□ D. 10:0,1

Aquí presentamos el resultado, de una muestra de más de 20.000 estudiantes:

A: 71,2 %; B: 4,9 %; C: 10,0 %; D: 10,8 %; No contesta: 2,2 %.

¿Maravilla, sorpresa, angustia, ira por parte de los maestros? No, para nosotros; la respuesta A es obvia en la interpretación de los estudiantes. Si se hubiera pedido el resultado antes de la prueba, lo hubieran acertado en su totalidad.

En el libro D’Amore (1999), no por caso publicado en español y portugués, capítulos 4, 5 y 12, se explica exactamente lo que se esconde detrás de esta respuesta A tan generalizada, trayendo a colación tres tipos de investigaciones:

(1) la teoría de las imágenes y modelos en la construcción del conocimiento matemático,

(2) los estudios fascinantes y minuciosos de Efraín Fischbein (1920-1998),

(3) algunas consideraciones de Gérard Vergnaud de los primeros años ‘80.

Todo se explica en dicho texto y en unas pocas páginas, por lo que no vale la pena entrar aquí en detalles.

Pero este tipo de consideraciones, que explican muy bien el comportamiento de los estudiantes, ya no están “de moda”, casi no se enseñan en los cursos de educación matemática, se dan por supuestos; nosotros pensamos que esta sea una actitud equivocada, contraproducente.

Si los maestros de las escuelas primarias y secundarias conocieran estas teorías, sabrían qué hacer para evitar la elección masiva de la respuesta A:

(1) no permitir que los estudiantes se formen demasiado temprano el modelo (equivocado) de multiplicación, dejando la imagen que funciona en N^2, a la espera de ampliar el dominio numérico hasta Q,

(2) abandonar los estereotipos típicos de los modelos intuitivos de multiplicación, proporcionando al contrario otros modelos intuitivos para un modelo formal único, y con todos los medios para evitar la aparición de modelos parásitos,

(3) ampliar el conjunto de situaciones que dan sentido a las situaciones de multiplicación y división.

Y así hemos mencionado implícitamente las tres teorías básicas.

Pero si estas cosas no se les enseña a los maestros en formación o en servicio, vamos a seguir teniendo la respuesta A, vamos a seguir desgarrándonos las vestiduras como reacción furiosa, seguiremos dando la “culpa” a los estudiantes que nosotros formamos y que nosotros obligamos a responder A, creyendo (y aquí estalla la ironía) de hacer todo esto para su propio bien.

REFERENCIAS

BIKNER-AHSBAHS, A.; DREYFUS, T.; KIDRON, I.; ARZARELLO, F.; RADFORD, L.; ARTIGUE, M.; SABENA, C. Networking of Theories in Mathematics Education. In: PINTO, M. F.; KAWASAKI, T. F. (Ed.). 34th CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, Vol. 1, 2010, Belo Horizonte, Proceedings..., p. 145-175. Belo Horizonte, Brasil: PME, 2010.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. Les échecs électifs dans l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131, 1980.

D’AMORE, B. Voces para el diccionario. En: FRABBONI, F.; WALLNÖFER, G.;

BELARDI, N.; WIATER, W. (Ed.) *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Turín: Bollati Boringhieri, 2007.

D'AMORE, B. *Elementi di didattica della matematica*. Prefacio de Colette Laborde. Bologna: Pitagora, 1996.

D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I.; MARAZZANI, I.; SARRAZY, B. *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri, 2010.

D'AMORE, B.; FRANCHINI, D.; GABELLINI, G.; MANCINI, M.; MASI, F.; MATTEUCCI, A.; PASCUCCI, N.; SANDRI, P. La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, p.131-146, 1995.

D'AMORE, B.; GODINO, D. J. El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*. 10, 2. p.191-218. 2007.

D'AMORE, B.; GODINO, D. J. Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, p.9-38. 2006.

D'AMORE, B.; SANDRI, P. Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, p.344-346. 1993.

DUVAL, R. Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, p.37-65, 1993.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang, 1995.

FONT, V.; GODINO, D. J.; D'AMORE, B. An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics*. 27, 2, p.2-14, 2007.

PREDIGER, S.; BIKNER-AHSBAHS, A.; ARZARELLO, F. Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education.* 40, p.165-178, 2008.

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education.* 40, p.317–327, 2008b.

RADFORD, L. Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*, p.103-129, 2006a.

RADFORD, L. Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: VAN DEN HUEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.), 25th CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2001, Utrecht, Proceedings…, v.4, p.81-88. Utrecht, Netherlands: Universidad Utrecht, Freudental Institute, PME, 2001.

RADFORD, L. La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. En: VALLÈS, J.; ÁLVAREZ D.; RICKENMANN, R. (Ed.) L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació[Teacher's activity: Intervention, innovation, research], p. 33-49. Girona (España): Documenta Universitaria, 2011.

RADFORD, L. On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: ANDERSON, M.; SÁENZ-LUDLOW, A.; ZELLWEGER, S.; CIFARELLI, V. (Ed.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (49-79). Ottawa: Legas Publishing, 2003.

RADFORD, L. On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. 35 (1), p.277-302, 1998.

RADFORD, L. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics,* 7-21, 2006b.

RADFORD, L. Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*. 42 (3), p.237-268, 2000a.

RADFORD, L. Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Ed.). 24th CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2000, Hiroshima, Proceedings…, v.4, p.81-88. Hiroshima, Japón: Universidad Hiroshima, PME, 2000b.

RADFORD, L. Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Working paper, 2008a.

TALL, D. Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: O. Zaslavsky (Ed.), 23rd CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 1999, Haifa, Proceedings…, Julho 25-30, v.1, p.111–118. Haifa, Israel: PME, 1999.

Recebido em: abr. 2013 **Aceito em**: jul. 2013