revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA EM UM CONTEXTO DE ESTÁGIO SUPERVISIONADO

Paulo Henrique Rodrigues*
Universidade Estadual de Londrina
paulohr_91@yahoo.com.br
Alessandra Negrini Dalla Barba**
Universidade Estadual de Londrina
alessandrandb@gmail.com
Bruno Rodrigo Teixeira***
Universidade Estadual de Londrina
bruno@uel.br

RESUMO
O objetivo deste trabalho é apresentar o relato e as reflexões desencadeadas a partir de uma experiência vivenciada com alunos de 2º ano do Ensino Médio, no desenvolvimento de uma oficina sobre o conteúdo matemático Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas, tomando esta como estratégia metodológica para o ensino e a aprendizagem de Matemática. A preparação e implementação da oficina ocorreu no contexto do Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Mediante essa experiência, foi possível observar que trabalhar com esta estratégia metodológica oportunizou aos alunos se comunicarem entre si e com os futuros professores para apresentar suas ideias, discuti-las e argumentar a respeito visando à resolução dos problemas, se engajarem nas resoluções utilizando seus conhecimentos prévios e participarem ativamente das discussões que ocasionaram as sistematizações dos conceitos e das fórmulas. Além disso, propiciou aos futuros professores uma nova visão a respeito do conteúdo matemático em questão e de aspectos referentes ao seu ensino.
Palavras-chave: Análise Combinatória. Educação Matemática. Estágio Supervisionado. Resolução de Problemas.

COMBINATORIAL ANALYSIS AND PROBLEM SOLVING: A SUPERVISED TRAINING EXPERIENCE

ABSTRACT
The objective if this study was to present a report on, and the reflections triggered by, an experience with 2nd grade secondary school students, during a workshop on combinatorial analysis through problem solving, a methodological strategy for teaching and learning mathematics. The workshop's preparation and implementation took place during the supervised training of under graduate mathematics students from State University of Londrina (UEL). Based on this experience, it was observed that this methodological strategy provided an opportunity for students to communicate among them and with

future mathematics teachers, present, discuss and argue their ideas in order to solve problems, engage in the resolutions by using their previous knowledge, and actively participate on the discussions that led to the systematization of concepts and formulas. In addition to that, it also provided future teachers a new vision concerning this mathematical content and the different aspects involved in its teaching.
Key words: Combinatorial analysis. Mathematics Education. Supervised training. Problem solving.

Introdução

O trabalho que subsidiou a escrita deste artigo foi desenvolvido no contexto do Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), no ano de 2012.

Durante o primeiro semestre de 2012, os dois primeiros autores do artigo elaboraram, sob a orientação do terceiro autor, planos de aula para serem implementados durante o Estágio de Regência, que seria realizado por meio de oficinas temáticas (oficinas a respeito de conteúdos matemáticos do Ensino Médio) em três sábados consecutivos em um colégio público da cidade de Londrina – PR, de modo que em cada oficina, com duração média de 4 horas, fosse abordado um tema específico.

Em relação às estratégias metodológicas que podiam ser utilizadas para a abordagem dos conteúdos matemáticos, de acordo com o Plano de Estágio da Instituição de Ensino Superior, os estagiários deviam seguir as tendências em Educação Matemática[1] - o que está em consonância com as recomendações das Diretrizes Curriculares de Matemática do Paraná (PARANÁ, 2008) para o encaminhamento metodológico de conteúdos matemáticos na Educação Básica -, não podendo planejar aulas em uma perspectiva tradicional[2] de ensino.

As oficinas foram desenvolvidas no mês de agosto do corrente ano, com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Será relatada nesse artigo a oficina que teve como tema o conteúdo Análise Combinatória, trabalhada por meio da Resolução de Problemas enquanto estratégia de ensino. Durante o planejamento desta oficina os estagiários tiveram a oportunidade de compreender conceitos e fórmulas relativos à Análise Combinatória, bem como relações entre eles, como poderá ser observado ao longo do relato. Além disso, puderam discutir e planejar ações para a abordagem do conteúdo na perspectiva da estratégia de ensino adotada.

Depois de encerradas as oficinas, os futuros professores tiveram que elaborar um Relatório a respeito do Estágio de Regência. No Relatório, dentre outros aspectos[3], foram descritos detalhadamente os acontecimentos de cada oficina, bem como reflexões de caráter didático e pedagógico geradas a partir dos mesmos. Essas informações serviram de base para a elaboração deste artigo, no qual apresentamos inicialmente algumas considerações a respeito do ensino de Análise Combinatória, da Resolução de Problemas, bem como do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas. Em seguida, apresentamos o relato da experiência, e, por fim, algumas considerações a respeito do trabalho desenvolvido.

Considerações a respeito do ensino de Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um conteúdo matemático cuja introdução pode ser feita desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de problemas e com o auxílio de recursos como materiais manipuláveis.

No trabalho com este conteúdo matemático nos anos iniciais, assim como nos anos finais do Ensino Fundamental, "o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos" (BRASIL, 1998, p. 52), mas oportunizar ao aluno "lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades" (BRASIL, 1998, p. 52).

Além disso, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, "os primeiros contatos dos alunos com os problemas de contagem devem ter como objetivo a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta - fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois contá-los” (BRASIL, 1998, p.137).

Assim, a formalização dos diferentes tópicos da Análise Combinatória como Princípio Multiplicativo da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações Simples ocorre, na Educação Básica, usualmente, por volta do 2º ano do Ensino Médio.

Entretanto, cabe ressaltar que esta formalização não precisa ser feita na perspectiva tradicional de ensino.

> Geralmente, numa aula tradicional, a Análise Combinatória é trabalhada com aplicação de fórmulas, sem significado para os alunos. Assim, adotar outra metodologia, que permite a participação do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, pode contribuir para a aquisição de uma compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída (SOUZA, 2011, p. 4).

Nesse sentido, os PCN+ destacam que as fórmulas “devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p. 136). De acordo com este documento, para o trabalho com a Análise Combinatória no Ensino Médio recomenda-se que seja mantida uma perspectiva de resolução de problemas que, conforme já discutimos anteriormente, é sugerida para a abordagem desse conteúdo matemático em anos anteriores de escolaridade.

Diante disso, optamos por utilizar a Resolução de Problemas, enquanto estratégia metodológica para o ensino e a aprendizagem de Matemática, para desenvolver o trabalho com a Análise Combinatória durante o Estágio de Regência. A seguir, discorremos brevemente a respeito dessa perspectiva de Resolução de Problemas adotada.

A Resolução de Problemas como estratégia metodológica para o ensino de Matemática

Quando se trata da utilização da Resolução de Problemas em aulas de Matemática, diferentes perspectivas podem ser evidenciadas. Mendonça (1999), por exemplo, destaca que a resolução de problemas tem sido pensada de três maneiras diferentes, a saber: “como um **objetivo**, um **processo** ou um **ponto de partida**” (p.16, grifo da autora).

Na perspectiva da resolução de problemas como um objetivo, os problemas são utilizados para aplicação de algum conteúdo matemático. Ou seja, o professor apresenta o conteúdo de forma expositiva aos alunos e em seguida propõe-lhes problemas que tratam deste conteúdo (MENDONÇA, 1999).

Na perspectiva de resolução de problemas como um processo, o professor propõe problemas por meio dos quais possa discutir estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos, se atentando ao modo com que os alunos resolvem os problemas com a intenção de auxiliá-los no desenvolvimento de seu potencial para resolver problemas (MENDONÇA, 1999).

Por fim, na perspectiva da Resolução de Problemas[4] como um ponto de partida, um problema é apresentado aos alunos no início dos processos de ensino e aprendizagem para que, por meio das resoluções, ou tentativas de resoluções, e de discussões promovidas a partir do problema, os alunos possam construir conhecimentos matemáticos (MENDONÇA, 1999).

Esta última perspectiva tem sido abordada em diversos estudos (ONUCHIC, 1999; AZEVEDO, 2002; HUANCA, 2006; HERMINIO, 2008; ONUCHIC, ALLEVATO, 2009), e neles a Resolução de Problemas tem sido entendida como uma estratégia metodológica para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

A respeito da Resolução de Problemas como estratégia metodológica para o ensino e a aprendizagem de Matemática, Onuchic e Allevato (2009) destacam que trata-se

> [...] de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem realiza-se de modo cooperativo e colaborativo em sala de aula (p. 97).

Para a realização do trabalho com a Análise Combinatória junto a alunos da Educação Básica, que será aqui relatado, assumimos esta perspectiva defendida por Onuchic e Allevato (2009) para a Resolução de Problemas, ou seja, como uma estratégia metodológica. Com isso, desenvolvemos as tarefas com os alunos em sala de aula com base nas seguintes etapas sugeridas por estas autoras: *"Preparação do problema"*, *"Leitura individual"*, *"Leitura em conjunto"*, *"Resolução do problema"*, *"Observar e incentivar"*, *"Registro das resoluções na lousa"*, *"Plenária"*, *"Busca do consenso"* e *"Formalização do conteúdo"* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009)[5].

O ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas

Nos últimos anos, alguns estudos têm sido realizados a respeito do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas. Dentre eles, podem ser destacados os trabalhos de Souza (2010) e Fonte e Bisognin (2010).

Na pesquisa desenvolvida por Souza (2010), uma das ações consistiu em trabalhar a Análise Combinatória utilizando a Resolução de Problemas com uma turma de alunos do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública no estado de São Paulo. Segundo a autora, embora o tempo disponível para desenvolver o trabalho com os alunos tenha sido curto, "houve condições de crescimento na aprendizagem dos alunos, no que se refere às ideias centrais dos conceitos da Análise Combinatória" (SOUZA, 2010, p. 291), e um dos objetivos alcançados foi o de "*construir, professora e alunos juntos, conceitos de Análise Combinatória através da resolução de problemas*" (SOUZA, 2010, p. 291, grifo da autora).

No trabalho desenvolvido com os alunos, não foi possível para a autora trabalhar a construção de fórmulas. No entanto, a esse respeito, a autora destaca que

> [...] apesar de não ter sido dado esse passo, durante a aplicação do projeto, não podemos considerar irrelevante a construção das fórmulas correspondentes aos conceitos trabalhados, para o cálculo do número de arranjos, combinações e

> permutações, pois, por meio dela, os alunos teriam uma melhor formalização desses conceitos. Se houvesse mais tempo para a aplicação de nosso projeto, acreditamos que, então, poderia ser feita uma extensão dos problemas propostos e partir para o trabalho da construção das fórmulas (SOUZA, 2010, p. 292).

Fonte e Bisognin (2010) descrevem e analisam parte dos resultados de uma pesquisa que desenvolveram com a Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas, em que "centrou-se no estudo do desenvolvimento dos processos de resolução de problemas sobre conteúdos de Análise Combinatória, seguidos por estudantes do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática" (p.76).

Dentre os resultados obtidos pelas autoras, tem-se que "à medida que os problemas foram sendo solucionados, percebeu-se que os alunos foram superando algumas limitações e erros e conseguiram criar novas imagens conceituais ou modificando e aperfeiçoando as que já possuíam sobre os conteúdos de combinatória" (FONTE; BISOGNIN, 2010, p.81).

No trabalho de Della Nina, Menegassi e Silva (2009), as autoras também apresentam algumas considerações a respeito do trabalho com a Análise Combinatória na perspectiva da Resolução de Problemas. Segundo as autoras, trabalhar com Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas, "destacando aqueles que utilizam fatos e situações que tenham significado ao aluno, é uma forma de desmistificar esse conteúdo" (DELLA NINA; MENEGASSI; SILVA, 2009, p. 198). Elas ainda afirmam que os alunos podem resolver problemas de Análise Combinatória inicialmente utilizando seus conhecimentos prévios sem necessariamente recorrer ao uso de fórmulas. Contudo, isso não impede que os conceitos de Análise Combinatória sejam sistematizados posteriormente.

Em consonância com os aspectos teóricos apresentados nesta seção e nas anteriores favoráveis à realização de um trabalho com Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas, desenvolvemos uma experiência nesta perspectiva, em que foram propostos aos alunos problemas como ponto de partida para a sistematização dos conceitos de Princípio Multiplicativo da Contagem, Fatorial, Arranjos, Permutações e Combinações Simples, a qual será relatada a seguir.

Relato da Experiência

A oficina de Estágio de Regência, a partir da qual foi desenvolvido este relato, teve início por volta das 07h30min do dia 11/08/12, sábado, e teve duração de aproximadamente quatro horas. Na ocasião, os estagiários[6] contaram com a participação de doze alunos de duas turmas de 2º ano do Ensino Médio de um colégio público da cidade de Londrina – PR.

Os problemas utilizados para o desenvolvimento do trabalho com os alunos foram selecionados no primeiro semestre de 2012, visando à sistematização de conceitos de Análise Combinatória, do seguinte modo:

Problema	Conceito a ser sistematizado
1	Princípio Multiplicativo da Contagem
2	Fatorial
3	Arranjos Simples
4	Permutações Simples
5	Combinações Simples

Quadro 1: Conceitos a serem sistematizados por meio dos problemas 1, 2, 3, 4 e 5

Para iniciar a oficina, os estagiários se apresentaram aos alunos, explicando que eram alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina desenvolvendo o Estágio de Regência, e, que trabalhariam de uma forma diferente das aulas tradicionais, mencionando como seria desenvolvida a aula na perspectiva da Resolução de Problemas, com base nas etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2009).

Após este momento inicial, os alunos se organizaram em três grupos com quatro integrantes cada (nomeados ao longo do relato de Grupo A, Grupo B e Grupo C), de acordo com a orientação dos estagiários, e, em seguida, iniciaram o trabalho de resolução e a discussão do seguinte problema:

Problema 1
(UFES – ADAPTADO) *Um Shopping Center possui 3 portas de entrada para o andar térreo, 2 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do Shopping Center pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?*

Os problemas trabalhados durante esta oficina foram entregues impressos aos alunos.

Antes de os alunos começarem a resolver o problema, os estagiários ressaltaram que eles deveriam tentar solucioná-lo a partir dos conhecimentos que já possuíam, em consonância com o que é proposto por autores como Della Nina, Menegassi e Silva (2009), que assinalam a possibilidade de os alunos resolverem problemas de Análise Combinatória inicialmente utilizando seus conhecimentos prévios, sem recorrer ao uso de fórmulas. Alguns estudantes questionaram se os estagiários não iriam "passar nenhuma informação" para que pudessem iniciar a resolução do problema, porém, como optaram pela Resolução de Problemas como estratégia metodológica, não poderiam dizer-lhes como resolver o problema, apenas orientá-los, por meio de questionamentos, por exemplo. Nesse sentido, na perspectiva assumida pelos estagiários (ONUCHIC, ALLEVATO, 2009), eles atuaram como guias e os alunos como co-construtores do conhecimento.

Diante desse acontecimento, apesar de já ter sido mencionada a forma de trabalho que seria adotada na oficina, foi necessário esclarecer novamente aos alunos a dinâmica da aula na perspectiva de Resolução de Problemas, pois, é comum, no início de uma aula com essa estratégia metodológica, estudantes não familiarizados com a dinâmica estabelecida esperarem que o professor, após entregar os problemas, apresente definições que possam ser utilizadas em sua resolução ou sugestões de como resolvê-los.

Neste momento, os alunos então leram individualmente (mesmo já estando organizados em grupos) e discutiram com os outros integrantes do grupo o enunciado do problema.

Os estagiários pediram que os grupos resolvessem o problema e entregassem uma folha contendo a resolução obtida por eles, para que pudessem utilizá-las na produção do Relatório a respeito do Estágio de Regência.

Posteriormente, após o trabalho dos alunos nas resoluções, foi pedido que um aluno de cada grupo apresentasse a sua resolução para a turma de modo que fosse possível discutir a respeito das resoluções encontradas.

O grupo A, em pouco tempo, conseguiu apresentar a seguinte resolução:

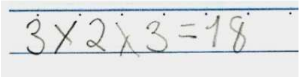


Figura 1: Resolução do problema 1 apresentada por um aluno do Grupo A

Este grupo conseguiu resolver o problema, mas não conseguiu explicar por que utilizava a multiplicação e não a adição, por exemplo.

O grupo B apresentou a seguinte resolução:

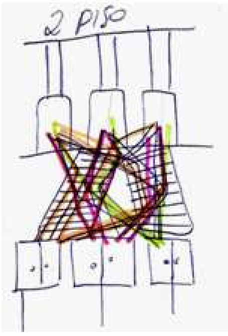


Figura 2: Resolução do problema 1 apresentada por um aluno do Grupo B

Inicialmente, este grupo tentou contar todas as possibilidades existentes. Depois, os alunos perceberam que, a partir de cada escada ligando o térreo ao primeiro pavimento, existem três elevadores que dão acesso ao segundo, e como existem duas escadas, há seis possibilidades para se chegar ao segundo pavimento a partir do térreo. Além disso, existem três portas para se chegar ao térreo, partindo de fora do shopping. Desta forma, tem-se ao total dezoito (*3x6)* formas de se chegar ao segundo pavimento.

Os alunos do grupo C utilizaram a listagem direta, mas, no início, não conseguiam verificar que existiam várias possibilidades e só consideravam algumas delas. Porém, após muita discussão, eles conseguiram listar todas as maneiras diferentes de caminhos a serem percorridos para se chegar ao segundo pavimento do shopping.

Após o término das resoluções nos grupos, os estagiários pediram que um aluno de cada grupo apresentasse a resolução encontrada. Indo ao encontro do que é proposto por Onuchic e Allevato (2009), independente das estratégias de resoluções utilizadas pelos alunos, e de as resoluções serem corretas ou incorretas, representantes de diferentes grupos foram convidados a apresentá-las à turma com objetivo de que elas pudessem ser analisadas e discutidas por todos. Como só havia três grupos, o quadro foi organizado em três partes e cada grupo escreveu sua resolução em uma parte. Depois de todas as apresentações, foi possível comparar as resoluções e sistematizar o Princípio Multiplicativo da Contagem a partir delas.

A partir da figura apresentada pelo grupo B era possível se chegar à listagem das possibilidades realizada pelo grupo C, e, com base nessas duas resoluções, era possível justificar a resolução proposta pelo grupo A. Assim, foi discutido com os alunos como se poderia calcular o total de possibilidades sem precisar listar todas elas.

Após isso, com base nas resoluções discutidas, foi sistematizado o Princípio Multiplicativo da Contagem. Este conceito foi apresentado aos alunos da seguinte forma.

Princípio Multiplicativo da Contagem:

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que

p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa
p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa
.
.
.
p_k é o número de possibilidades da k-ésima etapa, então:
$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer
(GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR, 1994, p.211)

Os estagiários ressaltaram que o Princípio Multiplicativo da Contagem é utilizado quando se trabalha com um evento que ocorre em etapas sucessivas e independentes, estabelecendo relação com as informações presentes no enunciado do problema. Neste momento também foi necessário discutir sobre a denominação k-ésima, relacionando-a com uma etapa qualquer, sendo k um número natural.

Em seguida, foi proposto o seguinte problema:

Problema 2
(FGV – ADAPTADO) Um viajante, partindo da cidade A, deve chegar à cidade E, passando obrigatoriamente pelas cidades B, C e D. Para viajar de A para B existem 4 meios de transporte: avião, caminhão, trem e táxi; de B para C, 3 meios: ônibus, carro e van; de C para D, 2 meios: moto e bicicleta; e de D para E, 1 meio: carroça. Quantas maneiras diferentes existem para viajar de A para E?

Este problema foi resolvido pelos alunos rapidamente utilizando o Princípio Multiplicativo da Contagem, e por meio de suas explicações, foram revelados indícios de que a maioria deles conseguiu compreender o conceito estudado. Como todos resolveram da mesma forma, os estagiários pediram que algum aluno do grupo C explicasse na lousa como resolveram o problema. A resolução apresentada foi a seguinte:

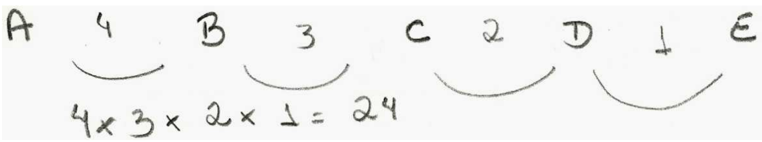


Figura 3: Resolução do problema 2 apresentada por um aluno do Grupo C

Após as discussões em relação à resolução e as justificativas apresentadas pelo grupo C, foi apresentada aos alunos a ideia do que seria o fatorial de um número natural, maior ou igual a dois, mais especificamente, 4!, a partir da resolução mostrada na Figura 3. Em seguida, os alunos foram questionados a respeito de fatoriais de outros números, e, a partir disso os estagiários sistematizaram este conceito da seguinte forma:

Fatorial de *n*, $n \in N, n \geq 2$, é o produto dos números naturais de 1 a *n*.

Notação: $n!$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definição, temos:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Para dar continuidade ao trabalho com Análise Combinatória foi proposto aos alunos o seguinte problema:

Problema 3
A senha de um cofre é formada por uma sequência de três vogais distintas. Uma pessoa, conhecedora dessa informação, demora cerca de 25 segundos para testar cada sequência. Calcule quantos minutos essa pessoa levaria para testar todas as senhas.[7]

Neste problema, os alunos tiveram bastante dificuldade, principalmente em interpretar o que obtinham inicialmente como resposta, e em compreender o que, de fato, deveriam obter. Inicialmente, todos os grupos pensavam que se a pessoa demorava 25 segundos para testar cada sequência, então como as sequências eram formadas por três letras, bastava multiplicar 25 por 3 e se teria 75 segundos como resposta, o que não correspondia ao que era pedido no enunciado do problema, pois do modo como estavam resolvendo, consideravam que bastava multiplicar o valor que representava o tempo para se testar cada sequência pela quantidade de letras que constituíam uma sequência, e não pela quantidade de sequências. Outros alunos dividiam 25 por 3 e afirmavam que este resultado seria a solução, mas também não conseguiam justificar o porquê da divisão e como poderiam interpretar esse resultado obtido.

Devido a esse fato, refletindo posteriormente a oficina, percebemos que tendo como objetivo introduzir o conceito de Arranjos Simples, esse problema poderia ter sido adaptado de modo que a questão ficasse apenas em torno da quantidade de senhas diferentes possíveis, ou seja, de “aspectos-chave” do tópico matemático em questão (ONUCHIC, ALLEVATO, 2009) e o aspecto do tempo poderia ser utilizado em um problema posterior quando o objetivo não fosse apenas esse.

Após algumas discussões e questionamentos feitos pelos estagiários, no sentido de oportunizar que os estudantes percebessem a compreensão que estavam tendo do enunciado do problema, os alunos do grupo A conseguiram compreender que era necessário encontrar o número de senhas distintas inicialmente, para depois determinarem o tempo necessário para testá-las. Contudo, foi possível observar que, em um primeiro momento, os alunos utilizaram a multiplicação “$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$” para representar a quantidade de senhas diferentes, possivelmente influenciados pela sistematização do conceito de fatorial que havia sido realizada anteriormente, diferente do que ocorreu na resolução do Problema 2, que apesar de terem utilizado o que foi sistematizado por meio do Problema 1, conseguiram justificar e estabelecer relações.

Eles foram então questionados pelos estagiários, e perceberam que o uso da multiplicação “$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$” levaria à formação de senhas com cinco vogais distintas, e após isso, mostraram indícios de terem compreendido que a multiplicação deveria “parar no 3” (palavras deles) e por isso riscaram o “$2 \cdot 1$”, conforme é possível observar na seguinte resolução apresentada por um aluno do Grupo A.

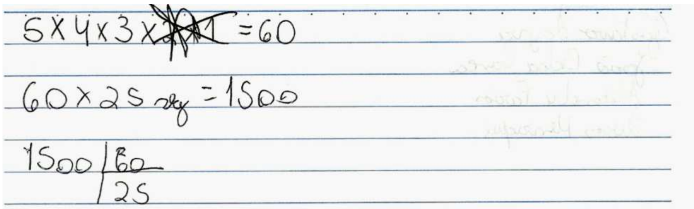


Figura 4: Resolução do problema 3 de um dos alunos do grupo A

Os alunos do grupo C, após conversarem com alguns dos integrantes do grupo A, apresentaram uma resolução, cuja estrutura e explicação não variaram muito da apresentada pelo grupo A.

Já no grupo B, alguns alunos começaram a listar as possíveis senhas, mas outros diziam que dessa forma eles iriam obter muitas opções diferentes. Nessa situação, é possível observar a necessidade da sistematização de fórmulas em Análise Combinatória com o objetivo de simplificar cálculos (BRASIL, 2002), de modo que se possa obter uma quantidade de possibilidades diferentes sem precisar listá-las, “chegando à solução de modo mais rápido, quando o número de elementos envolvidos nos agrupamentos for grande” (SOUZA, 2011, p. 4). Após uma discussão entre os integrantes, o grupo conseguiu perceber que, quando se seleciona uma vogal para utilizar como sendo a primeira letra da senha, só restam quatro possibilidades para a escolha da segunda e três possibilidades para a escolha da terceira, pois as senhas são formadas por vogais distintas. Assim, como as senhas são compostas de apenas três letras, basta efetuar a multiplicação *5.4.3* (justificada pelo Princípio Multiplicativo da Contagem), cujo resultado será a quantidade de senhas diferentes possíveis. A resolução seguinte foi apresentada por este grupo.

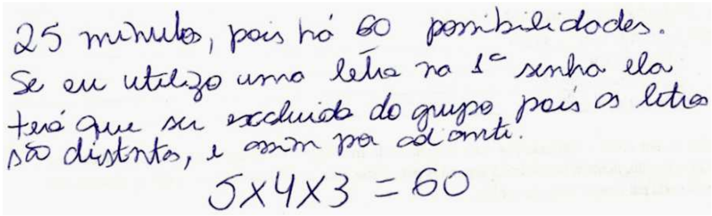


Figura 5: Resolução do problema 3 de um dos alunos do Grupo B

Após todos os grupos apresentarem uma resolução para o problema, representantes dos três grupos registraram as resoluções na lousa e foi realizada uma discussão a este respeito.

Quando foram finalizadas as discussões, às 9h30min, os alunos tiveram um intervalo de aproximadamente vinte minutos. Encerrado o intervalo, os estagiários retornaram à resolução deste problema com os alunos, visando sistematizar o conceito de Arranjos Simples e a fórmula utilizada para o cálculo do número de Arranjos Simples.

Inicialmente foi discutido com os alunos porque duas senhas formadas pelas mesmas vogais seriam consideradas diferentes, de modo que percebessem que as senhas se diferenciavam entre si pela ordem em que as vogais se apresentavam. Com base nisso, foi mencionado aos estudantes que estes tipos de agrupamentos que se diferenciam entre si pela ordem dos elementos (por exemplo, as senhas, que se constituíam em agrupamentos de letras) são chamados de Arranjos Simples e o número de Arranjos Simples de *n* elementos tomados *p* a *p* é denotado por $A_{n,p}$, sendo *n* o número total de elementos que podem ser agrupados e *p* o número de elementos que cada agrupamento irá ter.

Em seguida, a partir da notação apresentada ($A_{n,p}$) e da estratégia utilizada na Resolução apresentada nas Figuras 4 e 5, foram propostas as seguintes questões aos alunos com o objetivo de que pudessem perceber regularidades que os auxiliassem na generalização dos resultados (BRASIL, 2002), possibilitando a sistematização da fórmula para o cálculo do número de Arranjos Simples de *n* elementos tomados *p* a *p*:

- Caso se tenha que compor uma senha com apenas uma vogal, quantas possibilidades de senhas diferentes existem?

  Resposta dos alunos: $A_{5,1} = 5$

- E com duas vogais distintas, quantas são as possibilidades diferentes?

  Resposta dos alunos: $A_{5,2} = 5 \cdot 4$

- Já foi observado (Figuras 4 e 5) que para se formar senhas diferentes compostas por 3 vogais distintas, a quantidade de possibilidades é dada por:

  $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

- Com quatro vogais distintas, quantas senhas diferentes podem ser formadas?

  Resposta dos alunos: $A_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

- E com cinco vogais distintas?

  Resposta dos alunos: $A_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Questionados, os alunos tiveram um pouco de dificuldade para observar a relação existente entre os índices da notação $A_{n,p}$ (com $n = 5$ e *p* variando de 1 a 5) e a multiplicação correspondente que era utilizada para obter cada resultado. Por isso, os estagiários tiveram que intervir e pedir aos alunos que os auxiliassem na reescrita dos resultados obtidos de $A_{5,1}$ até $A_{5,5}$, utilizando ao invés do 5, a letra *n* que poderia representar uma quantidade qualquer e total de elementos que poderiam ser agrupados. Assim, as seguintes relações foram obtidas

$$A_{n,1} = n$$

$$A_{n,2} = n \cdot (n-1)$$

$$A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$A_{n,4} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$$

$$A_{n,5} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)$$

Refletindo após o trabalho realizado, talvez se antes dessa tentativa de generalização, os estagiários tivessem reescrito os resultados obtidos de $A_{5,1}$ até $A_{5,5}$ da seguinte forma

$$A_{5,1} = 5$$

$$A_{5,2} = 5 \cdot 4 = 5 \cdot (5-1)$$

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2)$$

$$A_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3)$$

$$A_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4)$$

com a ajuda dos alunos, eles poderiam ter tido menos dificuldades na etapa de generalização.

Em seguida, foi proposto que os alunos utilizassem a letra p para representar os números 1, 2, 3, 4 e 5 do primeiro membro de cada uma das igualdades, de $A_{n,1}$ até $A_{n,5}$, e, com base nisso, buscassem uma relação entre o p e o último fator envolvido na multiplicação no segundo membro das igualdades em questão. A idéia era que os estudantes encontrassem a seguinte expressão

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1)) = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Neste momento eles tiveram certa dificuldade em perceber que seria $(n-(p-1))$ o último fator da multiplicação e também em aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição neste termo. Contudo, após questionamentos dos estagiários a esse respeito, fazendo com que relacionassem com exemplos numéricos, alguns alunos conseguiram chegar ao resultado esperado e discutir com os demais colegas de modo a auxiliá-los também nessa compreensão, o que evidencia um aspecto destacado por Souza (2011) em relação à utilização de estratégias de ensino, como a Resolução de Problemas, qual seja, estratégias que possibilitam a participação do aluno na construção dos conceitos de Análise Combinatória podem auxiliá-los a ter uma "compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída" (p.4)

Em continuidade, foi comentado com os alunos que esta expressão obtida é uma fórmula utilizada para o cálculo do número de Arranjos Simples, mas não é a que geralmente é apresentada nos livros didáticos. Por conta disso, fazia-se necessário realizar algumas modificações nela, visto que nos livros didáticos era geralmente apresentada com a utilização de fatoriais. Para isso, os alunos foram questionados a respeito de como essa expressão obtida no segundo membro da igualdade poderia ser reescrita de modo a utilizar a notação de fatorial e não ter o seu valor alterado.

Como os alunos apresentavam dificuldades em relação a isso, os estagiários os questionaram sobre qual seria o termo antecessor a $(n-p+1)$ para ser utilizado na multiplicação em questão, e com o auxílio de exemplos numéricos, um aluno conseguiu chegar à conclusão de que seria $(n-p)$. Foi proposta então a multiplicação do segundo membro da igualdade

$$\mathrm{A}_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$. Esta proposta está relacionada ao fato de $(n-p)!$ ser o termo antecessor a $(n-p+1)$ para ser utilizado na multiplicação, o que possibilita reescrevê-la utilizando fatorial. Além disso, $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ = 1, logo o valor da expressão não é alterado, pois está sendo multiplicada por 1. Assim, chegou-se a seguinte expressão.

$$\mathrm{A}_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

O objetivo era que os alunos concluíssem que

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = n!$$

mas neste momento eles apresentaram dificuldades na compreensão desse fato. Por conta disso, foram utilizados, novamente, valores numéricos para n e p para que a turma pudesse perceber a possibilidade de se utilizar um fatorial na fórmula. Com base nisso, os alunos conseguiram compreender o que era esperado e consequentemente perceber que

$$\mathrm{A}_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

que é a fórmula utilizada para o cálculo do número de Arranjos Simples que geralmente é apresentada nos livros didáticos.

Durante essa parte do trabalho desenvolvido, os alunos pareciam não estar familiarizados com a busca de uma generalização a partir da percepção de regularidades, visando à obtenção de fórmulas, ou seja, com a identificação de "regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem" (BRASIL, 2002, p.127). Diante disso, foi necessário que os estagiários se empenhassem lançando mão de recursos como exemplos numéricos, fizessem diversos questionamentos, ficassem atentos às respostas dos alunos e controlassem a ansiedade para não acabar apresentando o resultado final em função das dificuldades manifestadas pelos alunos.

Analisando as resoluções dos alunos, posteriormente à oficina, foi possível perceber que a resolução do grupo A (Figura 4) também poderia ter sido aproveitada de outra forma como ponto de partida para a sistematização da fórmula para o cálculo do número de Arranjos Simples. Se ao invés de riscarem "2×1", os alunos fossem orientados a dividirem "$5\times4\times3\times2\times1$" por "$2\times1$", teriam obtido também a multiplicação "$5\times4\times3$" desejada. Com isso, a expressão poderia ser trabalhada da seguinte maneira:

$$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{5!}{2!}=\frac{5!}{(5-3)!}=A_{5,3}$$

Sendo $n = 5$, $p = 3$ e o número de Arranjos simples de n elementos tomados p a p denotado por $A_{n,p}$, obter-se-ia então:

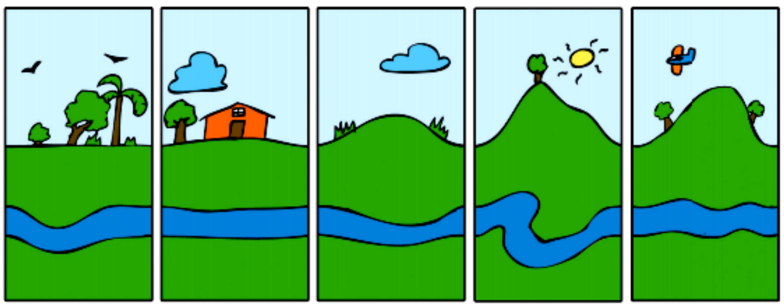
$$A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

Depois das discussões realizadas, foram sistematizados (articulados com as informações do enunciado e da resolução do problema) o conceito de Arranjo Simples e a fórmula para o cálculo do número de Arranjos Simples, em que os estagiários apresentaram aos alunos o seguinte resumo: "Arranjos simples de **n** elementos distintos tomados **p a p** ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com **p** dos **n** elementos dados. Indica-se por $A_{n,p}$ [...] o total desses agrupamentos, que calculamos assim: [...] $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ”

(DANTE, 2003, p. 361, grifo do autor)

Em seguida, foi proposto o seguinte problema aos alunos:

Problema 4
(OBMEP) *Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?*



a) uma semana *b) um mês* *c) dois meses* *d) quatro meses* *e) seis meses*

Neste problema os alunos não tiveram muitas dificuldades. Alguns utilizaram a fórmula para o cálculo do número de Arranjo Simples e um dos grupos, por meio de seu representante, registrou na lousa e apresentou a seguinte resolução:

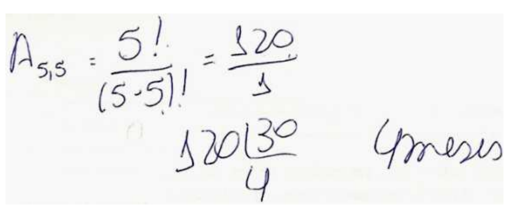


Figura 6: Resolução do problema 4 de um dos alunos do grupo B

Após as apresentações, os alunos puderam chegar à conclusão de que a situação apresentada no problema envolvia Arranjos Simples em que $n = p$, ou seja, o número de elementos dos agrupamentos que seriam formados era o mesmo que o número de elementos que se tinha para formar tais agrupamentos. Isto é, só se trocava os elementos de lugar e, após essa troca, cada agrupamento se diferenciava de outro obtido pela ordem dos elementos. Os estagiários então disseram aos alunos que esses agrupamentos, casos particulares de Arranjos Simples em que $n = p$, são chamados de Permutação Simples.

Utilizando a fórmula já obtida no problema anterior para o cálculo do número de Arranjos Simples, com $n = p$, e denotando por P_n a quantidade de Permutações Simples de n elementos, foi sistematizado o seguinte com os alunos.

> **Permutação simples:** Se temos **n** elementos distintos, então os agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos recebem o nome de Permutações simples. Indica-se por P_n o total desses agrupamentos, que calculamos assim: $P_n = n!$ (DANTE, 2003)

Após essa sistematização, foi entregue aos alunos o enunciado do último problema:

Problema 5
(UNAMA – PA – ADAPTADO) Dispõe-se de quatro tipos de frutas para fazer uma salada. Se cada salada é composta de três frutas diferentes, qual é o número de saladas diferentes que se pode preparar?

Para resolverem este problema, todos os grupos utilizaram a fórmula sistematizada para o cálculo do número de Arranjos Simples. Acompanhando os apontamentos dos grupos, os estagiários foram então discutindo sobre o fato de nos Arranjos Simples a ordem ser importante na diferenciação dos agrupamentos, e questionando se nas saladas a ordem das frutas alteraria a sua composição. Por exemplo, se duas saladas fossem feitas utilizando as mesmas frutas, a ordem que as frutas fossem colocadas tornaria uma salada diferente da outra?

Por conta da falta de tempo, pois já estava perto do horário para encerrar-se a oficina, os estagiários apresentaram uma resolução na lousa, aproveitando as ideias dos grupos, listando todos os agrupamentos possíveis. Para isso, as frutas foram denotadas por A, B, C e D, e apresentadas todas as possibilidades de saladas compostas por três das quatro frutas da seguinte forma:

ABC	ABD	ACB	ACD	ADB	ADC
BAC	BAD	BCA	BCD	BDA	BDC
CAB	CAD	CBA	CBD	CDA	CDB
DAB	DAC	DBA	DBC	DCA	DCB

Os alunos foram então questionados, na discussão geral e não mais nos pequenos grupos, se a ordem das frutas alteraria a composição das saladas, e eles afirmaram que não. Então, os estagiários circularam no quadro, com uma mesma cor de giz, todas as saladas que eram compostas pelas mesmas três frutas. Por exemplo, foram circuladas as saladas ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA com uma cor de giz, ABD, ADB, BDA, BAD, DAB e DBA com outra e, assim, sucessivamente. Esta foi a forma encontrada pelos estagiários para auxiliar os alunos, naquele momento, a identificarem mais claramente a quantidade de saladas diferentes.

Como cada salada se repetia seis vezes, e se tinha um total de vinte e quatro possibilidades de saladas, dividindo a quantidade total de possibilidades (24), pela quantidade de repetições (6), obtiveram-se 4 saladas diferentes.

Assim, foi possível definir que agrupamentos em que a ordem dos elementos de cada grupo formado não é relevante para diferenciá-los, quando apresentam os mesmos elementos, são chamados de Combinações Simples.

Para sistematizar a fórmula para o cálculo do número de Combinações Simples, os estagiários destacaram que o valor seis obtido na resolução correspondia à quantidade de permutações que poderiam ser obtidas com as três frutas utilizadas em cada salada, e o valor 24 correspondia ao total de Arranjos Simples de quatro frutas tomadas 3 a 3.

Utilizando a resolução apresentada para o problema, os estagiários sistematizaram que a fórmula para o cálculo do número de Combinações Simples de n elementos distintos tomados p a p, denotado por $C_{n,p}$ é

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,\,p}}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\text{, ou seja, } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Os estagiários ressaltaram então a diferença conceitual existente entre os Arranjos e as Combinações Simples, bem como nas fórmulas sistematizadas e a oficina foi encerrada por volta das 11h30min.

Considerações finais

O nosso principal objetivo com este trabalho foi relatar a experiência que dois futuros professores tiveram ao trabalhar o conteúdo matemático Análise Combinatória com alunos do Ensino Médio por meio da Resolução de Problemas, bem como as reflexões desencadeadas a partir desta experiência.

Trabalhar com esta estratégia de ensino, além de possibilitar que os estudantes da Educação Básica utilizassem seus conhecimentos prévios e não recorressem simplesmente à aplicação de fórmulas e regras, contribuiu para que eles se comunicassem entre si e com os futuros professores para apresentar suas ideias, discuti-las e argumentar a respeito visando à resolução dos problemas, o que em nossa visão foi produtivo durante os processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Os alunos da turma engajaram-se nas resoluções, e quando solicitado para explicitarem as resoluções, bem como suas justificativas e argumentações à turma toda, não foram presenciadas restrições por parte deles em relação a isso.

Além disso, por meio da produção escrita dos alunos e das discussões realizadas em sala de aula, consideramos que trabalhar na perspectiva da Resolução de Problemas pode contribuir para que eles compreendam os principais conceitos da Análise Combinatória.

Uma das etapas da Resolução de Problemas que mais exigiu que os estagiários se empenhassem, lançando mão de recursos como exemplos numéricos, elaborando diversos questionamentos, e, ficassem atentos às respostas dos alunos e controlassem a ansiedade para não acabarem apresentando apenas de forma expositiva, e sem relação com as resoluções dos problemas, os resultados finais pretendidos foi a da sistematização dos conceitos e das fórmulas. Apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos nessa etapa, os estagiários se empenharam em promover um espaço em sala de aula em que os alunos pudessem participar ativamente das discussões que ocasionaram as sistematizações dos conceitos e das fórmulas.

Com relação à sistematização das fórmulas, cabe destacar, ainda, que a construção da que permite o cálculo do número de Arranjos Simples poderia ter sido simplificada a partir da resolução dos alunos do Grupo A, conforme destacamos na análise das resoluções dos alunos para o Problema 3. E, que a obtenção da fórmula para o cálculo da quantidade de Combinações Simples de n elementos, tomados p a p, possibilita refletir a respeito da necessidade de se dividir o número de Arranjos Simples de n elementos, tomados p a p, pelo número de permutações desses p elementos, para que se possa obter a quantidade de agrupamentos em que a ordem de seus elementos não é relevante para diferenciá-los.

Em relação às contribuições que a experiência relatada proporcionou para a formação dos dois primeiros autores deste artigo como professores, podemos destacar que oportunizou uma nova visão a respeito da Análise Combinatória, já que os mesmos apontaram, antes da realização deste trabalho, que também possuíam dificuldades na compreensão dos conceitos envolvidos neste conteúdo. O trabalho que desencadeou a escrita deste artigo colaborou para que pudessem compreender este conteúdo do ponto de vista matemático, durante o planejamento e desenvolvimento de uma oficina, além de refletirem a respeito de aspectos didáticos e pedagógicos da abordagem do conteúdo, já que o mesmo deveria ser abordado de forma diferente de como seria em uma aula na perspectiva tradicional de ensino.

Diante disso, consideramos importante para a formação inicial de professores de Matemática o desenvolvimento de ações como a que deu origem a essa experiência relatada, no sentido de oportunizar-lhes trabalhar com uma abordagem diferenciada em sala de aula desde o Estágio Supervisionado para que possam, futuramente, se encorajarem a utilizar diferentes estratégias metodológicas no trabalho com seus alunos.

Notas

*Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. E-mail: paulohr_91@yahoo.com.br

**Mestranda em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina. E-mail: alessandrandb@gmail.com.
***Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: bruno@uel.br

[1] Dentre as tendências metodológicas da Educação Matemática destacadas nas Diretrizes Curriculares de Matemática do Paraná, tem-se, por exemplo, a Resolução de Problemas, a Investigação Matemática, a Modelagem Matemática e as Tecnologias de Informação e Comunicação.

[2] Uma aula em que o professor faz uma exposição de determinado conteúdo matemático apresentando conceitos e definições, depois mostra alguns exemplos e em seguida aplica exercícios de fixação a respeito do conteúdo.

[3] Mais detalhes a respeito dos elementos que constituem o Relatório de Estágio podem ser obtidos em Teixeira (2009).

[4] Ao longo do artigo, onde escrevemos Resolução de Problemas com as iniciais em letra maiúscula, estamos nos referindo a esta perspectiva.

[5]Informações detalhadas a respeito de cada uma dessas etapas podem ser obtidas neste trabalho das autoras.

[6] A partir daqui, quando mencionamos 'estagiários' sempre estamos nos referindo ao primeiro e segundo autores do artigo.

[7] Ribeiro, Jackson. ***Matemática:*** *Ciência e Linguagem*. Volume Único. Editora Scipione, São Paulo, 2007.

Referências

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, São Paulo, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações - Volume Único - Ensino Médio. Editora Ática, São Paulo, 2003. 616 p.

DELLA NINA, C. T.; MENEGASSI, M. E. J.; SILVA, M. M. Análise combinatória: experiências em sala de aula. **Boletim GEPEM.** Rio de Janeiro, v. 55, p. 195-208, 2009.

FONTE, A. P. G.; BISOGNIN, V. Ensino e aprendizagem de conceitos de análise combinatória por meio da metodologia de Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista – RS**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). n. 11, v.1 e v.2. p. 73-82.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R.; GIOVANI JÚNIOR, J. R. **Matemática Fundamental** - Volume Único. São Paulo, Editora FTD. 1994. 560 p.

HERMINIO, P. H. **Matemática financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem.** 2008. 234 f**.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, São Paulo, 2008.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula**. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, São Paulo, 2006.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de Problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da. (Org.). **Investigação Matemática na sala de aula e no currículo**. 1.ed. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática-APM, 1999, v. 1, p. 15-34.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-220.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando volume de cilindros através da Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v.1, n.10, p.95-103, 2009.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares para o Estado do Paraná - Matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

SOUZA, A. L. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.** 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2010.

________________. Análise Combinatória: uma Abordagem no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: II Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro – SP. **Anais...** Rio Claro, 2011. Disponível em:
< http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2011/trabalhos>. Acesso em: 04 fev. 2013.

TEIXEIRA, B. R. **Registros escritos na formação inicial de professores de Matemática:** uma análise sobre a elaboração do Relatório de Estágio Supervisionado. 2009. 94 f. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, 2009.