

O falibilismo de Lakatos e o trabalho com investigações matemáticas em sala de aula: possíveis aproximações

Guilherme Henrique Gomes da Silva
Amanda Queiroz Moura

RESUMO

A obra de Imre Lakatos, *Provas e Refutações*, é um trabalho importante dentro da filosofia da matemática, pois apresenta diversas ideias que, de certa forma, trouxeram um novo olhar para a construção do conhecimento matemático. São atribuídos a Lakatos os termos programa de pesquisa, ciência quase-empírica, falibilismo e tese racionalista. As concepções de Lakatos são baseadas na ideia de que a matemática, assim como as ciências naturais, é falível, não é indubitável e cresce por meio da crítica e correção de teorias, as quais nunca estão totalmente livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro. Mesmo não possuindo uma preocupação pedagógica, tal obra é frequentemente revisada por educadores matemáticos, já que apresenta uma heurística que pode colaborar no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Buscamos, neste artigo, apresentar algumas reflexões sobre possíveis aproximações entre a filosofia lakatosiana na construção do conhecimento matemático e a metodologia de investigações matemáticas em sala de aula. Nesta metodologia, os estudantes são estimulados a trabalhar como matemáticos profissionais na tentativa de construção do conhecimento, ou seja, as atividades desenvolvidas fornecem ênfase em processos como procura por regularidades, formulação, teste, justificação e demonstração de conjecturas, refutação, reformulação, reflexão e generalização. Nesse sentido, consideramos que as ideias de Lakatos na obra *Provas e Refutações* poderiam apresentar algumas aproximações com esta metodologia de trabalho no ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Lakatos. Falibilismo. Investigação Matemática em Sala de Aula. Filosofia da Matemática. Educação Matemática.

Lakatos' fallibilism and the mathematical investigation approach in classroom: Possible similarities

ABSTRACT

The work 'Proofs and Refutations' of Imre Lakatos is an important work in mathematics philosophy. This work shows new ideas that brought a new understanding of the construction of mathematical knowledge. Lakatos developed terms as 'research program', 'quasi-empirical science', 'fallibilism', and 'rationalist thesis'. The conceptions of Lakatos are founded on the idea

Guilherme Henrique Gomes da Silva é Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP Rio Claro, SP. Atualmente, é Docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas (MG). Endereço para correspondência: Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas – UNIFAL, MG, Brasil. E-mail: guilhermehgs2@gmail.com

Amanda Queiroz Moura é Mestranda em Educação Matemática – UNESP Rio Claro, SP. E-mail: amanda_qm@yahoo.com.br

Recebido para publicação em 27/02/2013. Aceito, após revisão, em 24/06/2015.

Acta Scientiae	Canoas	v.17	n.2	p.277-293	maio/ago. 2015
----------------	--------	------	-----	-----------	----------------

that mathematics is fallible, and it is not free of doubts, as well as natural science. For Lakatos, the knowledge mathematical grows up through criticism and correction of theories that are not entirely free of ambiguities and errors. Proofs and Refutations have not a pedagogical concern. However, it is often reviewed by mathematics educators due to its different heuristic that is viewed as a way of collaborating in the teaching and learning of mathematics. In this paper, we seek to reflect about possible similarities between the construction of mathematical knowledge according to Lakatos and the pedagogical approach of mathematical investigation in the classroom. In the latter, students are encouraged to work as professional mathematicians. The pedagogical activities provide emphasis on processes as search by regularities, question formulations, test, and justification of conjecture, proofs, refutations, reformulations, reflections and generalizations. We consider that the ideas in 'Proofs and Refutations' could have some similarities with mathematics investigation approach in teaching and learning of mathematics.

Keywords: Lakatos. Fallibilism. Pedagogical Approach of Mathematics Investigation. Philosophy of Mathematics. Mathematics Education.

INTRODUÇÃO

Imre Lakatos foi um filósofo seguidor da teoria do conhecimento científico de Karl Popper. Seu nome está associado ao termo “programa de pesquisa”, expressão usada por ele no sentido de explicar o desenvolvimento da ciência empírica. Lakatos também demonstrou grande interesse pela filosofia da matemática, principalmente no início de sua carreira. O trabalho *A Lógica do descobrimento matemático: Provas e Refutações* (1978)¹ é sua obra-prima e se baseia na ideia de que a matemática, assim como as ciências naturais, é falível, não é indubitável e cresce por meio da crítica e correção de teorias, as quais nunca estão totalmente livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro.

Nessa obra, Lakatos evidencia a tese de que o desenvolvimento do conhecimento matemático realiza-se através de um método racional. Uma de suas propostas é desafiar o formalismo, corrente filosófica que define a matemática como uma ciência das demonstrações rigorosas, ou seja, “a matemática, a partir da aritmética, é somente um jogo de deduções lógicas [...] em outros campos, certas teorias podem ser defendidas baseando-se na experiência ou plausibilidade, mas em matemática, diz ele [o formalista] ou temos uma demonstração ou não temos nada” (DAVIS; HERSH, 1985, p.381). Para Lakatos (1978),

O formalismo desliga a história da matemática da filosofia da matemática, uma vez que, de acordo com o conceito formalista da matemática, não há propriamente história da matemática. [...] O formalismo nega o status de matemática à maioria do que comumente tem sido considerado matemática, e nada pode se dizer sobre o seu progresso. Nenhum dos períodos “criativos” e dificilmente qualquer um dos períodos “críticos” das teorias matemáticas teriam sido admitidos no céu formalista em que as teorias matemáticas habitam como o serafim, expurgado de todas as impurezas da incerteza terrestre. (LAKATOS, 1978, p.14)

¹ Quando nos referirmos a esta obra a denominaremos apenas por *Provas e Refutações*.

A seqüência de *Provas e Refutações* é escrita passando-se em uma sala de aula imaginária, apresentando os diálogos entre o professor e seus alunos sobre o levantamento da história da conjectura de Descartes-Euler sobre poliedros. De acordo com Davis e Hersh (1985) este é a continuação de um diálogo apresentado em *Mathematics and plausible reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*, de George Pólya. Estes autores trazem uma síntese sobre a estrutura das ideias apresentadas em *Provas e Refutações* por Lakatos:

O professor apresenta a demonstração tradicional, atribuída a Cauchy, da fórmula de Euler, na qual as arestas do poliedro são deformadas de maneira a formar uma rede no plano, e depois sucessivamente reduzidas a um único triângulo. Assim que a demonstração é concluída, os alunos apresentam um verdadeiro zoológico de contra exemplos. A batalha começou. O que é que a demonstração demonstrou? O que sabemos em matemática e como o sabemos? A discussão prossegue em níveis cada vez mais elevados de sofisticação, tanto matemáticos quanto lógicos. Há sempre vários pontos de vista em confronto, e muitas reviravoltas, quando um dos personagens muda de ponde de vista e adota uma posição que acaba de ser abandonada por seu antagonista. (DAVIS; HERSH, 1985, p.389)

No decorrer dos diálogos, Lakatos traz, nas notas de rodapé, a história genuína e documentada (em ordem não linear) da conjectura de Descartes-Euler, apresentando detalhes consideráveis. Para o âmbito da Educação Matemática, pode-se considerar que Lakatos deixou muitas contribuições com esta obra. Porém, Garnica (1996) destaca que, mesmo apresentando uma concepção de matemática que rompe com os conceitos tradicionalmente impostos, a filosofia lakatosiana, para servir de fundamento para práticas de sala de aula de matemática, deve ser revisitada e colocada em bases mais seguras. Para a comunidade de matemáticos, Jesus (2009) afirma que trazê-los para uma discussão da filosofia da matemática fora da perspectiva absolutista, como ocorre na perspectiva de Lakatos, seria uma grande contribuição, pois “conseguir que eles [os matemáticos puros] convivam com perspectivas falibilistas e sociais poderia torná-los menos inflexíveis na administração dos conflitos produtores e sustentadores da cisão artificial que ainda persiste entre matemática e educação matemática” (JESUS, 2009, p.164).

Um aspecto importante da filosofia da matemática de Lakatos, e que se diferencia da maioria daqueles de sua época, é a não existência de preocupações em relação aos fundamentos da matemática e de sua relação com outras teorias. Na verdade, Lakatos considerava a matemática tão falível quanto o conhecimento do mundo externo. O cerne de sua preocupação está no crescimento do conhecimento matemático, propiciado principalmente pelas conjecturas informais e provas heurísticas de teorias já formalizadas.

Lakatos iniciou a construção de uma epistemologia falibilista (ou não dogmática) da matemática, afirmando que a matemática informal é uma ciência que cresce por um processo de críticas sucessivas, de refinamento de teorias e do processo de teorias novas

e conflitantes, algo que contrapõe ao modelo dedutivo daquela formalizada. Dentro da educação matemática, acreditamos que o trabalho com tarefas investigativas em sala de aula (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006; PONTE et al., 1998; KISTEMANN JÚNIOR; SILVA, 2012) se aproxima da filosofia lakatosiana.

Seguindo os moldes da metodologia de pesquisa qualitativa, este trabalho reflete o resultado de um estudo exploratório e bibliográfico. Inicialmente, buscamos nos aprofundar nas principais ideias de Lakatos na obra *Provas e Refutações*. Para tanto, dispomos de um amplo referencial teórico que incluiu, além da referida obra, trabalhos de pesquisadores da filosofia e da educação matemática sobre o tema. Este referencial foi composto por artigos científicos, teses de doutorado e livros de referência. Em seguida, partindo da hipótese de que existiriam semelhanças entre esta teoria e o trabalho pedagógico com tarefas investigativas em sala de aula, buscamos por teóricos nesta linha de trabalho que nos auxiliassem a identificar possíveis aproximações entre as ideias lakatosianas e esta abordagem pedagógica. O presente artigo traz os resultados de nossas reflexões nesse processo. Inicialmente apresentaremos algumas considerações sobre a filosofia de Lakatos em *Provas e Refutações* e, em seguida, abordaremos as principais ideias sobre a metodologia de investigação matemática em sala de aula. Por fim, com base na teoria, buscaremos trazer evidências que indiquem possíveis similaridades entre estas duas concepções.

UMA BREVE DESCRIÇÃO DA OBRA *PROVAS E REFUTAÇÕES*

Apesar de os trabalhos de Lakatos situarem-se no domínio da Filosofia da Matemática e da Ciência, *Provas e Refutações* é uma obra com considerável penetração na comunidade de Educação Matemática, apresentando, de acordo com Cardoso (1997), maior repercussão lá do que, por exemplo, na comunidade matemática ou de professores da escola básica. Um dos motivos pode ser pela ideia falibilista de Lakatos: *Sim, a matemática é falível*, ou também pelo enfoque heurístico manifestado em seu trabalho. A obra *Provas e Refutações* apresenta dois capítulos, que mostram a história do desenvolvimento da conjectura de Descartes-Euler, além de dois apêndices que trazem o conceito de convergência uniforme e as vantagens de utilizar o enfoque heurístico em relação ao dedutivista no desenvolvimento do conhecimento matemático.

De acordo com Cardoso (1997), as principais propostas de Lakatos nessa obra são: a tentativa de formular uma crítica à visão formalista da Filosofia da Matemática, (como já destacamos), mostrar que o conhecimento matemático se dá por meio de um método racional, denominado por Lakatos de *Método de Provas e Refutações* e mostrar que o conhecimento já produzido só pode ser avaliado de duas formas. Na primeira, o conhecimento é dito progressivo, visto que prediz novos fatos e explica os antigos, e utiliza argumentos internos da teoria para produzir novos conhecimentos (há um aumento do conteúdo). Na segunda, o conhecimento pode ser avaliado como

degenerativo, que significa que já não prediz mais conhecimentos novos. Cardoso (1997) afirma que um conhecimento progressivo pode tornar-se degenerativo com a saturação da teoria, da mesma forma que um degenerativo pode torna-se progressivo com o aparecimento de novos conhecimentos. Podemos citar como um exemplo disso a Geometria Euclidiana, que, de certo modo, poderia ser considerada uma teoria degenerativa, já que, aparentemente encontrava-se pronta e acabada. Porém, quando o quinto postulado foi colocado em questão e surgiram as chamadas geometrias não euclidianas, ela tornou-se uma teoria progressiva, pois novas críticas e novos conhecimentos nasceram a partir dela.

Outro fato importante destacado por Lakatos é sua visão sobre a matemática como uma ciência *quase-empírica*, que se dá a partir de problemas. “As soluções (provisórias) para os problemas passam por testes (refutações) e reformulações. O veículo para o crescimento é a crítica, concorrência entre teorias, troca de problemas. Não há acumulação de verdades eternas” (CARDOSO, 1997, p.83). A matemática tratada por Lakatos em *Provas e Refutações* é formada por áreas emergentes da matemática que estão em fase de crescimento. Estas áreas, denominadas por Lakatos de *matemática informal*, ainda não foram organizadas em sistemas dedutivos rigorosos nem foram formalizadas no sentido de terem seus resultados apresentados a partir de um conjunto de axiomas explicitamente estabelecidos, onde cada passo é tomado como simples e mecânico, derivando de um acordo com regras de inferência explicitamente estabelecidas. Para Lakatos, esta última representa a “morte do verdadeiro pensamento criativo”. Conforme salienta Bloor (1998),

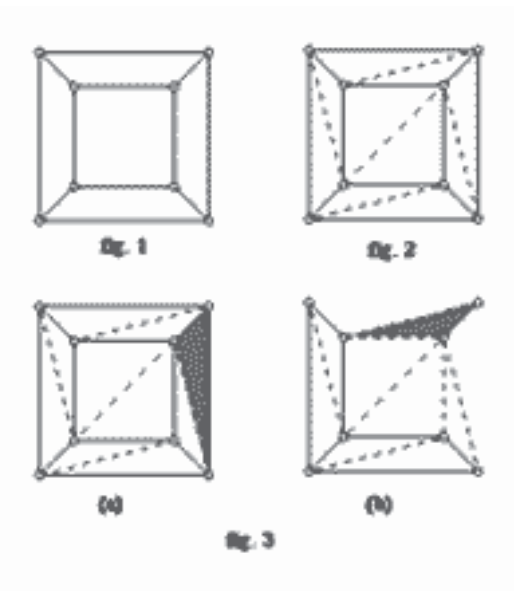
[...] o caráter autoevidente, algumas vezes proclamado, para os axiomas dos sistemas formais e os passos intuitivamente triviais de raciocínio de que os resultados são feitos depender, são meras ilusões. Algo é obvio apenas porque ainda não foi sujeito à crítica investigativa. A crítica destrivializa o trivial e mostra exatamente o que existe, admitindo como certo naquilo que pensamos ser autoevidente. Não existe, portanto, nas verdades lógicas aparentemente simples e triviais nenhum fundamento último para o conhecimento matemático. (BLOOR, 1998, p.94)

O diálogo fictício entre professor e alunos apresentado em *Provas e Refutações* discorre ao redor da conjectura de que, para todo poliedro regular, a relação² $V - A + F = 2$ surge a partir de várias tentativas e erros por parte dos participantes. O professor apresenta uma prova, baseada na demonstração de Cauchy, onde se imagina um poliedro oco e remove-se uma das faces, tornando possível a planificação da superfície restante (LIMA, 1985). Na planificação, mesmo que as faces e as arestas se deformem, o número de vértices e arestas não se altera. Em seguida utiliza-se o processo de triangularização do poliedro planificado por diagonais a partir dos vértices e retiram-se tais triângulos um a um, retirando-se (i) uma aresta ou (ii) duas arestas

² Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

e um vértice. Após esse processo, resta um único triângulo e verifica-se a validade da expressão $V - A + F = 1$ (já que uma face foi retirada). A Figura 1 mostra parte desse processo.

FIGURA 1 – Processo de triangulação do poliedro planificado.



Fonte: Lakatos (1976).

Após a apresentação da demonstração, os estudantes questionam as validades dos passos-lemas da demonstração:

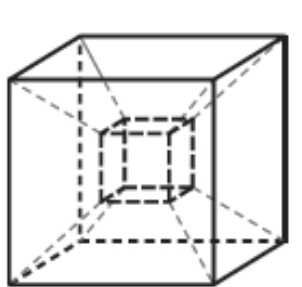
Alfa: Tenho alguma dúvida. Percebo que essa experiência pode ser feita para um cubo ou para um tetraedro, mas como posso saber se poderá ser feita para qualquer poliedro? Por exemplo, o senhor está seguro de que *qualquer poliedro, depois de retiramos uma de suas faces, pode ser esticado planamente no quadro negro?* [...]

Beta: O senhor está seguro de que *ao triangular o mapa teremos sempre uma nova face para uma nova aresta?* [...]

Gama: O senhor está certo de que *há apenas duas alternativas – o desaparecimento de uma aresta ou então de duas arestas e um vértice – quando se retiram os triângulos um a um. O senhor tem mesmo certeza de que ficamos com um único triângulo no fim desse processo?* (LAKATOS, 1978, p.22)

Conforme aponta Garnica (1996), uma consequência desses questionamentos é que o processo das refutações se inicia, sendo necessário modificar também a definição de poliedro, pois surgem vários contraexemplos que comumente seriam tomados como poliedros, não satisfazendo a eulerianidade. Estes são os chamados *monstros* que aparecem como refutações de definições ou de provas e podem ser de três formas: *Locais mas não globais*, que refutam lemas, mas não a conjectura principal, fazem os lemas serem substituídos por versões melhoradas e menos evidentes, sendo necessária a crítica, a reformulação e a demonstração; *Locais e globais*, que são inofensivos já que não estão de acordo com a conjectura principal nem com lemas, e dessa forma não refutam nada; *Globais, mas não locais*, que refutam a conjectura principal e auxiliam a encontrar os lemas ocultos. No caso dos poliedros, os contraexemplos globais redefinem várias vezes o conceito de poliedro (CARDOSO, 1997).

FIGURA 2 – Um contra exemplo em relação à conjectura de Descartes-Euler desenvolvido em Provas e Refutações.



Fonte: Lakatos (1978, p.35).

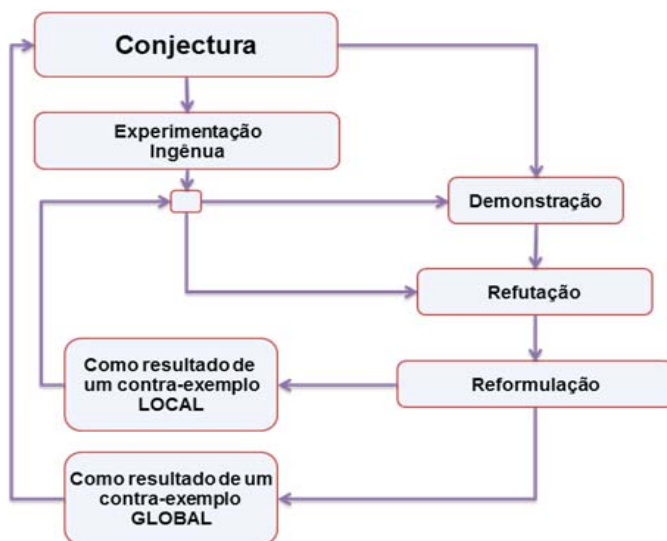
Molina (2001) traz uma síntese dos estágios propostos por Lakatos, quando desenvolve o método de provas e refutações ao redor da conjectura de Descartes-Euler, e, também, sobre a conjectura de Cauchy em relação ao limite de uma série convergente de funções contínuas (Quadro 1). A aparição dos contraexemplos em relação à conjectura leva em direção a uma análise mais detalhada da prova da mesma, buscando identificar os lemas ocultos que não são satisfeitos devido aos contraexemplos. Tais lemas são agregados como condições à primeira conjectura, originando outra, melhorada. Já Davis e Hersh (1985) propõem um esquema (Figura 3) que auxilia na compreensão da heurística da descoberta matemática proposta por Lakatos.

QUADRO 1 – uma síntese dos estágios do método de provas e refutações.

- (1) Apresenta-se uma conjectura primitiva.
- (2) Prova (nesse caso a prova é um argumento mental ou aproximado, que decompõe uma conjectura primitiva em subconjecturas ou lemas).
- (3) Surgem contra exemplos globais.
- (4) Reexamina-se a prova: identifica-se um lema que foi refutado pelo contra exemplo global, então pode acontecer que: (i) este lema culpável tenha permanecido oculto ou (ii) não tenha sido identificado corretamente. Dessa forma ele é explicitado e incorporado como condição às hipóteses da conjectura primitiva. Isso faz com que a conjectura primitiva seja melhorada, enriquecendo seus conceitos.
- (5) Examinam-se provas de outros teoremas para determinar se o lema descoberto aparece neles ou se o conceito gerado pela prova aparece neles.
- (6) Comprovam-se as consequências da conjectura melhorada.

Fonte: Molina (2001).

FIGURA 3 – Modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta Matemática (adaptado).



Fonte: Davis e Hersh (1985).

Para Davis e Hersh (1985), um aspecto importante na obra de Lakatos é a apresentação de seres humanos (um professor e seus alunos), ao invés de símbolos e regras de combinações. Não apresenta um sistema baseado em seus primeiros princípios, mas um choque de opiniões, raciocínios e contra raciocínios. Lakatos prefere uma matemática crescendo a partir de um problema e uma conjectura, ao invés de uma matemática esqueletizada e fossilizada, onde a teoria adquire forma sob nossas perspectivas, dentro de discussões que ora se aproximam e ora se distanciam, e a dúvida cede lugar à certeza sendo seguidas pelo surgimento de novas dúvidas.

Do mesmo modo, outro aspecto que pode ser considerado significativo na filosofia da matemática de Lakatos é o padrão para o desenvolvimento de conceitos, conjecturas, provas e teorias matemáticas, podendo ser comparada a uma empresa coletiva. Segundo Jesus (2009),

Isso indica o papel e variedade de interações atribuindo para esse desenvolvimento, e mostra que a criação em matemática não é essencialmente uma atividade comunitária. De acordo com Lakatos, além do trabalho dos indivíduos, um processo de negociação dialética desempenha um papel social. (JESUS, 2009, p.191)

Garnica (1996) traz uma série de implicações para a educação matemática que a concepção de Lakatos em *Provas e Refutações* poderia propiciar. Algumas dessas dizem respeito à utilização da heurística e de elementos da história no desenvolvimento de conteúdos matemáticos em sala de aula. Para o autor, *Provas e Refutações* constitui-se de um “elemento básico para a explicação de uma história da educação matemática, pela riqueza das situações dialógicas/dialéticas com que trata, pela clareza da exposição e pelo compromisso de Lakatos com a educação” (GARNICA, 1996, p.144).³ Além do mais, o autor destaca a exibição na obra da necessidade de relativizar posições formalistas no ensino da matemática e a defesa da matemática não formal em situações de ensino.

Segundo Garnica (1996), *Provas e Refutações* trata de conceitos que são importantes à educação matemática, como por exemplo, a exposição de correntes filosóficas da matemática, as noções de prova, as limitações da linguagem formal, o indutivismo e dedutivismo, entre outros, o que propicia o estabelecimento de considerações importantes para aqueles que buscam focar, em suas pesquisas ou práticas escolares, tais temas. Complementando estes aspectos, acreditamos que a metodologia de investigação matemática em sala de aula, explorada por diversos trabalhos na educação matemática (PONTE et al., 1998; BROCARDO, 2001; PONTE, 2003; ROCHA; PONTE, 2006; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006; SILVA, 2012) poderia, de certa forma, se aproximar da filosofia de Lakatos em *Provas e Refutações*, apresentando algumas similaridades. A seguir, situaremos o leitor com uma síntese em relação a essa metodologia e posteriormente apresentaremos algumas reflexões referentes a possíveis aproximações entre as duas concepções.

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM SALA DE AULA

Algumas perspectivas da filosofia da matemática dão destaque aos processos investigativos envolvidos na concepção do conhecimento matemático. De modo geral,

³ Como já salientamos, a obra *Prova e Refutações* de Lakatos não traz nenhuma preocupação pedagógica. Quando Garnica (1996) afirma que Lakatos possui um “compromisso com a educação”, o autor está se referindo ao fato de Lakatos ter ocupado cargo público importante nos quadros políticos da Educação húngara, o que implica certo relacionamento/compromisso dele com a Educação.

investigar é procurar saber o que ainda não se sabe. Para os matemáticos profissionais, essa ideia vai além, pois consideram que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2006, p.13). Podemos encontrar essa ideia no matemático George Pólya, quando nos diz que “a Matemática tem duas faces: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva” (PÓLYA, 1975, p.vii), a qual nos atenta sobre a diferença entre estas duas imagens da Matemática.

Conforme destacam Ponte et al. (1998), há um consenso entre os educadores de que a aprendizagem matemática envolve o “fazer matemática”. A concepção de que os alunos podem realizar investigações matemáticas e que isso é um importante processo na construção do conhecimento é sustentada por muitos pesquisadores (PÓLYA, 1975; HADAMARD, 1945; RAMOS, 1997; BRAUMANN, 2002). Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) sugerem que uma investigação matemática envolve quatro momentos:

- (1) Exploração e formulação de questões;
- (2) O processo de formular conjecturas;
- (3) Testes e reformulação das conjecturas;
- (4) Justificação e avaliação do trabalho realizado.

Estes momentos podem surgir de modo desordenado. A conjectura inicial pode aparecer ao mesmo tempo em que a formulação de questões ou até mesmo após o aparecimento de novas questões por meio do teste de uma conjectura. Para os autores, o trabalho de *formular questões, elaborar, testar e refinar conjecturas, demonstrar, refinar a demonstração, comunicar os resultados aos pares*, enfim, o processo utilizado pelos matemáticos na descoberta de novos conhecimentos, está ao alcance dos estudantes na aula de matemática. Nesse sentido, Ponte et al. (1998) destacam que utilizar as investigações matemáticas no processo de construção do conhecimento do estudante adquire uma importância significativa, já que podem fornecer (i) estímulo ao envolvimento dos estudantes para uma aprendizagem significativa; (ii) diversidade em pontos de partida para os alunos com diferentes níveis de capacidade; (iii) modo de pensar holístico, relacionando vários tópicos, condição esta fundamental para um raciocínio matemático significativo; (iv) uma visão completa da matemática, mostrando como a investigação faz parte de sua construção e que esta é uma atividade humana, incompleta e que pode ser falível.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) apontam que uma tarefa de investigação em sala de aula se desenvolve geralmente em três fases: introdução da tarefa, desenvolvimento e discussão dos resultados. Na primeira fase, o professor leva a proposta à turma, de forma oral ou por escrito e possui grande importância para o prosseguimento do trabalho. Nesta fase, o professor precisa se certificar de que todos os alunos entenderam a tarefa proposta e o que se espera deles durante a atividade. A atitude investigativa deve ser estimulada pelo professor, a fim de que os alunos criem suas próprias conjecturas.

A segunda fase consiste na realização da investigação em si, de forma individual, em pares, em grupos, com a sala toda, enfim, da maneira que melhor atender às necessidades do professor e dos estudantes. É nessa fase em que ocorrem as etapas mencionadas anteriormente (formulação de questões, levantamento de conjecturas, refinamento das questões etc.). Nela, o professor passa a desempenhar um papel mais de orientador, prestando o apoio necessário aos alunos e visando compreender os processos dos trabalhos. Esta é a fase de exploração e formulação de questões, onde as sugestões do professor são fundamentais para o desenvolvimento bem-sucedido da investigação. Para garantir que os alunos evoluam, é preciso estar atento ao processo de formulação e teste das conjecturas. Conforme destacado por Kistemann Júnior e Silva (2012), esse é um trabalho árduo para o professor, uma vez que ele “deve assumir um papel de questionador, ou seja, deve constantemente instigar os alunos a refletirem sobre o processo de investigação, questionando a forma de como chegaram a certo resultado, ou perguntando o *porquê* de um determinado passo” (p.102).

A terceira fase é o momento em que o professor conduz à discussão dos resultados da investigação. Os estudantes relatam aos colegas o trabalho realizado e é possível realizar o confronto de opiniões. O professor desempenha o papel de moderador, garantindo que sejam apresentados os resultados mais significativos ao mesmo tempo em que estimula os alunos a se questionarem.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p.41)

As tarefas investigativas pretendem trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática pura, na qual o aluno é convidado a agir igual a um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, como também, na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e professores. Cabe ressaltar que, para que se tenha sucesso com a investigação, o professor precisa ter uma boa relação com seus alunos, existindo um espírito de confiança mútua e flexibilidade do professor para lidar com situações imprevistas que poderão surgir.

POSSÍVEIS APROXIMAÇÕES

Já destacamos anteriormente que Lakatos não tinha nenhuma preocupação em torno da criação de uma metodologia para o ensino e aprendizagem da matemática. Sua preocupação em *Provas e Refutações* centra-se na ideia do crescimento de uma teoria, submetendo as demonstrações de uma conjectura à crítica, buscando, através de

contraexemplos e do refinamento das ideias, aperfeiçoar as provas e a própria conjectura. A descoberta origina-se através da análise da prova e pelo descobrimento de lemas ocultos, ou seja, a descoberta e a justificação não são consideradas separadamente. Mesmo não aparentando preocupações pedagógicas, sua forma de trabalho tem influenciado pesquisas em Educação Matemática através dos anos (KARAKUS; BÜTÜN, 2013; SRIRAMAN, 2006; REID, 2002). Pensando na metodologia de investigações matemáticas em sala de aula, acreditamos ser possível observar algumas aproximações (e também alguns distanciamentos) com a filosofia de Lakatos em *Provas e Refutações*.

Primeiramente, consideramos que uma possível aproximação entre as duas concepções pode ser observada em relação ao *destaque no processo de trabalho com a matemática*. Em *Provas e Refutações*, e em muitos dos trabalhos com a metodologia de investigação matemática em sala de aula, há uma ênfase na atividade matemática em si, sobre a qual os processos investigativos são direcionados. Na obra de Lakatos e na metodologia pedagógica de investigação matemática, a atividade matemática em si é fortemente destacada, seja na busca e refinamento de novas teorias, ou na apropriação de conteúdos matemáticos em situações escolares. Entretanto, cabe ressaltar que existem estratégias pedagógicas que privilegiam processos investigativos no ensino e aprendizagem da matemática, mas não fazem referência unicamente ao trabalho com a matemática pura. Skovsmose (2000), por exemplo, mostra que, além da matemática pura, é possível que as tarefas façam referência à semirrealidade e à realidade.

Na semirrealidade, a matemática é explorada em assuntos reais do cotidiano, mas sem maiores ligações com os mesmos. Assim, a situação abordada na tarefa é tratada de forma mais artificial, não apresentando impressões sensoriais aos alunos, sendo que apenas os dados sobre medidas, valores, espessura, etc., são relevantes. Mesmo sendo uma situação inventada, quando as tarefas investigativas fazem referência à semirrealidade, é possível que o professor estimule os estudantes a conjecturar e procurar respostas, utilizando assim o processo de investigação discutido anteriormente. Um exemplo de tal tarefa é discutido em Skovsmose (2000). O autor apresenta uma atividade hipotética sobre “corrida de cavalos”. Nessa situação, cavalos são numerados de 2 a 12. Dois dados são lançados e, de acordo com a soma dos mesmos, o cavalo que possui a numeração indicada avança. O autor afirma que, a partir desta atividade, é possível criar uma “agência de apostadores” entre os alunos, implicando as seguintes questões: “em qual cavalo há a maior possibilidade de vitória?”; “Por que o cavalo 3 tem menos possibilidade de vitória que o cavalo 7?”; “O que acontecerá depois de 10 rodadas com o cavalo 2?”. Apesar de a atividade pertencer a uma semirrealidade, ela se localiza dentro de um ambiente propício à investigação matemática, denominado por Skovsmose (2000) como *cenário para investigação*. Questões como “o cavalo 2 precisa tomar vitaminas” ou “o cavalo 6 é o ligeirinho” não serão tomadas como obstrução ao trabalho do professor. Skovsmose (2000) enfatiza que tarefas investigativas também podem fazer referência à realidade, explorando assuntos matemáticos através de dados reais do cotidiano. Um exemplo disso pode ser o trabalho com projetos, amplamente discutido na educação matemática (CATTAI, 2008; BIOTTO FILHO, 2008).

Seja qual for a abordagem em que as tarefas fazem referência (matemática pura, semirrealidade ou realidade), tanto um enfoque tradicional de ensino quanto um enfoque investigativo podem ser trabalhados. A utilização de um enfoque investigativo colabora para que o estudante não veja a matemática como uma ciência pronta e acabada, mas como sendo construída ao longo dos tempos pela humanidade. E é nesse sentido que identificamos outro ponto de convergência entre a filosofia lakatosiana em *Provas e Refutações* e o trabalho com tarefas investigativas em sala de aula. Um aspecto central em ambas as concepções é a *visão da matemática como uma atividade humana, passível de falhas*, onde seus teoremas podem ser refutados e reformulados. Desta forma, a matemática não é vista como uma ciência pronta, mas em constante crescimento, aberta para novas descobertas através da investigação.

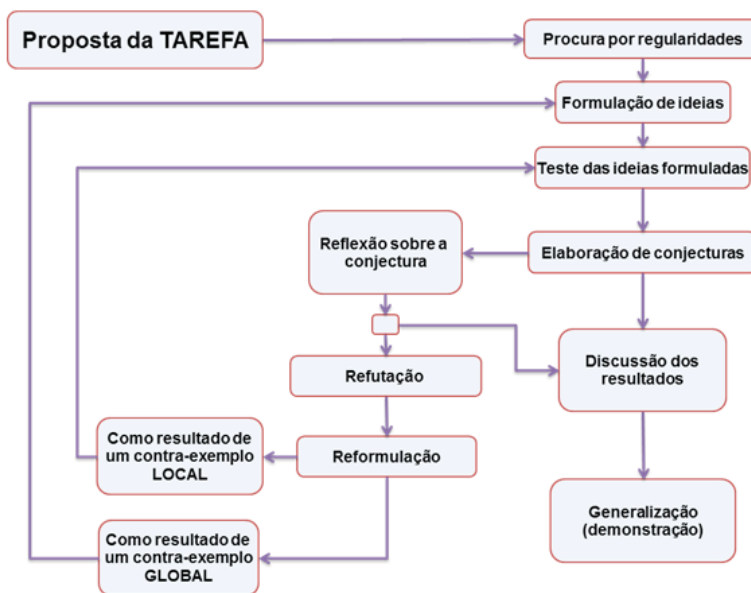
O processo de *experimentação ingênua da hipótese (ou procura por regularidades)* aparece como fundamental para as duas concepções. Este processo é importante, pois auxilia na aquisição de ideias que fornecem subsídios para a elaboração da demonstração da conjectura ou na melhor compreensão da mesma. No trabalho com investigações em sala de aula, esta procura por regularidades, muitas das vezes, fazem com que os estudantes formulem suas ideias sobre a tarefa. Por exemplo, em uma investigação em um ambiente de geometria dinâmica, os estudantes podem modificar as dimensões de um paralelogramo arrastando seus vértices pela tela do computador, verificando que os ângulos opostos permanecem iguais. Isto leva os estudantes a formularem suas ideias iniciais sobre características do objeto e abrem caminho para elaboração de conjecturas.

Em *Provas e Refutações*, o professor e os estudantes debatem, discutem, evidenciam suas opiniões, discordam, mudam seus pontos de vista, duvidam da proposição. Existe um *diálogo e um debate constante* ao longo do processo de refinamento da conjectura de Descartes-Euler. Essa ideia é muito valorizada no trabalho com investigações matemáticas em sala de aula, principalmente no processo que antecipa o produto final da investigação, no caso a generalização da conjectura. Os estudantes apresentam suas hipóteses e são confrontados pelo professor ou por outros colegas, precisando defender suas estratégias e conclusões. Em meio a esse debate, o professor organiza as discussões com o objetivo de sistematizar determinadas conclusões e tornar verdadeiros certos resultados. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), este processo propicia aos estudantes um entendimento sobre o significado de investigar. Além disso, desenvolvem a capacidade de comunicar-se matematicamente, de refletir sobre seu trabalho e sobre o poder da argumentação. Os autores realçam que, sem tal discussão, corre-se o risco de a investigação perder todo o seu sentido. Além do mais, é possível estabelecer conexões com outras propostas, possibilitando a abertura de novos pontos de partida para mais investigações.

Nesse mesmo sentido, a *valorização das ideias dos estudantes* é uma característica em ambas as concepções. Em *Provas e Refutações*, o professor discutia todos os contraexemplos apresentados pelos estudantes, não importando o posicionamento dos mesmos em relação à conjectura exposta. Quando se trabalha com investigações matemáticas em sala de aula, o professor valoriza os posicionamentos e ideias dos estudantes. Isso auxilia no desenvolvimento da autonomia de seus alunos.

Feitas estas considerações, apresentamos um diagrama (Figura 4) que acreditamos caracterizar uma possível forma em que se ocorre o trabalho com investigações matemáticas em sala de aula. Este diagrama foi baseado em Lakatos (1976) e em vários teóricos que abordam o trabalho pedagógico com investigações matemáticas, dentre eles Ponte et al. (1998) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

FIGURA 4 – Processo de trabalho com investigações matemáticas em sala de aula.



Fonte: os autores.

Contudo, é preciso perceber que existem diferenças significativas entre a concepção de Lakatos em *Provas e Refutações* e o trabalho com investigação matemática em sala de aula. Sem dúvida, a diferença mais marcante, como mencionado anteriormente, está na intenção contida em cada concepção. Lakatos está inclinado para o processo de construção de novos conhecimentos matemáticos (novas teorias), sem nenhuma preocupação pedagógica com a matemática, diferentemente do que se ocorre nos trabalhos pedagógicos sobre investigação matemática. Além disso, o *processo de refutação* na obra de Lakatos é iniciado na própria demonstração, diferentemente do que geralmente é feito quando se trabalha com investigações matemática em sala de aula. Nesta última, a demonstração (ou generalização), na maioria das vezes, aparece como o processo final da tarefa, realizada após diversas discussões e reflexões entre os estudantes (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006). As refutações são feitas após a formulação das ideias e início da elaboração de conjecturas, ocorrendo no momento em que os estudantes refletem sobre a hipótese apresentada. Porém, é importante salientar que, nesta forma de

trabalho, nem sempre as situações ocorridas em sala de aula surgem de forma linear. Em alguns casos, é possível que o professor proponha que a investigação comece a partir da demonstração de um teorema ou feita de forma provisória, logo que a conjectura é formulada. Apesar disso, nos trabalhos desenvolvidos nesta temática, geralmente a demonstração funciona como o processo final, com o intuito de institucionalizar aquele conhecimento “descoberto” pelos estudantes. Como já destacado em *Provas e Refutações*, Lakatos não vê a demonstração de uma forma conclusiva, mas como uma possibilidade preliminar ao surgimento das refutações. No trabalho com investigações matemática em sala de aula, consideramos que essa “justificação”, apesar de ser na maioria das vezes complexa para os alunos, na medida do possível, deve ser trabalhada, colaborando para que os estudantes possam compreender que testar uma hipótese de várias formas possíveis não garante sua veracidade. Abrantes (1999) afirma que a demonstração geralmente surge aos olhos dos alunos como uma forma de fornecer a certeza de que uma hipótese investigada é realmente válida. No entanto, sua função não se resume em garantir a veracidade de uma hipótese. Ela é importante para que o estudante possa compreender por que razão a tal hipótese é válida.

Outra diferença entre as duas concepções pode ser considerada na etapa de *reformulação*. Enquanto que na obra de Lakatos os contraexemplos locais e globais influenciam modificações na demonstração e na conjectura, respectivamente, no trabalho com investigações em sala de aula, o primeiro leva os estudantes a realizarem *novos testes nas ideias formuladas*, propiciando um novo pensar sobre a elaboração da proposição. Os contraexemplos globais induzem os estudantes a formularem novas ideias, sendo que, em muitos casos, todo o pensamento que tiveram anteriormente é invalidado, sendo necessário a formação e o teste de novas ideias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos neste artigo discutir a concepção de Lakatos em *Provas e Refutações*, bem como refletir sobre possíveis aproximações entre suas ideias com a educação matemática. Lakatos apresentou uma concepção diferente daquelas de seus contemporâneos que buscavam fundamentar a matemática, tentando mostrar que a matemática, assim como as ciências naturais, é falível e não incontestável. Conforme apontam Davis e Hersh (1985), poucos filósofos têm discutido a matemática em termos diferentes da lógica formal. O modelo de Lakatos confrontou essa concepção, apresentando uma postura diferente relativa à busca por novas teorias.

Na educação matemática, vimos que existem alguns trabalhos que buscam explorar aspectos contidos em *Provas e Refutações* que influenciam as práticas pedagógicas nesta área. Em nosso caso, buscamos neste artigo refletir sobre possíveis conexões entre a filosofia de Lakatos nesta obra com o trabalho com investigações matemáticas em sala de aula. Foi possível notar que existem certas aproximações e distanciamentos entre as duas concepções. Da mesma forma que a ideia de Lakatos em *Provas e Refutações* se opôs ao modelo formalista da descoberta de novas teorias, a utilização da metodologia

de investigações matemática em sala de aula tem se mostrado uma alternativa para o trabalho docente, oferecendo subsídios para uma abordagem diferente daquela que tradicionalmente tem sido adotada nas aulas de matemática. Isso tem levado alunos e professores a experimentarem novas sensações, como, por exemplo, a compreensão do significado de uma investigação e qual papel assumir perante uma conjectura, contribuindo para a construção do pensamento matemático e para uma aprendizagem efetiva.

Mesmo apresentando certas diferenças, acreditamos que a filosofia de Lakatos em *Provas e Refutações* pode ter influenciado consideravelmente os primeiros trabalhos com investigações matemáticas na educação e, posteriormente, o melhoramento desta metodologia. Lakatos reconhece a importância que os problemas exercem no desenvolvimento da matemática, posição corroborada por diversos educadores matemáticos e uma posição assumida quando se trabalha com investigações matemáticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E., FONSECA, H., PONTE, J. P., ABRANTES, P. (Orgs.). *Ensino de Geometria no Virar do Milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999.
- BIOTTO FILHO, D. *O desenvolvimento da matemática no trabalho com projetos*, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008. 100f.
- BLOOR, D. Negociação no pensamento lógico matemático. In: *Sociologia da Matemática. Cadernos de Educação*, n.3. Organização Grupo TEM, Lisboa: APM, 1998.
- BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In PONTE, J. P. et al. (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p.5-24.
- BROCARD, J. *As investigações na sala de aula de matemática: um projeto curricular no 8º ano*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa: APM, 2001.
- CARDOSO, V. C. *As teses falibilistas e racionalistas de Lakatos e a Educação Matemática*, 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 1997.
- CATTAI, M. D. S. *Professores de matemática que trabalham com projetos nas escolas: quem são eles?*, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2008.
- DAVIS, P. J., HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1985.
- GARNICA, V. A. M. Lakatos e a filosofia do Provas e Refutações: Contribuições para a educação matemática. *Educação & Sociedade*, ano XVII, n.56, p.431-451, 1996.
- HADAMARD, J. *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.
- JESUS, W. P. de. A filosofia da Educação Matemática de Paul Enerst e suas relações com as filosofias da matemática de Imre Lakatos e Ludwig Wittgenstein. In: MIORIM,

- M. A.; VILELA, D. S. (Orgs.). *História, Filosofia e Educação Matemática: práticas de pesquisa*. Campinas, SP: Editora Alínea, 2009.
- KARAKUS, F; BÜTÜN, M. Examining the method of proofs and refutations in pre-service teachers' education. *Bolema*, Rio Claro, v.27, n.45, 2013.
- KISTEMANN JUNIOR, M. A., SILVA, G. H. G. O professor de Matemática e a Investigação em sala de aula quadro a quadro. *BOLETIM GEPEM*, n.60, p.93-107, 2012.
- LAKATOS, I. *A Lógica do descobrimento Matemático: Provas e refutações*. Rio de Janeiro, Zahar, 1978.
- LAKATOS, I. *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- LIMA, E. L. O teorema de Euler sobre poliedros. *Matemática Universitária*, n.2, p.57-74, dez/1985.
- MOLINA, J. A. Lakatos como filósofo da Matemática. *Episteme*. Porto Alegre, n.13, p.129-153, jul/dez/2001.
- PÓLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press, 1954.
- PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.
- PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M.H.; SEGURADO, M.I.; *Histórias de investigações matemáticas*, Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.
- PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, n.2, p.93-169, 2003.
- PONTE, J.P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 152 p.
- RAMOS, J. S. Matemática experimental. *Educação e Matemática*, 45, p.7-10, 1997.
- ROCHA, A.; PONTE, J. P. Aprender matemática investigando Learning mathematics by investigating. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, v.14, n.26, p.30-54, 2009.
- REID, D. Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v.33, n.1, p.5-29, 2002.
- SILVA, G. H. G. Atividades investigativas em um ambiente de geometria dinâmica. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v.2, n.1, p.9-29, 2012.
- SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. *Bolema*, Rio Claro, n.14, p.66-91, mar. 2000.
- SRIRAMAN, B. An Ode to Imre Lakatos: Quasi-thought experiments to bridge the Ideal and actual mathematics classrooms. *Interchange*, Dordrecht, v.37, n.1-2, p.151-178, 2006.