

Cañadas, M. C., Crisóstomo, E., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Molina, M., Peñas, M. (2007). Construcción de un cubo con papel. En FESPM (Ed.), *Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. XII JAEM* (pp. 707-712). Albacete, España: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO CON PAPEL

María C. Cañadas, Edson Crisóstomo, Sandra Gallardo, Manuel J. Martínez-Santaolalla, Marta Molina y María Peñas¹ (Grupo PI²)

RESUMEN

En este trabajo presentamos la papiroflexia modular como metodología para el estudio de un poliedro concreto: el cubo. Se presenta una propuesta de actividad para llevar a cabo con los estudiantes así como un análisis de los conceptos implicados en el proceso (paralelismo, simetría, medida,...). Finalmente se presentan algunas reflexiones didácticas.

INTRODUCCIÓN

La Geometría es, tal vez, la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Sin embargo, en nuestra experiencia docente, tenemos la percepción de que en la enseñanza de las matemáticas sigue sin atribuírsele la importancia que le corresponde, fundamentalmente en sus aspectos sintéticos o visuales. En ocasiones, la Geometría se olvida al final de un temario, se trabaja casi exclusivamente desde un punto de vista analítico y se valoran únicamente sus facetas pedagógicas.

Uno de los motivos de esta falta de interés por la Geometría en las aulas de Secundaria puede deberse a un conocimiento incompleto u olvidado de este campo por parte del profesorado, atrapado en las tentadoras redes de la Aritmética y el Álgebra. Sin restarle importancia a otras ramas de la Matemática Escolar, centraremos nuestra atención en esta comunicación en la Geometría.

La relevancia de la Geometría queda recogida en el currículum actual del sistema educativo español. En cada uno de los cuatro cursos de los que se compone la Educación Secundaria Obligatoria aparece un bloque temático dedicado a esta rama de la matemática (Real Decreto 831/2003). La Geometría que aparece en el primer curso se centra en el plano, aumentando el nivel de dificultad y abstracción según se avanza hacia cursos superiores. En segundo y tercero se trabaja la Geometría en el espacio, introduciendo las descripciones y las propiedades que la caracterizan, así como el estudio de los poliedros regulares en el tercer curso.

La disponibilidad de materiales didácticos adecuados puede suponer un incentivo suficientemente atractivo como para rescatar de su confinamiento a la Geometría. Tal y como pone de manifiesto Alsina et al (1988) existen numerosos materiales didácticos para el trabajo con la geometría. En este trabajo, nos hemos centrado en el papel como material didáctico manipulativo. Este tipo de material proporciona una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar ya que la manipulación “constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático” (Segovia y Rico, 2001, p. 86). El papel además es un material cercano a los estudiantes y fácil de conseguir en cualquier centro educativo.

El arte de hacer figuras de papel se conoce como papiroflexia (Royo, 2003). El objetivo de muchos aficionados a la papiroflexia es diseñar nuevas figuras. Nuestro objetivo en cambio es

¹ Los nombres de los autores han sido ordenados alfabéticamente.

² El Grupo PI está formado por estudiantes de doctorado de Didáctica de la Matemática impartido por el departamento homónimo de la Universidad de Granada. Nuestra procedencia e intereses investigadores son muy variados, pero nos une una profunda preocupación por el desarrollo de la Educación Matemática. Actualmente estamos trabajando (no exclusivamente en ello) en el uso de materiales didácticos aplicados a la enseñanza de la Geometría.

acercar a los estudiantes a nuevos conceptos geométricos y/o repasar los ya conocidos a través de la construcción de una figura geométrica tridimensional.

Hemos elegido el cubo por ser el poliedro regular más sencillo de construir mediante papiroflexia, además de ser el más cercano a los estudiantes.

PAPIROFLEXIA MODULAR

La papiroflexia modular es la modalidad de papiroflexia consistente en hacer figuras utilizando varios trozos de papel que dan lugar a piezas individuales denominadas módulos. Estas piezas poseen solapas y “bolsillos” que permiten ensamblarlas entre sí dando lugar a la construcción de una gran diversidad de figuras geométricas entre las que destacan los poliedros. Estas construcciones son de gran utilidad en la enseñanza de las matemáticas al permitirnos la representación física y la manipulación de figuras geométricas y servir de apoyo para el estudio de sus propiedades, las cuales intervienen de forma decisiva en la construcción y diseño de los módulos (Royo, 2003).

Royo (2003) realiza la siguiente clasificación de los poliedros obtenidos por esta técnica atendiendo a la parte del poliedro que constituyen los módulos:

- **Módulos basados en las aristas.**

Cada módulo corresponde a una arista, dando lugar, en la mayoría de los casos, a poliedros con caras perforadas, que nos permiten ver el interior. Suelen ser los de ensamblajes más sólidos.

- **Módulos basados en las caras.**

Cada módulo corresponde a una cara. Los acoplamientos suelen ser más débiles debido a que las caras se juntan entre sí de dos en dos, mientras que las aristas se juntan de más en más en cada vértice.

- **Módulos basados en los vértices.**

Cada módulo da lugar a un vértice. Los más importantes son de tipo giroscopio. Estos módulos pueden clasificarse a su vez según el grado del vértice que constituyen.

Además, existen diferentes formas de construir cada tipo de módulo aunque esto no es de interés para la propuesta que se presenta en este trabajo.

CONSTRUCCIÓN DEL CUBO MEDIANTE LA PAPIROFLEXIA MODULAR

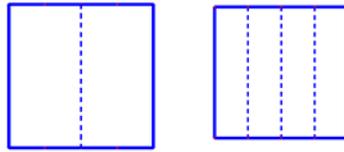
A continuación presentamos dos tareas a modo de propuesta para los alumnos de secundaria para construir el cubo mediante la papiroflexia modular. En este trabajo se parte de la construcción de un módulo basado en las caras, uno de los más simples. Existen módulos más complicados cuya complejidad suele radicar en el intento de conseguir módulos más consistentes y que permitan un mejor ensamblaje y la construcción de un mayor número de figuras. Sin embargo, hemos seleccionado este módulo porque, siendo un módulo que permite construir un cubo consistente, no implica dificultades derivadas de la manipulación del papel permitiendo prestar mayor atención al contenido matemático involucrado.

En la construcción del módulo hacemos uso de conceptos de geometría plana con papel (paralelas, mediatrices,...) los cuales ya han sido tratados anteriormente en otros trabajos publicados (Grupo PI, 2002, 2004). Estos trabajos nos permiten valorar la construcción del módulo que a continuación explicitamos como adecuada a nuestros fines.

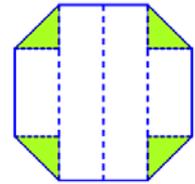
Tarea 1: Construcción del módulo.

1. Comenzamos tomando un folio A4. ¿Qué propiedades tiene este folio visto como un rectángulo?
2. Construyamos un cuadrado con el A4. Una vez construido el cuadrado traza sus diagonales y calcula sus medidas en función de la del lado del cuadrado.

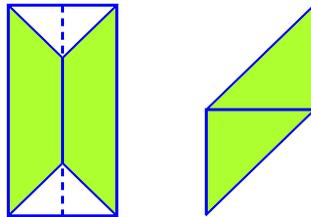
3. Doblamos el cuadrado en dos mitades iguales por una paralela a uno de sus lados. Volvemos a doblar los rectángulos resultantes por paralelas a la anterior. ¿Qué elementos matemáticos estamos utilizando?



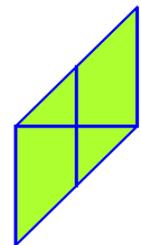
4. Desdoblamos y observamos que el cuadrado se queda dividido en cuatro rectángulos iguales. Tomamos todas las esquinas y las doblamos hasta el punto de intersección de la paralela más próxima con la diagonal. ¿Qué figura resulta? ¿Cuál es el área de la figura resultante en relación al lado del cuadrado?



5. De las cuatro partes en que quedó dividido el cuadrado doblamos las dos partes exteriores ocultando así los dobleces de las esquinas. A continuación doblamos dos de esquinas opuestas de la figura resultante hasta el borde de la figura. ¿Qué ángulos aparecen?

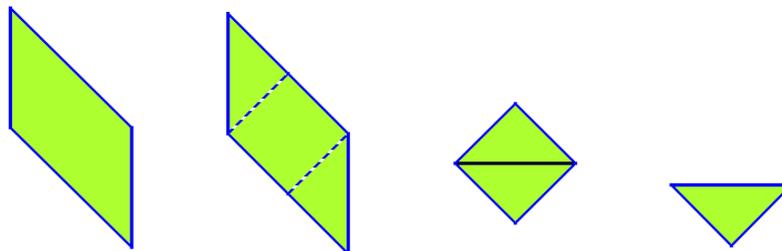


6. Introducimos las esquinas hacia el interior. ¿Qué figura obtenemos? ¿Cuáles son sus medidas y su área en función del lado del cuadrado inicial? ¿Tiene ejes de simetría?



7. Recordamos que un módulo tiene que tener unas solapas y unos bolsillos. ¿Cuál podría ser la solapa y cuáles los bolsillos de este módulo? ¿Qué parte del módulo crees que configurará la cara del cubo?

8. Dobra el módulo en dos triángulos y un cuadrado. ¿Qué área tiene el cuadrado resultante en función del lado del cuadrado inicial? ¿Qué proporción guarda con el área del cuadrado inicial del paso 2?



Tarea 2: Construcción del cubo.

1. Para construir el cubo, ¿Cuántos módulos necesitarías? ¿Qué tipo de módulo son (ver introducción)?
2. Construimos el cubo introduciendo las solapas en los bolsillos y juntando tantos módulos como sean necesarios. Estudiemos la figura resultante:
 - a. ¿Cuántos lados y vértices tiene? ¿Cuál es el grado de estos vértices?

- b. ¿Cuál es su área lateral?
 - c. ¿Cuál es su volumen?
 - d. ¿Cuánto mide su diagonal?
 - e. ¿Tiene ejes de simetría? Si los tiene di cuales son.
 - f. ¿Qué ángulos se distinguen en esta figura?
3. ¿Qué ocurriría si hiciésemos los módulos de distintos colores? ¿Podría cambiar la simetría de la figura?
 4. Con los módulos construidos, ¿podrían construirse otras figuras? ¿Qué figuras y cuantos módulos necesitarías para construirlas?

MATEMÁTICAS IMPLICADAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CUBO

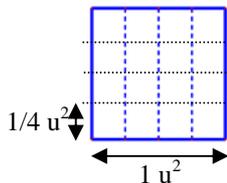
Las actividades propuestas van dirigidas a alumnos de cualquier curso de Secundaria o Bachillerato a partir de 2º de E.S.O., pudiéndose añadir o suprimir algunas cuestiones o los dibujos que las acompañan. Es precisamente en este curso, 2º ESO, donde se introduce la geometría tridimensional (Real Decreto 831/2003).

Las actividades presentadas favorecen la manipulación y acercamiento a elementos geométricos mediante situaciones de exploración, análisis, identificación, construcción y descripción. A lo largo de la construcción del módulo el alumno reconoce los elementos del cuadrado, aplica conceptos geométricos como el paralelismo y la intersección de rectas, relaciona y obtiene figuras geométricas mediante descomposición de unas en otras, utiliza el Teorema de Pitágoras para la medición de lados, aplica la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo para la medición de distintos tipos de ángulos y establece relaciones de proporcionalidad entre las medidas de los distintos lados y superficies.

Nos detenemos a continuación en esta actividad porque creemos que es una de las más interesantes para realizar con los alumnos, al involucrar el cálculo de la superficie de una figura con posibles particiones de la misma a la vez que nos permite trabajar ampliamente la idea de fracción como Parte-Todo (Llinares y Sánchez, 1988).

Una posible solución de la Medida del Módulo:

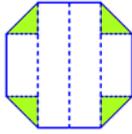
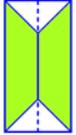
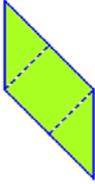
Si inicialmente consideramos el cuadrado de lado 1 unidad resulta que al hacer el paso 3, tenemos:



Considerando la siguiente división análoga, nuestro cuadrado inicial de área $1 u^2$ está formado por 16 cuadrados de $1/16 u^2$. A partir de este momento podríamos seguir trabajando con fracciones (si este es nuestro interés con los alumnos) o bien podríamos realizar un pequeño cambio de escala (1: 4) de manera que cada uno de los 16 cuadrados que conforman el cuadrado inicial tenga de lado 1 u (en vez de $1/4 u$) y por tanto de área $1 u^2$ (en vez de $1/16 u^2$).

Si realizamos, obtenemos la siguiente tabla:

Dibujo	Figura	Área a escala	Área inicial
	Cuadrado Grande	$16 u^2$	$1 u^2$
	Cuadrado Pequeño	$1 u^2$	$1/16 u^2$

	Octógono no regular	$14 u^2$	$14/16 u^2 = 7/8 u^2$
	Rectángulo	$8 u^2$	$8/16 u^2 = 1/2 u^2$
	Trapezio	$3 u^2$	$3 / 16 u^2$
	Triángulo Isósceles	$1 u^2$	$1 / 16 u^2$
	Triángulo Rectángulo	$1 u^2$	$1 / 16 u^2$
	Cuadrado Final	$4 u^2$	$1 / 4 u^2$

Se observa que utilizando únicamente las fórmulas para hallar las áreas del cuadrado y del triángulo, hallamos todas las áreas del módulo. Se puede completar así la actividad, dando la relación entre el área del cuadrado inicial y el área del cuadrado final (si el primero mide $1 u^2$ el final mide $1/4 u^2$).

Por último, la actividad de la construcción del cubo permite explorar las principales características de este poliedro abordando aspectos sencillos como el número de lados, vértices y grado de estos, y otros más complejos como la medida de su área y su volumen, la simetría de la figura y las relaciones de proporcionalidad que existen entre las medidas de este cuerpo geométrico y el cuadrado inicial del que procede cada módulo.

REFLEXIÓN FINAL Y CONCLUSIONES

Este trabajo permite vislumbrar el potencial del uso del papel como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría, aportando una actividad de gran riqueza para el aprendizaje y afianzamiento de variados conceptos matemáticos, en su mayoría geométricos. Como hemos ilustrado, el uso del papel permite la manipulación de representaciones y el análisis de objetos geométricos que son representados, Además, permite un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio mediante procesos de construcción lógicos, eficientes y económicos. Nuestro objetivo con esta propuesta es sugerir una forma de hacer más amenas algunas tareas matemáticas – principalmente geométricas- y hacer más significativos los procesos de enseñanza para el profesor y de conceptualización para los alumnos. De este modo se pretende favorecer la comprensión y el acercamiento de los alumnos a la geometría escolar.

Además el estudio de la medida del módulo y del poliedro permite al profesor trabajar las fracciones (cálculo de longitudes y áreas) y los números irracionales (cálculo de diagonales mediante Teorema de Pitágoras).

La metodología que se ha seguido para trabajar los conceptos involucrados en esta construcción con papiroflexia puede utilizarse para otras construcciones. En este sentido, podremos profundizar en los conceptos y hacer más propuestas de actividades sobre la misma figura conforme avancemos en el nivel educativo.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuni, J. M. (1988) Materiales para construir la Geometría. Madrid, Editorial Síntesis.

Boletín Oficial del Estado, núm. 158. Real Decreto 831/2003

Grupo PI (2003) Geometría Plana con Papel. Finalista en el Concurso Física + Matemáticas en acción.

Grupo PI (2004) Taller de Geometría plana con papel. X CEAM Thales. Huelva

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988) Fracciones. La relación Parte-Todo. Madrid: Editorial Síntesis

Royo, J.I. (2003). Matemáticas y Papiroflexia. Sigma, nº 21

Segovia, I. y Rico, L. (2001) *Unidades didácticas. Organizadores*. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.