Proposta de estudo de função mediada pelo GeoGebra

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Hércules Nascimento Silva

RESUMO

O trabalho aqui apresentado é resultado de uma pesquisa de Mestrado e teve como objetivo verificar se construções dinâmicas no GeoGebra, aplicadas em uma sequência de atividades facilitam a aprendizagem de função. Construções presentes no *Imagiciel*, um ambiente computacional de pesquisadores franceses, foram reconstruídas no GeoGebra e organizadas em uma sequência de atividades inspiradas na dialética ferramenta-objeto e aplicadas a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Como metodologia, foram utilizados elementos da Engenharia Didática. Pela análise das respostas, pela interação entre os alunos e com as construções elaboradas no GeoGebra, em forma de *applet's*, verificou-se que as atividades facilitaram a aprendizagem de função, em especial, o de função definida por sentenças em intervalos reais.

Palavras-chave: *Imagiciel*. GeoGebra. Função real definida por sentenças.

Proposal of study of function mediated by GeoGebra

ABSTRACT

The research presented in this document, the result of a masters research, aimed to verify that dynamic constructions in GeoGebra and applied in a sequence of activities make it possible to facilitate learning of function. Buildings present in the Imagiciel, a computational environment developed by French researchers, have been rebuilt in GeoGebra. Such reconstructions were arranged in a sequence of activities inspired by the dialectic tool-object and applied to students of the first year of high school. As research methodology Didactic engineering were used with a priori and a posteriori analysis. The analysis of the replies given by the subject of the survey, by the interaction between students and with the buildings established by the GeoGebra applet shaped's, it was found that the activities allowed students to build the concept of function, in particular the function defined for sentences in real intervals.

Keywords: Imagiciel. GeoGebra. Real function defined by sentences.

INTRODUÇÃO

Pesquisas realizadas por alguns autores como Markovits *et al*. (1994) têm considerado dificuldades relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, os autores desse trabalho pesquisaram possíveis estratégias aplicáveis em processos de ensino e aprendizagem do conceito de função que utilizassem Tecnologias

---

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar é Doutora em Lógica Matemática. Professora titular do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Av. Dr. Altino Arantes, 958 – 04042-004. São Paulo, SP. E-mail: abarcaap@pucsp.br
Hércules Nascimento Silva é Mestre em Educação Matemática. Professor do Colégio S.A.A.
E-mail: hercules.n.s@hotmail.com.br
Recebido para publicação em 12 fev. 2018. Aceito, após revisão, em 7 mar. 2018.

da Informação e Comunicação (TIC) e que contribuíssem para favorecer a superação dessas dificuldades.

Dessa forma, ao iniciarmos essa pesquisa, consideramos as situações do Imagiciel, um ambiente computacional de pesquisadores franceses, por apresentar situações diferentes das comumente presentes em alguns livros didáticos, possibilitando o trabalho de conceitos matemáticos, entre os quais a função, em especial, função real definida por sentenças.

Contudo, essas situações presentes no ambiente computacional do Imagiciel não são mais acessíveis nos computadores atuais, mas podem ser exploradas em um ambiente de geometria dinâmica, como o GeoGebra.

Tivemos como objetivo principal nessa pesquisa responder à seguinte questão: construções dinâmicas no GeoGebra, aplicadas em uma sequência de atividades, podem facilitar a aprendizagem de função, em especial, função real definida por sentenças?

Para responder essa questão de pesquisa, organizamos uma sequência de atividades, utilizando a dialética ferramenta-objeto de Régine Douady (Douady, 1984) em construções dinâmicas elaboradas no GeoGebra e disponibilizadas na internet.

Subsidiados por elementos da Engenharia Didática, buscamos a organização, aplicação e discussão de uma sequência de atividades inspiradas em situações do Imagiciel e apresentamos as análises a priori e a posteriori de parte da sequência de atividades.

A sequência foi aplicada a um grupo de seis alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de São Paulo.

Com a sequência aplicada nessa pesquisa, foi possível uma abordagem na qual o conceito de função não foi singularizado a um conjunto de regras e algoritmos, obstáculo apresentado por Vasconcelos (2015), na medida em que as mudanças de quadro, permitidas pelos *applet's,* possibilitaram que os alunos mobilizassem conhecimentos antigos para a construção de novos conhecimentos.

ESTUDOS ACERCA DO OBJETO MATEMÁTICO FUNÇÃO

Ao considerar a Matemática como linguagem, compreendemos que o relatório do Exame Nacional do Ensino Médio [ENEM] (2002, p.12) demonstra uma das preocupações referentes ao ensino dessa disciplina, que não é apenas propiciar ao aluno a representação matemática, mas também a compreensão de textos nos quais a simbologia matemática esteja presente. Entendemos que o estudo de função vai ao encontro do desenvolvimento dessa competência, uma vez que possibilita o desenvolvimento, entre outros, da representação de ideias como a dependência entre duas variáveis utilizando os símbolos matemáticos.

Entre as habilidades, destacamos: “Em um gráfico cartesiano de variável socioeconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimos e taxas de variação”. (ENEM 2002, p.12). Com essa habilidade, consideramos a preocupação presente nos documentos oficiais, de modo que o ensino dos conhecimentos matemáticos não resulte em aprendizagens por ostentação, mas sim que os alunos possam utilizá-los para compreender e resolver problemas. O objeto matemático que possibilita o desenvolvimento da habilidade apresentada acima é a função.

O conceito de função é um dos mais importantes dentro da Matemática e aplicável a outras áreas do conhecimento, podendo desenvolver o papel de ferramenta na resolução de problemas. Contudo, em nossa experiência, constatamos que as características estruturais do conceito de função parecem não ser totalmente assimiladas pelos alunos, o que vai ao encontro do que apontam algumas pesquisas.

Ao analisarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [PCNEM], (2000), no que se refere especificamente ao conceito de função, encontramos apresentado no Tema 1- Álgebra: Números e Funções, a seguinte explicitação:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCNEM, 2000, p.118)

Dessa forma, constatamos que nos documentos oficiais que norteiam a formulação dos currículos, a importância do conceito de função está relacionada ao seu potencial de articular os conteúdos de matemática e sua utilidade para outras ciências.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações diversas e problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (ENEM, 1998, p.43)

Em seu trabalho, Oliveira (1996) realizou um diagnóstico que indicou as dificuldades de alunos ingressantes no Ensino Superior, em relação "ao conceito de função, bem como o reconhecimento de uma função linear, constante, quadrática, modular, exponencial, seno, coseno" (Oliveira. 1996, p.62).

Observação semelhante é levantada por Markovits *et al.* (1994), ao apontar que a dificuldade dos alunos com o conceito de função, em parte, deriva da complexidade do próprio conceito em si; "Notemos que a definição de função, tal como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos: domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência..." (Markovits *et al.,* 1994 p.59). Eles apontam ainda para a necessidade de se ter clareza da compreensão, por parte dos alunos, desses conceitos antes de se continuar a ensinar mais elementos sobre função.

> Os alunos muitas vezes têm dificuldades com os termos pré-imagem, imagem, par (pré-imagem, imagem), domínio, contradomínio e o conjunto imagem. Isso leva a outras dificuldades, como localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas, identificar imagens e pares (pré-imagem, imagem) para funções dadas na forma algébrica, distinguir entre conjunto imagem e contradomínio e ignorar o domínio e o contradomínio da função. (Markovits *et al.,* 1994 p.55)

Ponderamos, no entanto, que os principais elementos e significados para a compreensão do conceito de função sejam a noção de relação, de dependência, de variáveis, de movimento/transformação, domínio, contradomínio e imagem.

Markovits *et al.* (1995) apontam algumas estratégias que podem auxiliar os estudantes em suas dificuldades e favorecer a aprendizagem do conceito de função:

> Temos evidências de que foi mais fácil para os alunos lidar com funções dadas na forma gráfica do que na forma algébrica. Não é difícil encontrar as razões disso. A representação gráfica é mais visual; o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência são dados simultaneamente; e se tem uma impressão visual do comportamento da função. Mas, em quase todos os currículos, a representação algébrica é ensinada antes da representação gráfica. Sugerimos que se trabalhe muito mais a forma gráfica nos passos iniciais do desenvolvimento do conceito de função. (Markovits *et al.,* 1995, p.60)

Contudo, em sua dissertação de mestrado, Martins (2006) aponta que das seis coleções de livros analisadas em sua pesquisa (mais adotadas na região do grande ABC), a proposta utilizada com maior frequência é a do algébrico para o gráfico. Segundo o autor, os livros analisados "propõem sentenças matemáticas que deverão ser utilizadas para se obter pontos a serem representados graficamente". A conversão contrária só foi encontrada na coleção "Praticando Matemática" (Martins 2006, p.53). Essa constatação vai de encontro com as ideias de Markovits *et al.* (1995) uma vez que nos livros analisados se privilegia a conversão da representação algébrica de uma função para a gráfica.

Nesse sentido, temos a proposta apresentada pelo Imagiciel,[1] ambiente computacional que traz situações que partem de um ponto geométrico e possibilitam a representação tabular e/ou gráfica de uma situação geométrica para se trabalhar o conceito de função.

Na sequência de atividades construída, assim como na proposta do Imagiciel, privilegiamos a passagem do quadro geométrico para o tabular, do tabular para o geométrico e, por fim, para o algébrico, estratégia pouco utilizada nos livros didáticos, como aponta Martins (2006). E, ainda, possibilitamos o trabalho simultâneo dessas diferentes representações de uma mesma função, o que não é possível sem a utilização de um ambiente computacional.

Para tanto, escolhemos utilizar o GeoGebra (Hohenwarter, 2010) por ser esse um software livre e acessível em diferentes computadores, além de possibilitar a disponibilização de construções de geometria dinâmica na Internet.

Dessa forma, investigamos uma possível estratégia que auxiliasse os estudantes nas suas dificuldades e que favorecesse a aprendizagem do conceito de função real definida por sentenças, de modo a possibilitar que os alunos desenvolvessem as competências e habilidades relacionadas ao objeto matemático função e, eles mesmos, pudessem utilizá-lo na resolução de problemas.

Tomando ciência dos obstáculos de ensino e aprendizagem relacionados ao conceito de função, apontados por Vasconcelos (2015), entre os quais: o prejuízo de reduzir o conceito de função a alguns de seus significados, a valorização excessiva da representação algébrica em detrimento da representação gráfica, formalização precoce do conceito de função, abordagens do conceito de função que o singularize a um conjunto de regras e algoritmos que não tenham significado para aqueles que o executam e o tratamento que não possibilite a construção do significado do conjunto domínio, contradomínio e imagem de uma função, procuramos organizar as atividades e construções adaptadas do caderno e do ambiente computacional do Imagiciel em uma sequência, de modo a potencialmente minimizar esses obstáculos.

Organizamos a nossa sequência de atividades com o objetivo de que ela fosse utilizada como elemento de introdução ao estudo do conceito de função e que possibilitasse ao aluno a construção do conceito de função real definida por sentenças. Para essa organização, nos basearemos ainda na dialética ferramenta-objeto de Douady (1984).

Entre os elementos a serem institucionalizados estão: o conceito de variável dependente, variável independente, conjunto domínio, conjunto imagem, o conceito de função, os diferentes tipos de representação de uma mesma função, função definida em um intervalo real e função definida por sentenças em intervalos reais.

[1] Ambiente computacional desenvolvido por pesquisadores franceses na década de 1980 no ambiente DOS, voltado para o ensino de temas da Matemática, acompanhado por cadernos de atividades.

Com relação ao objeto matemático função, compreendemos, como aponta Zuffi (2016), ao considerar as ideias de Sierpinska (1992), que "uma função não se concebe nem como lei, nem como valor, na definição atual, mas como síntese desses dois aspectos, juntamente com os conceitos de domínio e contradomínio" (Zuffi, 2016, p.8).

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

A dialética ferramenta-objeto foi o aporte teórico desta pesquisa e os procedimentos metodológicos tiveram como orientação aspectos de uma engenharia didática.

Podemos considerar a dialética ferramenta-objeto, idealizada por Douady (1984), como um mecanismo que nos fornece diretrizes para o desenvolvimento de atividades com os alunos, objetivando a construção de novos conhecimentos. Essa dialética constitui-se de processos cíclicos, nos quais os conhecimentos antigos dos alunos são utilizados como ferramentas que servirão como base para desenvolver novos conhecimentos. Esses novos conhecimentos são denominados por Douady de objeto, que uma vez consolidados, exercerão o papel de ferramenta em novas situações.

Douady considera que um conceito matemático se estrutura como ferramenta à medida que for aplicado na solução de um problema ou abstração de um novo conceito. Não seria o conceito isolado em si, mas todo o campo conceitual que o envolve.

Nessa pesquisa pretendeu-se provocar nos alunos a mobilização como ferramentas, conceitos, entre os quais: coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, semelhanças de triângulos, operações com frações, leitura de uma tabela, cálculo de medidas de figuras planas (triângulo retângulo, trapézio, quadrado e retângulo) e módulo de um número real. Os novos conhecimentos que foram sendo construídos pelos alunos, ao desenvolverem uma atividade, foram utilizados nas atividades seguintes como ferramenta na construção de novos conhecimentos.

Cada um dos conceitos utilizados é constituído por um campo conceitual, cujo estudo deve levar os alunos a mobilizarem como ferramentas, para a construção do objeto: o conceito de função e, em especial, função real definida por sentenças em intervalos reais.

Segundo Douady, um objeto é um saber científico reconhecido socialmente pela comunidade científica em dado momento. O conceito de função definida por sentenças, além de ser um objeto importante dentro da Matemática para a compreensão de conceitos em diversas áreas, é também uma ferramenta para a solução de problemas nessas mesmas áreas. Sendo assim, podemos considerar que um mesmo ente pode estruturar-se como ferramenta ou objeto dependendo da situação em que está inserido.

Percebe-se então que o aluno já dominou o conhecimento relativo a um objeto à medida que esse se torna disponível como ferramenta para a aquisição de um novo conceito, portanto, um novo objeto.

No desenvolvimento de atividades baseadas nos princípios da dialética ferramenta-objeto, conforme as ideias de Douady (1984), avaliamos a existência de sete fases, por ela descrita da seguinte forma:

Fase 1) antigo – A primeira etapa consiste em colocar em prática o uso de objetos conhecidos como instrumentos explícitos para iniciar um procedimento de resolução do problema ou, pelo menos, de uma parte do problema. Os conhecimentos antigos são objetos de saber matemático, funcionando como ferramentas nessa fase;

Fase 2) pesquisa – Na segunda etapa, o aluno encontra dificuldades para resolver completamente o problema; seja porque sua estratégia seja muito custosa (em quantidade de operações, em risco de erro, em incertezas de resultados...) ou porque essa estratégia não funciona mais. Orienta-se ao aluno que busque outras formas mais adequadas à situação. Reconhece-se ali o começo de uma fase de ação. O aluno pode começar a colocar em jogo o uso de novos conhecimentos implícitos. O que se quer dizer com o termo conhecimentos implícitos é que o pesquisador ou o professor pode reconhecer os conhecimentos novos que os alunos estejam criando. Os alunos, por sua vez, sabem que é algo novo, mas não podem explicar completamente do que se trata.

Fase 3) Explicitação – Nessa fase, é descrito pelos alunos o que obtiveram em seus trabalhos, as dificuldades e os resultados obtidos.

Fase 4) Novo Implícito – Nessa fase, pode ocorrer, pelos alunos, a formulação de determinados elementos como objetos de conhecimento matemático (conceitos, propriedades ou procedimentos), com sua condição de emprego no momento. Certas previsões sobre o que é novo podem ser validadas ou refutadas pela ação e, eventualmente, retomadas. No entanto, esse meio de controle não é sempre possível nem suficiente para resolver o problema. Nesse momento, os alunos são levados a procurar outros meios de validação de suas ideias. É necessário que a situação e o professor propiciem condições para que os alunos procurem outros meios de validação de suas ideias.

Para Douady, os problemas necessitam oferecer, pelo menos, dois domínios, de forma que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação. Esses domínios são ramos de conhecimento matemático (numérico, geométrico, algébrico, das grandezas etc.) e, por vezes, partes deles.

Fase 5) Institucionalização – Nessa fase, os conhecimentos implícitos da fase anterior são institucionalizados no grupo classe como objetos de saber matemático, isto é, definições, enunciados de teoremas, entre outros. Cabe ao professor o papel de decidir o momento e o modo de passagem para essa fase.

Fase 6) Reinvestimento – Nessa fase, os alunos desenvolvem exercícios para que se familiarizem com o que é novo, colocando-se em relação nada além do que é conhecido, de modo que esses conhecimentos funcionem posteriormente como antigos.

Fase 7) Novo Problema – Nessa última fase, é proposta a reutilização dos novos conhecimentos em tarefas mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, iniciando-se assim um novo ciclo.

Nesta pesquisa, nos dedicamos a reconstruir cada situação proposta no ambiente computacional Imagiciel, relacionada ao tema função, com a utilização do GeoGebra.

Destacamos que o Imagiciel é formado por um conjunto de situações educacionais que foram desenvolvidas por pesquisadores do *Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathemátiques,* [CREEM] (1992) (Centro de Pesquisa e Experimentação para o Ensino da Matemática) da França, em parceria com o Ministério Nacional de Educação e Cultura Francês. Essas situações abordam temas de funções numéricas, probabilidade e geometria plana e espacial, elaboradas entre o final da década de 1980 e início dos anos de 1990. Como atualmente não é mais acessível à maioria dos computadores, reconstruímos as atividades em um ambiente com mais recursos tecnológicos e mais acessível, no caso, o GeoGebra.

Para a reconstrução dessas situações, utilizamos como material de apoio o caderno número 1 "Activité Mathématiques avec Imagiciels premières et terminales – Fonctions Numériques" (Atividades Matemáticas – com Imagiciel – anos iniciais e finais – Funções Numéricas).

A sequência se inicia com o objetivo de trabalhar a dependência e o relacionamento entre variáveis em um intervalo real e termina com o trabalho com funções definidas por sentenças em intervalos reais, levando em consideração situações que privilegiem mudanças de quadros. Dessa maneira, procurou-se analisar em que medida foi proporcionado aos alunos uma compreensão do conceito de função e, em especial, função real definida por sentenças em intervalos reais.

Apresentamos na Tabela 1, de forma resumida, as ferramentas, segundo a dialética ferramenta-objeto, utilizadas pelos alunos como conhecimentos antigos, e os conhecimentos novos que foram institucionalizados pelo professor ao término de cada aplicação, a fim de assumirem o status de objeto, seguindo os pressupostos da teoria de Douady.

Tabela 1. *Organização da sequência segundo a dialética ferramenta-objeto.*

Atividade 1– triângulo em um quadrado.	**Ferramentas**: par ordenado, plano cartesiano, cálculo da área de triângulos retângulos e trapézios, leitura de tabela numérica, leitura de gráfico, operações com polinômios, operações com frações e intervalos reais.	**Objeto**: Função polinomial do segundo grau definida em um intervalo real.
Atividade 2 – caminho em um triângulo.	**Ferramentas**: par ordenado, leitura de tabela numérica e gráfico, semelhança de triângulos, operações com polinômios, módulo e função definida em um intervalo real.	**Objeto**: Função polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais.
Atividade 3 – caminho em um triângulo 2.	**Ferramentas**: par ordenado, leitura de tabela numérica e gráfico, semelhança de triângulos, operações com polinômios, módulo e função definida em um intervalo real.	**Objeto**: Função polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais.

Atividade 4 – quadrados coloridos.	**Ferramentas**: Função polinomial do primeiro e segundo grau definida por sentenças em intervalos reais.	**Objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau em intervalos reais.
Atividade 5 – quadrados coloridos 2.	**Ferramentas**: Função polinomial do primeiro e segundo grau definida por sentenças em intervalos reais.	**Objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau em intervalos reais.
Atividade 6 – quadrados coloridos 3.	**Ferramentas**: Função polinomial do segundo grau definida em intervalos reais.	**Objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do segundo grau em intervalos reais.

Na Tabela 1, resumimos os principais conhecimentos antigos que exerceram o papel de ferramenta na construção de novos conhecimentos. Esses novos conhecimentos, potencialmente construídos com a execução de uma atividade, exerceram o papel de conhecimentos antigos e foram utilizados como ferramentas para a construção de outros novos conhecimentos na atividade seguinte, de forma cíclica.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O desenvolvimento da pesquisa teve como elemento norteador os princípios da Engenharia Didática, expressão utilizada na Didática da Matemática desde o início da década de 1980, que denomina "uma forma de trabalho didático equiparável com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto determinado, se baseia em conhecimentos científicos de seu domínio e aceita apenas um controle do tipo científico" (Artigue, 1995, p.33).

Subsidiados por elementos da Engenharia Didática, buscamos a organização, aplicação e discussão de uma sequência de atividades que utilizasse *applet's* com construções feitas no GeoGebra e inspiradas em situações do Imagiciel.

A organização desse trabalho compreendeu quatro fases: estudos preliminares; organização das atividades da sequência e análise a priori; aplicação e análise a posteriori.

Os estudos preliminares nos auxiliaram na organização das atividades da sequência, por meio de conhecimentos didáticos adquiridos na área de estudos e das análises que compreenderam os obstáculos relacionados aos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, o estudo de pesquisa que analisou alguns livros e orientações curriculares quanto aos objetivos de se trabalhar o conceito de função na educação básica.

As análises a priori, sob os pontos de vista matemáticos e didáticos, determinaram as escolhas feitas e permitiram controlar o comportamento de cada situação que envolvia o problema da atividade, bem como predizer procedimentos possíveis durante a realização do trabalho.

O grupo foi composto por seis alunos do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio particular da Zona Norte de São Paulo, eles foram divididos em duplas, sendo que cada aluno tinha acesso a um computador da sala de informática e recebeu uma ficha com as atividades. O acesso às construções elaboradas no GeoGebra era pela internet.

Na análise a posteriori, após a aplicação, analisamos os resultados obtidos com as resoluções e procedimentos dos alunos e professor, anotados nas fichas entregues aos alunos e na análise dos áudios de cada sessão.

Na comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori* tivemos como objetivo responder à questão da pesquisa.

APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 6 – QUADRADOS COLORIDOS

Nesta seção, apresentamos a atividade 6, que finalizou a sequência das atividades, e como ela foi apresentada aos sujeitos da pesquisa. Nessa atividade, pretendíamos a reutilização dos novos conhecimentos em uma atividade mais complexa, envolvendo outro conceito, o de função real definida por sentenças quadráticas. Esperávamos que os alunos pudessem mobilizar os novos conhecimentos, desenvolvidos nas atividades anteriores, para construir esse novo conhecimento.

Seja um quadrado ABCD colorido com 2 cores, conforme a representação na Janela de Visualização do GeoGebra (Figura 1). Para todo ponto Z pertencente ao segmento AD, considere o quadrado AWQZ tal que W esteja sobre o segmento AB. Chame de x a medida do segmento AZ, dada em cm e s a área da região escura colorida do quadrado AWQZ, dada em cm^2. Utilizando o controle deslizante para movimentar o ponto Z, com o auxílio da tabela e da Janela de Visualização 2, e sendo f(x) a função que para cada x associa um s, acesse o endereço e responda o que se pede.

Abra o l*ink* (https://www.geogebra.org/m/fMEsdZ63#material/PatEjPFp)

Qual o domínio de f?

Qual a imagem de f?

Qual a lei de formação de f? Descreva como você chegou a cada resposta.

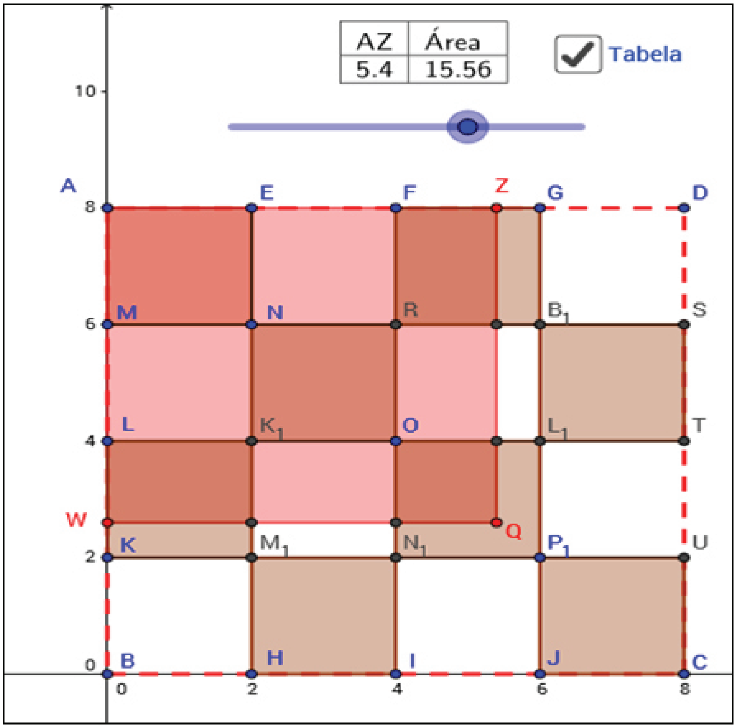


Figura 1. Quadrados coloridos.

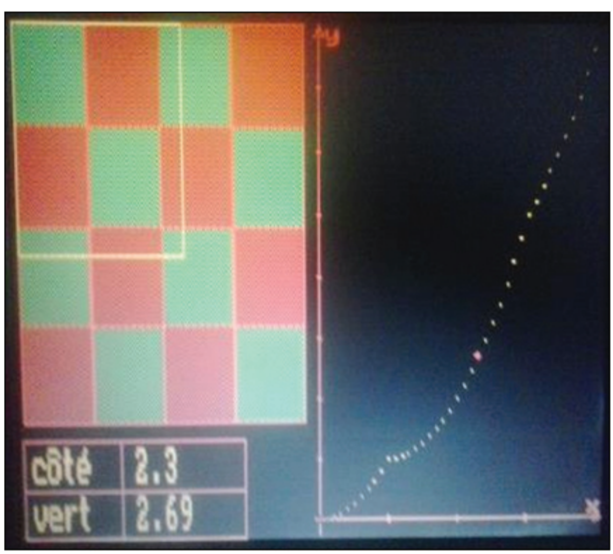


Figura 2. Construção no Imagiciel – Carrés coloriés.

Com essa atividade, após o desenvolvimento das anteriores, esperávamos levar os alunos à sétima fase da dialética ferramenta-objeto, denominada novo-problema, no qual se propõe a reutilização dos novos conhecimentos em atividades mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, iniciando-se assim um novo ciclo.

Nessa fase, os conhecimentos novos desenvolvidos nas fases anteriores, entre os quais, função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau, definida em intervalos reais, assumem o status de antigos sobre os quais vão poder se erigir os novos, como o conceito de função real definida por sentenças polinomiais do segundo grau, que foram institucionalizadas com o objetivo de que assumissem o status de objeto matemático.

Análise *a priori* e *a posteriori* da Atividade 6

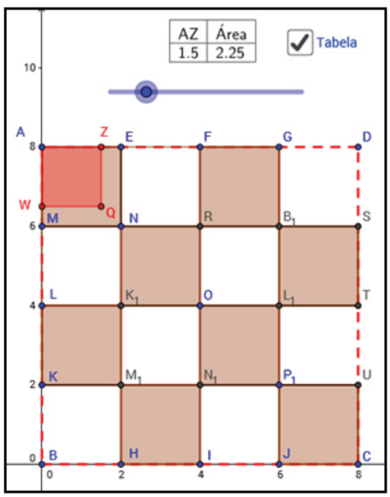


Figura 3. Quadrados coloridos 3.

Na análise a priori esperávamos que o aluno observasse que, quando movimentamos o ponto Z (com a utilização do controle deslizante) entre os pontos A e E (Figura 3), a região colorida de vermelho que fica sob o quadrado AWQZ é um quadrado de lado x. Portanto, nesse caso, $s = x^2$.

Esperávamos que o aluno percebesse que, quando era movimentado o ponto Z entre os pontos E e F com a utilização do controle deslizante (Figura 4), era obtida a área da região escura colorida do quadrado AWQZ, para isso, bastava subtrair da medida da área do quadrado AWQZ (x^2) a medida da área da região "em branco". Essa região pode ser decomposta em dois retângulos congruentes de largura, medindo (x-2) e comprimento 2 (medida do segmento AM). Lembrando que a área de um retângulo é dada pela multiplicação de sua largura e comprimento, e que cada retângulo tem medida de área igual a (2x-4). Dessa forma, nesse caso, $s = x^2 - 2(2x\text{-}4) \Leftrightarrow s = x^2 - 4x + 8$.

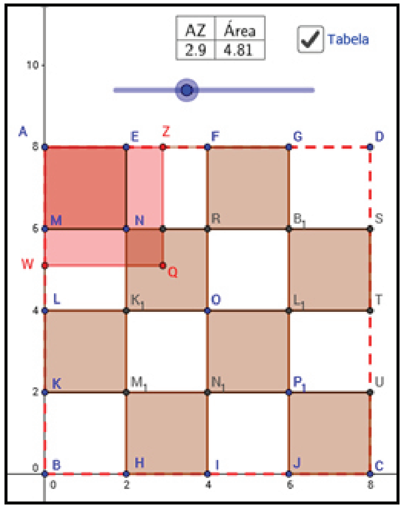


Figura 4. Quadrados coloridos 3

Quando movimentamos o ponto Z entre os pontos F e G, utilizando o controle deslizante (Figura 5), a área da região escura colorida do quadrado AWQZ pode ser obtida subtraindo-se da medida da área do quadrado AWQZ (x^2) a medida da área da região "em branco". Esta região pode ser decomposta em dois quadrados congruentes ao quadrado AMNE (de área igual a 4 cm^2) e dois retângulos congruentes de largura medindo (x – 4) cm e comprimento 2 cm. Dessa forma, a medida da área da região colorida pode ser dada por x^2 - 2 (2x - 8) - 8, portanto, $s = x^2 - 4x + 8$.

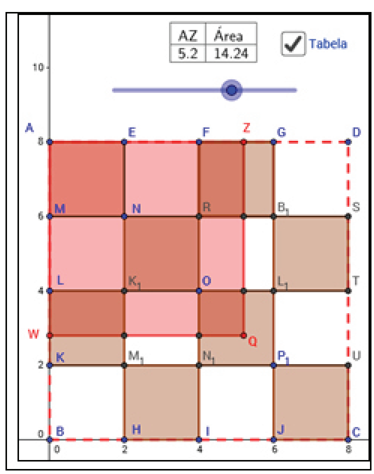


Figura 5. Quadrados coloridos 3

Esperávamos que o aluno percebesse que quando movimentos o ponto Z entre os pontos G e D (Figura 6), utilizando o controle deslizante, a área da região escura colorida do quadrado AWQZ, de lado medindo x, pode ser obtida subtraindo-se da medida da área do quadrado AWZQ (x^2) a medida da área da região "em branco". Essa região "em branco" pode ser decomposta em quatro quadrados congruentes ao quadrado AMNE, de área igual a 4 cm^2, e quatro retângulos congruentes de comprimento medindo 2 cm (medida do segmento KM_1) e largura medindo (x-6) cm (medida do segmento KW), dessa forma, a medida da área de cada um desses retângulos pode ser expressa por (2x – 12). Desta forma, a medida da região escura colorida do quadrado AWZQ pode ser expressa por $x^2 – 4(4)$ $-4(2x -12) = x^2 - 16 - 8x + 48 = x^2 - 8x + 32$ Portanto, $s = x^2 - 16 - 8x + 48 = x^2 - 8x + 32$.

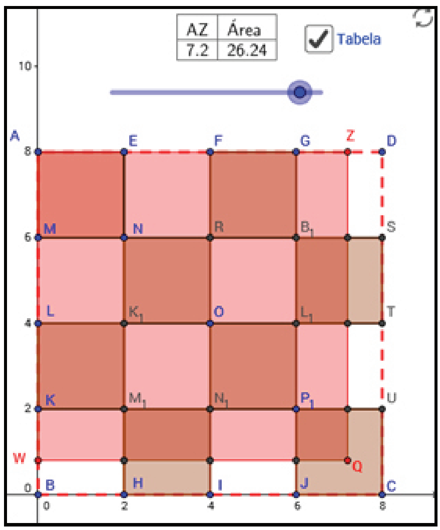
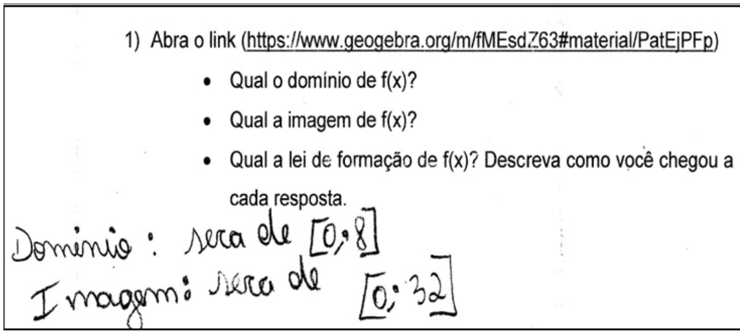


Figura 6. Quadrados coloridos 3

Dessa forma, esperávamos que o aluno concluísse que a lei de formação da função pode ser expressa algebricamente por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 8., & 2 \leq x \leq 6 \\ x^2 - 8x + 32\,, & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Nesta última atividade, como análise a posteriori, apresentamos os registros dos alunos da Dupla 1, que não tiveram dificuldades em perceber a semelhança desta atividade com as duas anteriores. Com isso, e com as discussões entre os integrantes da dupla, eles identificaram as respostas às questões propostas como apresentado nas Figuras 7 e 8 a seguir.



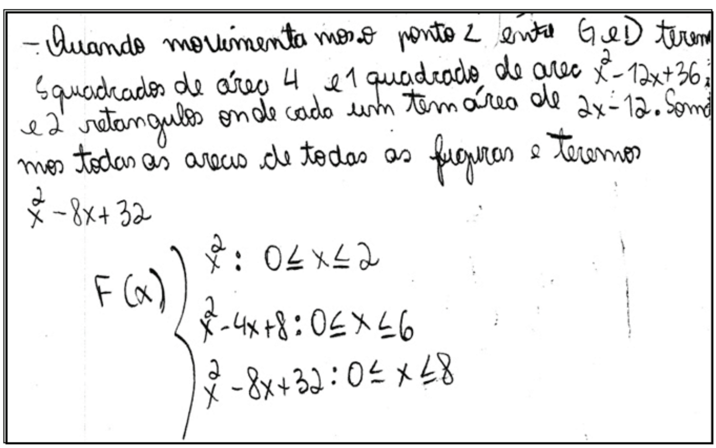
1) Abra o link (https://www.geogebra.org/m/fMEsdZ63#material/PatEjPFp)
- Qual o domínio de f(x)?
- Qual a imagem de f(x)?
- Qual a lei de formação de f(x)? Descreva como você chegou a cada resposta.

Domínio: sera de [0;8]
Imagem: sera de [0;32]

Figura 7. Resposta dada à atividade 6 pela Dupla 1.

Com as variáveis da função identificadas, eles utilizaram o gráfico da Janela de Visualização 2 e a tabela da Janela de Visualização para determinar o conjunto domínio e imagem da função, chegando ao resultado que esperávamos.

Em seguida, eles utilizaram as mesmas estratégias adotadas nas duas atividades anteriores para encontrar a lei de formação da função e chegaram ao resultado que pretendíamos. Para tanto, eles utilizaram o conceito de área de quadrado e retângulo.



- Quando movimentamos o ponto Z entre G e D temos 5 quadrados de área 4 e 1 quadrado de area $x^2-12x+36$; e 2 retangulos onde cada um tem área de $2x-12$. Somamos todas as areas de todas as figuras e teremos $x^2-8x+32$

$$F(x)\begin{cases} x^2 : 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-4x+8 : 0 \leq x \leq 6 \\ x^2-8x+32 : 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Figura 8. Resposta dada à atividade 6 pela Dupla 1.

RESULTADOS OBSERVADOS

Com a Atividade 1, observamos que os alunos perceberam a relação de dependência entre as variáveis x (medida do segmento AM) e s (medida da área do triângulo IMN). Com as interações entre os integrantes de cada dupla, a interação com os recursos do applet e as discussões entre os alunos, foi possível a percepção, por parte deles, que x e s estavam variando em intervalos reais e que s dependia de x. Ao serem solicitados pelo enunciado da tarefa, eles mobilizaram conhecimentos antigos para representar algebricamente a relação entre x e s.

Ao término da tarefa, na fase de institucionalização, após os alunos já terem devolvido as fichas, o professor questionou coletivamente aos alunos se a área do triângulo IMN mudava. Os alunos responderam que sim. O professor novamente questionou se x (medida do segmento AM) também mudava. Todos os alunos responderam que sim. O professor, com as respostas dos alunos, comentou: "então se x e s estão variando, podemos dizer que elas são variáveis, mas qual variável depende da outra?" Um dos alunos se adiantou em relação aos demais e respondeu que s dependia de x.

Com essa resposta, o professor chamou atenção para a ideia de variável dependente, no caso s, que dependia de x e que x podia ser chamada de variável independente e que havia uma relação entre essas duas variáveis.

O professor continuou o processo de institucionalização, questionando a que conjunto pertencia a variável independente. Os alunos então responderam que ao conjunto dos números reais, e um dos alunos, mais especificamente, respondeu que ao conjunto dos números reais no intervalo fechado entre 0 e 6. Com essa resposta, o professor afirmou que a esse conjunto, ao qual pertence a variável dependente, é dado o nome de domínio. O professor então procedeu de forma análoga para chamar atenção à ideia de conjunto domínio.

Após terem sido explicitadas as ideias de conjunto domínio e conjunto imagem, o professor questionou coletivamente aos alunos se, ao considerarem apenas a construção da Janela de Visualização, movimentando o ponto M, era possível descrever totalmente a relação entre as variáveis x e s, isto é, dizer se s era o dobro de x, o triplo e mais alguma coisa, ou menos algum valor ou outras situações. Os alunos responderam que, ao movimentar o ponto M e olhar a tabela, dava para ver que, conforme x mudava, s também mudava, mas não dava para saber que s era igual a metade do quadrado de x, mais quatro vezes e meio x mais 9.

Com essa resposta, o professor chamou atenção para o gráfico da Janela de Visualização 2 e questionou: "olhando esse gráfico, o que ele representa? O que são esses pontos formados quando movimentamos o ponto M?".

Um dos alunos respondeu que cada um dos pontos tinha como abscissa o valor de x e como ordenada o valor de s. O professor então chamou atenção que a relação entre x e s podia ser representada em forma de tabela, como a presente na Janela de Visualização, em forma de gráfico, como a presente na Janela de Visualização 2 ou em forma algébrica como a expressão presente ao clicarmos em um ícone da Janela de Visualização 2 (o professor apresentou esse recurso). Foi também chamada a atenção que, para cada valor de x, havia um único valor de s.

O professor finalizou a institucionalização chegando à lei de formação da função, a partir da construção geométrica da Janela de Visualização e das informações dos enunciados, conforme apresentado na análise a priori.

Ainda foi chamada a atenção para a relação dessa situação que, a cada x há um único s, era chamada de função e que essa função podia ser representada de diferentes formas, sendo que essa função específica era uma função definida em um intervalo real.

Por ser a expressão algébrica da função uma equação do segundo grau, a representação gráfica da função era um segmento de parábola e, ainda, essa função poderia receber o nome de função polinomial do segundo grau definida em um intervalo real.

No segundo dia de aplicação, ponderamos que os elementos que haviam sido institucionalizados na atividade 1, função definida em um intervalo real, variável dependente e independente, conjunto domínio e conjunto imagem e diferentes tipos de representação de uma mesma função (além de outros conhecimentos antigos) exerceram o papel de ferramenta na construção do novo conceito.

Observamos que os alunos, ao iniciarem a atividade 2, já procuraram identificar a variável dependente e a variável independente.

As interações dos alunos com os recursos do *applet* e com seus parceiros de dupla possibilitaram a percepção de dependência entre as variáveis x e L, a determinação do conjunto domínio, a determinação do conjunto imagem e de que essa função era definida por três sentenças por todas as duplas.

Uma das duplas, após discussões, mobilizou o conceito de semelhança de triângulo para tentar chegar à lei de formação da função dessa atividade. Apesar de utilizar esse conceito, verificamos que a dupla cometeu alguns erros algébricos e, ao tentar conferir onde estava o erro, acreditamos que eles desistiram e usaram "artifícios" algébricos para encontrar as respostas apresentadas pelo recurso do *applet*, disponível na Janela de Visualização 2.

Na outra dupla, o conceito de semelhança de triângulos não estava mobilizável, o que impediu de chegar à lei de formação da função. Mesmo sem conseguir chegar à lei de formação da função, essa dupla observou que essa função era formada por três sentenças distintas e que a representação gráfica era formada por duas semirretas e um segmento de reta.

Ao final da atividade, o professor institucionalizou o novo objeto matemático, função definida por sentenças em intervalos reais.

Observamos que a atividade 2 possibilitou a construção pelos alunos do conceito de função real definida por sentenças, além de possibilitar que fosse reinvestido o conceito de função, junto com as ideias de variável dependente, independente, conjunto domínio e conjunto imagem.

Com a institucionalização, a dupla, na qual o conceito de semelhança de triângulos não estava mobilizável, pôde tirar dúvidas acerca desse conceito e relembrá-lo. Com a atividade 3, observamos que houve o reinvestimento do conceito de função definida por sentenças em intervalos reais.

O professor, ao interagir com os alunos, chamou atenção para as variáveis da função dessa atividade, para o conjunto domínio e imagem da função, as diferentes formas de representá-la e o fato de que, assim como a anterior, era uma função definida por sentenças em intervalos reais e que, especificamente, essa função era polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais.

Com a aplicação da atividade 4, observamos que as ideias de variável independente, variável dependente, conjunto domínio, conjunto imagem, as diferentes formas de representação de uma mesma função e o conceito de função definida por sentenças e intervalos reais já estavam consolidadas pelos alunos, de forma que foram utilizadas, junto com outros conceitos, como ferramentas para a construção de um novo conceito: função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau em intervalos reais.

Com essa atividade, observamos que, além do reinvestimento do conceito de função, os alunos puderam mobilizar outros conhecimentos antigos, entre os quais, área de quadrados e retângulos para chegar à lei de formação da função e construir um novo conceito.

Com a interação entre os alunos, as discussões entre os integrantes de cada dupla e a interação dos alunos com os recursos do *applet,* eles perceberam que a função dessa atividade era formada por sentenças lineares e quadráticas em intervalos reais.

Os alunos apresentaram dificuldade em entender a situação da atividade, mas buscaram enfrentá-la através de discussões entre seus pares de dupla. Ao entenderem a situação, eles não tiveram dificuldade em encontrar a variável dependente, a variável independente e o conjunto domínio e imagem da função.

Após identificarem esses elementos, eles passaram a buscar estratégias para determinar a representação algébrica da função. Nesse momento, eles aplicaram os conceitos de área de quadrados e retângulos para chegar à lei de formação da função, conforme esperávamos em nossa análise a priori.

Com a institucionalização, o professor chamou atenção para as ideias de variável dependente, independente, o conjunto domínio e o conjunto imagem, os diferentes tipos de representação da função trabalhada nessa atividade e que era composta por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau, buscando conferir a esse conceito o status de objeto matemático por parte dos alunos.

Com a atividade 5, percebemos que houve um reinvestimento do conceito trabalhado na atividade anterior, de função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau.

Com a atividade 6, acreditamos ter alcançado a última fase da dialética ferramenta-objeto de Douady, na qual os novos conhecimentos construídos pelos alunos, durante a execução das atividades anteriores, foram reutilizados em uma atividade mais complexa, envolvendo a construção de um novo conceito: o de função definida por sentenças polinomiais do segundo grau definida em intervalos reais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que a dialética ferramenta-objeto se mostrou eficiente, permitindo a construção dos conceitos desejados com a utilização dos *applet's*. A sequência foi organizada para permitir a mobilização de conhecimentos antigos pelos alunos na execução das atividades propostas. Desse modo, novos conhecimentos parecem ter sido criados. A atividade 6, proposta a título de complexificação, demonstrou que os alunos desenvolveram um domínio do objeto matemático função definida por sentenças em intervalos reais, mais especificamente, função definida por sentenças polinomiais do segundo grau em intervalos reais.

Observamos que, diferente do que esperávamos, parte dos conhecimentos antigos dos alunos não estava totalmente mobilizável. Por exemplo, a Dupla 2 não conseguiu aplicar o conceito de semelhança de triângulos para chegar à representação algébrica da função trabalhada nessa atividade. Contudo, a mobilização dos conhecimentos antigos ocorreu de forma satisfatória.

Com a mudança de quadros, possibilitada pelos *applet's,* seguindo pressupostos da dialética ferramenta-objeto, ponderamos que foi construído pelos alunos uma compreensão acerca do conceito de função, que se iniciou nos aspectos mais intuitivos (ao invés de uma apresentação formal do conceito de função), como a relação, a regularidade e o movimento (trabalho com o quadro geométrico ao manipularem as construções da Janela de Visualização), e que culminaram na compreensão das formas de representação e associação de variáveis pela teoria dos conjuntos (trabalho com o quadro gráfico e algébrico).

Avaliamos que, com a sequência aplicada nessa pesquisa, foi possível uma abordagem na qual o conceito de função não foi singularizado a um conjunto de regras e algoritmos, outro obstáculo apresentado por Vasconcelos (2015), na medida em que as mudanças de quadro, permitidas pelos *applet's,* possibilitaram que os alunos mobilizassem conhecimentos antigos para a construção de novos conhecimentos e esses novos conhecimentos foram utilizados para a construção de outros novos conhecimentos.

Tais constatações foram possíveis por meio das análises das respostas apresentadas nas fichas dos alunos, pelas observações feitas nos momentos de aplicação e pela análise dos áudios das gravações das aplicações.

Novas pesquisas poderão investigar a utilização das reconstruções elaboradas no GeoGebra, não utilizadas na sequência de atividades desse trabalho, em sequências que envolvam temas diferentes aos de funções polinomiais do primeiro e do segundo grau.

Com base nas reconstruções do *Imagiciel*, poderão ser investigadas novas situações, com as características das construções originais, isto é, que partam de situações geométricas e permitam mudanças de quadros, para a abordagem, por exemplo, de funções trigonométricas, função exponencial, função modular, entre outras.

REFERÊNCIAS

Artigue, M. (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. México. pp.33-59.

Exame Nacional do Ensino Médio. (1998). *Relatório Pedagógico*. Recuperado em janeiro de 2017 de http://www.inep.gov.br/download/enem/1998.

Exame Nacional do Ensino Médio. (2002). *Relatório Pedagógico*. Recuperado em janeiro de 2017 de http://www.inep.gov.br/download/enem/2002/relatoriopedagogico2002rp20026.pdf

Exame Nacional do Ensino Médio. (2003). *Relatório Pedagógico*. Recuperado em janeiro de 2017 de http://www.inep.gov.br/download/enem/2003/

Brasil. Ministério de Educação e Culturas/Secretaria de Educação Fundamental (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.. Brasília: MEC/SEF, 58p.

Ministère de L'Education nationale et de la Culture. Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathemátiques. (1992). *Activités Mathemátiques avec Imagiciels. Fonctions Numériques*. France.

Douady, R. (1984). Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica Instrumento-objeto, juego de marcos. Cuadernos de Didáctica de las Matemáticas, *3*.

Hohenwarter, M. (2007). Geogebra Quickstart: *Guía Rápida de Referência sobre Geogebra*. Portugal. Recuperado em janeiro de 2018 de http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf

Markovits, Z., Eylon, B. S. & Bruckheimer, M. (1994). Dificuldades dos alunos com o conceito de função. *As ideias da Álgebra*. (pp.49-69). São Paulo: Atual.

Martins, L. P. (2006). *Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na construção do conceito de função*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Oliveira, N. (1996). *Conceito de função: uma abordagem do Processo de Ensino Aprendizagem*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Vasconcelos, L. O. (2015). *O conceito de função nas pesquisas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (1987-2013)*. Dissertação de Mestrado. São Carlos: UFSCAR – São Paulo, Brasil.

Zuffi, E. M. (2016). *Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função*. Revista Brasileira de História, Educação e Matemática [HIPÁTIA], *1*(1), 1-10.