Da Derivada Clássica à Derivada Fraca: um Estudo com Base na Decomposição Genética dos Conceitos

Janice Rachelli
Vanilde Bisognin

RESUMO

Neste artigo, apresentamos resultados de uma investigação realizada com estudantes brasileiros de um curso de mestrado em ensino de Matemática que objetivou analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada fraca. A teoria APOS foi utilizada na pesquisa como referencial teórico e metodológico. Para tanto, seguimos os passos da metodologia de pesquisa proposta pela teoria: Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise de dados, e utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino no desenvolvimento de atividades em sala de aula. Os dados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, nos permitiram identificar mecanismos mentais de abstração reflexionante e o desenvolvimento de estruturas mentais utilizados pelos estudantes na construção do conceito de derivada fraca. Além do mais, há evidências de que as atividades propostas facilitaram a compreensão do conceito de derivada fraca.

Palavras-chave: Derivada clássica. Derivada fraca. Teoria APOS. Decomposição genética.

From the Classical Derivative to the Weak Derivative: A Study Based on the Genetic Decomposition of Concepts

ABSTRACT

The article presents the results of an investigation conducted with some graduate Brazilian students of a master's degree course in Mathematics teaching. The objective is to analyze how the concept of weak derivative is understood. The APOS theory is used in the research as a theoretical and methodological reference. The following research methodology are used: Theoretical analysis, Planning and implementation, and Data collection and analysis. The ACE teaching cycle is used as the teaching methodology in the development of classroom activities. The data obtained through the students' records and the observations recorded in the field diary allowed the identification of mental mechanisms of reflective abstraction and the development of mental structures used by students in the construction of the concept of weak derivative. In addition, it was noticed that the proposed activities facilitated the understanding of the weak derivative concept.

Keywords: Classical derivative. Weak derivative. APOS Theory. Genetic decomposition.

Janice Rachelli é doutora em Ensino de Matemática. Atualmente é professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Endereço para correspondência: Rua Visconde de Pelotas, 2262, Bairro Fátima, Santa Maria/RS, CEP: 97015-140. E-mail: janicerachelli@gmail.com
Vanilde Bisognin é doutora em Matemática. Atualmente é professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). Endereço para correspondência: Av. Presidente Vargas, 2098, ap. 301, Bairro Fátima, Santa Maria/RS, CEP: 97015-512. E-mail: vanildebisognin@gmail.com
Recebido para publicação em 07 ago. 2018. Aceito, após revisão, em 29 ago. 2018.
DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss5id4614

INTRODUÇÃO

A derivada fraca é um conceito que foi introduzido por Serguei L. Sobolev (1908-1989), em 1936, tendo como motivação a fórmula de integração por partes. Esse conceito surgiu a partir necessidade de desenvolver uma análise matemática em que a noção de derivada seja global e que possa ser utilizada no estudo de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais.

O conceito de derivada clássica, definida pelo limite da razão incremental, é tratado em cursos de Cálculo na graduação, e sua compreensão tem sido tema de pesquisas na área de Educação Matemática. Nessas pesquisas, diversos enfoques teóricos e metodológicos vêm sendo utilizados, tendo como objetivo sanar as dificuldades observadas em sala de aula e auxiliar os alunos na construção dos conceitos matemáticos. Essas dificuldades estão associadas à formação básica (Vega, Carrillo, & Soto, 2014), em relacionar as representações analítica e gráfica da derivada (Pinto & Vianna, 2012; Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2013), além da compreensão do conceito (Bisognin & Bisognin, 2011; Vrancken & Engler, 2014) e suas diversas interpretações (Pino-Fan, Godino, & Font, 2015). A maioria desses estudos evidencia a necessidade de realização de novas pesquisas como forma de investigar estratégias e alternativas para o ensino da derivada, de maneira que o estudante possa compreender e dar sentido aos conceitos e procedimentos como forma de contribuir para a construção do conhecimento matemático. Estudos sobre o conceito de derivada fraca não foram encontrados na literatura.

Além disso, pesquisas que tratam das dificuldades inerentes aos próprios conceitos (Silva, 2011) e as que ultrapassam os primeiros tópicos do Cálculo, como as que envolvem o cálculo de várias variáveis e equações diferenciais (Rasmussen, Marrongelle, & Borba, 2014), são indicadas como fonte de questões a serem investigadas.

Nesse sentido, no presente estudo, que é parte de uma pesquisa de doutorado concluída (Rachelli, 2017), o objetivo foi analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Para isso, foi utilizada a decomposição genética dos conceitos para a elaboração de situações de ensino que possibilitam analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão desse conceito. Nesse contexto, foi considerada a evolução histórica do conceito de derivada fraca.

REFERENCIAL TEÓRICO

O modelo cognitivo APOS, desenvolvido por Ed Dubinsky e seus colaboradores, é o referencial teórico utilizado na pesquisa. Esse modelo teórico vem sendo utilizado por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos no que se refere aos conceitos matemáticos do ensino superior e analisar as construções mentais utilizadas para a compreensão dos conceitos. A denominação APOS se deve aos quatro componentes essenciais identificadas nos estudantes, quando da construção de um conceito matemático, a saber: Action, Process, Object e Schema.

A teoria APOS toma como ponto de partida as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante para descrever a construção de objetos mentais relacionados a objetos matemáticos específicos e têm como base os mecanismos mentais de interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade, que possibilitam a compreensão de um conceito matemático por meio da construção de estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema. Um esquema corresponde à totalidade de conhecimento que um indivíduo tem sobre um determinado conceito matemático. Assim, um indivíduo poderá ter, por exemplo, um esquema de gráfico, um esquema de função, um esquema de derivada. Os esquemas devem ser coordenados para formar estruturas que serão utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

De acordo com Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros e Weller (2014), a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos a partir dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas.

Na teoria APOS, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico. Geralmente, começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente.

A decomposição genética busca uma descrição detalhada de como o sujeito poderá fazer a construção do conhecimento. A partir da decomposição genética, é possível que se observe o progresso da aprendizagem do aluno, que será apresentado como um guia possível para novas atividades de forma a melhorar a compreensão do conceito. Além de descrever como um conceito pode ser construído mentalmente, a decomposição genética pode descrever os pré-requisitos necessários para a construção do conceito. Isso pode explicar as diferenças no desenvolvimento dos alunos e pode ser responsável pelas variações no seu desempenho matemático (Dubinsky, 1991).

Para cada conceito matemático, são elaboradas sequências de ensino que se organizam no que se denomina ciclo de ensino ACE composto por três componentes: (A) Atividades, (C) Discussão em classe e (E) Exercícios. Para as atividades que constituem o primeiro passo do ciclo, os estudantes trabalham cooperativamente em grupos, em tarefas projetadas para fazerem as construções mentais sugeridas pela decomposição genética. O foco dessas tarefas é promover a abstração reflexionante. Nas discussões em sala de aula, a segunda parte do ciclo, os alunos desenvolvem, discutem e refletem sobre as atividades designadas pelo professor. Como o professor guia as discussões, ele pode fornecer definições, explicações e apresentar uma visão geral do que está sendo discutido. Os exercícios, a terceira parte do ciclo, consistem em problemas considerados padrão, que servem para reforçar as atividades de sala de aula. Os exercícios ajudam no desenvolvimento contínuo das construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Eles também orientam os alunos a aplicar o que aprenderam e a considerar ideias matemáticas relacionadas.

A implementação de uma sequência de atividades fornece uma oportunidade para coletar dados. A análise dos dados, segundo Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros e Weller (2014), tem duas finalidades: medir o desempenho dos estudantes e determinar se eles fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética. Isso fornece uma oportunidade para pesquisadores testarem empiricamente a decomposição genética e avaliar a eficácia das situações de ensino.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), sendo empregada a metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros, & Weller, 2014) e composta por três componentes:

- Análise teórica – elaboração da decomposição genética do conceito matemático.
- Planejamento e implementação – elaboração de situações de ensino a serem desenvolvidas em sala de aula, baseadas na análise teórica e tendo como metodologia de ensino o ciclo de ensino ACE.
- Coleta e análise dos dados – desenvolvimento das situações de ensino e análise dos dados obtidos, como forma de determinar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito pelos estudantes.

Nesta investigação, a análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas nas situações de ensino e das anotações no diário de campo.

Os participantes desta pesquisa são cinco estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática, de uma universidade brasileira, matriculados em uma disciplina que contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais. Os estudantes, que denominaremos E1, E2, E3, E4 e E5, são licenciados em Matemática e cursaram na graduação disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais. Todos os estudantes aceitaram participar da pesquisa e, para tanto, assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido.

Para a elaboração da decomposição genética, utilizamos livros de Equações Diferenciais Parciais, nos quais o conceito de derivada fraca é introduzido, como o dos autores Figueiredo e Neves (1997) e Medeiros e Miranda (1988), e tivemos por base a decomposição genética para a derivada clássica (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 2001; García, Gavilán, & Llinares, 2012; Vega, Carrillo & Soto, 2014), levando em conta os pré-requisitos e o esquema para a compreensão do conceito.

Assim, ao iniciar os estudos, é desejável que o aluno tenha conhecimentos sobre: a diferenciabilidade de uma função; a integração por partes e o conhecimento de funções com suporte compacto.[1]

Para a construção do esquema da derivada fraca, consideramos as estruturas mentais e os mecanismos de abstração reflexionante necessários à compreensão do conceito:

AÇÃO: Ação de substituir a função e os intervalos para obter sua derivada fraca. Ação de calcular a integração por partes.

PROCESSO: Interiorização das ações descritas anteriormente e formação de um processo, que pode ser realizado mentalmente para obter, a partir do cálculo da integração por partes, a derivada fraca. Coordenação da fórmula de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo. Coordenação da definição de funções com suporte compacto. Coordenação do esquema da derivada clássica com o esquema da derivada fraca.

OBJETO: Encapsulação do processo de obter a derivada fraca w da função f a partir da equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$, em que φ é uma função infinitamente diferenciável de suporte compacto. A partir da estrutura dinâmica, o processo de calcular a integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$ por meio da integração por partes, obtém-se a definição do objeto matemático, ou seja, a derivada fraca da função. Coordenação da equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$ com a derivada fraca w de f. Generalização do esquema da função com sua derivada fraca.

ESQUEMA: Todas as ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema fazem parte da construção do esquema da derivada fraca.

Para a derivada fraca, foram elaboradas situações de ensino compostas por quatro atividades. A três primeiras tratam sobre a solução da equação da onda para pequenas vibrações de uma corda elástica por meio dos modelos de D'Alembert e do obtido via princípio de Hamilton, com ênfase nas condições sobre diferenciabilidade exigidas para a solução, e a quarta atividade trata do conceito de derivada fraca. Essas atividades foram planejadas de forma que o aluno compreenda que, no estudo de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais, surge a necessidade de desenvolver uma análise matemática em que a noção de derivada não mais seja local, ou seja, definida em um determinado ponto, mas sim, tenha uma noção global e que esta análise envolve o conceito de derivada fraca.

No que segue, apresentamos as atividades, que denominamos Atividade 1, 2, 3 e 4, com as questões propostas e uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização dessas atividades.

[1] A definição de função com suporte compacto pode ser encontrada em Medeiros & Miranda (1988).

Atividade 1 – Solução da equação da onda.

A equação da onda aparece na análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo. Estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas baseiam-se nesta equação.
A solução da equação da onda foi um dos principais problemas matemáticos de meados do século XVIII, tendo sido estudada por D'Alembert (1717-1783), Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).
Nesses estudos, foram obtidas soluções expressas de formas diferentes, e os méritos a cada uma e as relações entre elas foram discutidas em uma série de artigos durante mais de 25 anos.

Questão 1. A função $u = sen(x - ct)$ é solução da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$? Justifique.
Questão 2. D'Alembert mostrou que, se a função u é solução da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, então existem funções f e g, tais que $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$.
a) Verifique que a função u é solução da equação da onda. Justifique.
b) Que condições devem ser exigidas sobre as funções f e g para que u seja solução?

Na Atividade 1/Questão 1 e 2, o aluno deverá utilizar o esquema das derivadas parciais para mostrar que a função dada é solução da equação da onda, além de utilizar mecanismos de interiorização para estabelecer condições que são exigidas sobre a solução de D'Alembert para a equação da onda.

Atividade 2 – Fórmula de D'Alembert.

Considere o primeiro problema de Cauchy para a equação unidimensional da onda sujeita a duas condições iniciais

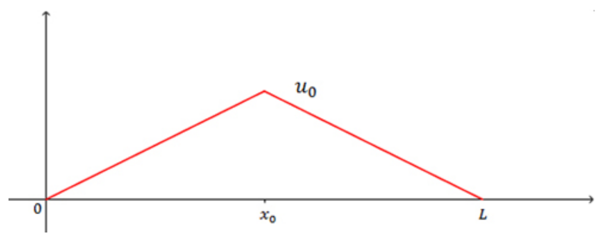
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_o(x), & 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

em que $u(x,t)$ é o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t, $u_0(x)$ é a posição inicial e $u_1(x)$ é a velocidade inicial da corda. A solução deste problema dada pela fórmula de D'Alembert é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds.$$

a) Que condições devem ser exigidas sobre as funções u_0 e u_1 para que u seja solução?

b) É válido considerar a função $u_0(x)$ para ser a posição inicial da corda no instante $t = 0$? Por quê?



c) Essa configuração inicial para u_0 representa situações físicas de fato, pois, por exemplo, como no gráfico acima, a corda foi puxada em único ponto para depois ser posta em movimento. Porém u_0 não é derivável no intervalo considerado, embora o problema de Cauchy continue a fazer sentido. Como superar estas dificuldades?

Na Atividade 2, após ser apresentada a fórmula de D'Alembert para o primeiro problema de Cauchy, é solicitado aos alunos que indiquem condições para que a função dada satisfaça a equação. Para isso, o estudante poderá interiorizar a ação de calcular as derivadas parciais para substituir na equação e encontrar as condições ou, se já tiver em mente o esquema para saber se uma função é solução de uma equação diferencial, poderá obter essas condições mentalmente. Ao apresentar um exemplo que representa situações físicas em que a função não satisfaz as condições necessárias, espera-se que os estudantes percebam que a derivada clássica não é mais aplicável à situação e, portanto, é necessário um novo conceito.

Atividade 3 – Solução via princípio de Hamilton.

Um segundo modo para resolver o problema é olhar o modelo de vibrações da corda como uma aplicação do princípio de Hamilton. Desta forma, é possível caracterizar, de modo direto, os deslocamentos de uma corda elástica por meio de uma identidade integral, a qual é considerável fonte de motivação para a definição de solução fraca de uma equação diferencial parcial. Neste caso, as funções u, que representam as vibrações da corda devem satisfazer a equação integral com condições iniciais:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^L (u_t v_t - u_x v_x)dxdt = 0, \text{para toda } v \text{ admissível} \\ u(x,0) = u_o(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em } (0,L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \text{em } (0,T) \end{cases}$$

a) Que condições devem ser exigidas para u satisfazer a equação integral?

b) Essas condições são as mesmas que as exigidas via solução de D'Alembert?

Na Atividade 3, após ser apresentado o modelo de vibrações da corda como uma aplicação do princípio de Hamilton, o estudante deve utilizar o esquema das derivadas parciais e da integrabilidade de funções para determinar as condições exigidas sobre a função u para satisfazer a equação e encapsular essas condições para compará-las com as exigidas na solução de D'Alembert.

Na Atividade 4 consta, inicialmente, a definição da derivada fraca e, após quatro questões em que os estudantes devem obter a derivada fraca de certas funções e comparar os resultados com a derivada clássica. Para tanto, é necessário que os estudantes coordenem o esquema da derivada clássica com o esquema da derivada fraca.

Nas questões 1 e 2, o estudante deve utilizar a equação integral para determinar a derivada fraca, além de concluir que existem funções que podem ser deriváveis no sentido fraco e não ser no sentido clássico e funções que possuem derivada fraca e derivada clássica.

Nas questões 3 e 4, o estudante deve desenvolver ações e processos para verificar se algumas propriedades que são válidas para a derivada clássica também são válidas para a derivada fraca. Para isso, precisa utilizar mecanismos de encapsulação dos conceitos.

Atividade 4 – A derivada fraca.

Diz-se, segundo Sobolev, que *u* possui derivada fraca, quando existe uma função $w \in L^1_{loc}((a,b))$[2] tal que

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b w\varphi dx, \forall\, \varphi \in C_0^\infty\,((a,b))^3.$$

A função *w* denomina-se derivada fraca de *u*. Quando *u* possui derivada $\frac{du}{dx}$ no sentido de Newton-Leibniz, tem-se w=$\frac{du}{dx}$.

Questão 1. Uma corda elástica de comprimento L=20 é puxada e depois colocada em movimento a partir da posição inicial u_0. Suponha que

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}(x-20), & 10 < x \leq 20 \end{cases}.$$

a) A função u_0 é derivável no sentido clássico? Por quê?

b) A função u_0 é derivável no sentido fraco? Qual é a sua derivada fraca?

c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

Questão 2. Agora, consideremos $f(x) = x^2$.

a) Esta função é derivável no sentido clássico? Qual é a derivada de f ?

b) Qual é a derivada fraca de f?

c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

d) Se uma função é derivável no sentido clássico, ela é derivável no sentido fraco? Vale a recíproca? Justifique.

Questão 3. As propriedades da derivada clássica são válidas para a derivada fraca? Será que vale a derivada $(u+v)' = u' + v'$? Justifique.

Questão 4. A derivada de uma constante no sentido clássico e no sentido fraco é a mesma?

Essas atividades foram desenvolvidas em sala de aula, perfazendo um total de 12 horas/aula, tendo o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino. Para cada um dos tópicos trabalhados, a professora pesquisadora fornecia as explicações necessárias para que os alunos percebessem como o conceito de derivada fraca foi introduzido na Matemática, além de esclarecer dúvidas e formalizar os conceitos matemáticos necessários à compreensão do conceito. As atividades foram desenvolvidas com os alunos dispostos em dois grupos, um com dois e outro com três alunos, ou ainda, no grupo como um

[2] A definição de L^1_{loc}((a,b)) pode ser encontrada em Medeiros e Miranda (1988).
[3] $C_0^\infty(a,b)$ é o espaço vetorial das funções reais continuamente indefinidamente deriváveis em (a,b), com suporte compacto em (a,b).

todo, em que eles tiveram a oportunidade de discutir e reflexionar com os colegas e a professora pesquisadora para, a partir daí, resolver os exercícios propostos nas atividades. Essa metodologia foi adotada a fim de auxiliá-los no desenvolvimento das construções mentais sugeridas pela decomposição genética.

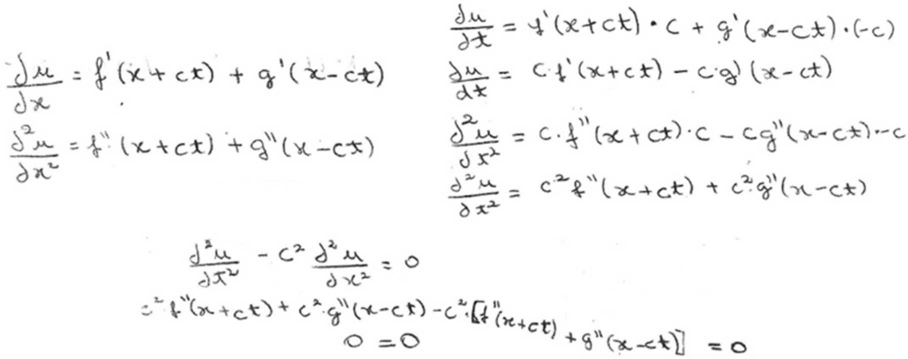
ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Apresentamos, a seguir, a análise dos dados referentes às atividades propostas. Para tanto, fizemos uma descrição de como foram desenvolvidas as aulas e como os estudantes resolveram as questões e analisamos como se deu a compreensão do conceito de derivada fraca pelos alunos e se as situações de ensino apresentadas a eles facilitaram essa compreensão. Os resultados dessa análise indicam as conclusões deste estudo, que são apresentadas em síntese no final desta seção.

Para o desenvolvimento da atividade 1, 2 e 3, foram apresentados, inicialmente, os tópicos que tratam do modelo físico para a equação da onda unidimensional; da solução de D'Alembert; da solução da equação da onda com condições iniciais (1º problema de Cauchy) e do modelo via princípio de Hamilton. O modelo matemático para as pequenas vibrações de uma corda elástica foi utilizado por ser um modelo que torna clara a necessidade de um novo conceito de derivada que seja mais adequado ao problema físico. O objetivo de trabalhar esses tópicos com os alunos foi fazer com que eles percebessem que, ao longo da história, os problemas foram sendo resolvidos, mas, na medida em que o conhecimento matemático avança, novos problemas surgem e são necessárias novas teorias para a busca de soluções mais gerais.

Na Questão 1/Atividade 1, a regra da cadeia e as derivadas das funções seno e cosseno foram utilizadas pelos alunos para determinar as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ da função $u = sen(x - ct)$ e mostrar que essa função satisfaz a equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Por meio dos registros, observamos que os estudantes coordenaram ações e processos para a obtenção das derivadas parciais de primeira ordem da função u, além de terem realizado novas ações e processos sobre $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ para a obtenção das derivadas parciais de segunda ordem. Os alunos também utilizaram o conceito de solução de uma equação diferencial parcial tendo substituído as derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ na equação da onda para verificar se a equação é satisfeita. Assim, há evidências de que os estudantes utilizaram os mecanismos de coordenação e generalização do esquema da derivada parcial no contexto das equações diferenciais parciais.

De forma análoga, na Questão 2/Atividade 1, todos os alunos obtiveram as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ da função $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ e verificaram que a solução obtida por D'Alembert satisfaz a equação da onda. Isso é mostrado na Figura 1 com a resolução do Aluno E4.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+ct) + g'(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x+ct)\cdot c + g'(x-ct)\cdot(-c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\cdot f'(x+ct) - c\cdot g'(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\cdot f''(x+ct)\cdot c - cg''(x-ct)\cdot -c$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$c^2 f''(x+ct) + c^2\cdot g''(x-ct) - c^2\cdot[f''(x+ct) + g''(x-ct)] = 0$$

$$0 = 0$$

Figura 1. Resolução da Questão 2 (a)/Atividade 1 pelo Aluno E4.

De acordo com o registro do Aluno E4, observamos que ocorreu a coordenação de ações e processos para a obtenção das derivadas parciais de primeira ordem da função *u*, por meio do cálculo, via regra da cadeia, da derivada primeira das funções f e g e a realização de novas ações e processos sobre essas derivadas para a obtenção das derivadas parciais de segunda ordem. Além do mais, observamos que todos os alunos utilizaram o conceito de solução de uma equação diferencial parcial tendo substituído as derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ na equação da onda para verificar se a equação é satisfeita.

Nas questões 1 e 2, verificamos que a maioria dos alunos utilizou o resultado 0 = 0 para concluir que as funções dadas satisfazem as equações diferenciais. Salientamos que, para provar a igualdade envolvendo duas expressões matemáticas, utilizando a linguagem correta, o aluno deveria desenvolver a expressão do lado esquerdo da igualdade e chegar à expressão do lado direito ou desenvolver as duas expressões (quando necessário) e verificar que ambas são iguais.

Sobre as condições que devem ser exigidas sobre as funções f e g para que *u* seja solução (Questão 2 (b)/Atividade 1), os alunos responderam que:

"f e g têm que ter derivada primeira e segunda" (Aluno E4);

"Deve existir as derivadas 1ª e depois as derivadas 2ª" (Aluno E1);

"f e g devem ter primeira e segunda derivada" (Aluno E2);

"Precisa existir a derivada primeira e segunda" (Aluno E3);

"Tem que derivar as funções f e g duas vezes" (Aluno E5).

As respostas dos alunos nos fornecem evidências de que eles interiorizaram as condições para a existência de solução, relacionando a existência das derivadas parciais de *u* com a exigência de que as derivadas primeira e segunda de f e g existam.

Para a Atividade 2, foi considerada a solução obtida pela fórmula de D'Alembert para o primeiro problema de Cauchy para a equação unidimensional da onda sujeita a condições iniciais sobre a posição inicial e a velocidade inicial da corda. A dedução dessa solução foi feita por meio de apresentação em *PowerPoint* e de explicações realizadas no quadro. Embora seja uma dedução bastante complexa, por envolver a substituição das condições iniciais, a resolução de um sistema com as funções f e g e suas derivadas primeiras, sendo necessário utilizar o processo de integração para obter a solução do problema, os alunos compreenderam, em parte, essa dedução. Cabe salientar que, nesse exemplo, embora seja mais complexo que as questões 1 e 2, a importância é que os alunos percebam quais são as condições exigidas sobre as funções u_0 e u_1 para que $u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds$ seja solução para o problema de Cauchy.

As derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ foram calculadas diretamente no quadro, e os alunos foram questionados sobre o que era necessário fazer para a obtenção dessas derivadas. Como a função u é composta por uma integral, foi necessário relembrar o teorema fundamental do Cálculo, para que houvesse a compreensão do cálculo das derivadas. Observa-se, aqui, a necessidade de mecanismos mentais de reversibilidade, em que, tendo a integral da função u_1 de $x - ct$ até $x + ct$, é preciso reverter o processo de integração para obter a derivada. As discussões sobre esse assunto foram feitas por meio de outros exemplos que ilustram melhor essa situação e que propiciaram aos alunos uma melhor compreensão.

A partir dos questionamentos e discussões, os alunos concluíram que, para que u seja solução, devem existir as derivadas primeira e segunda de u_0 e existir a derivada primeira de u_1. Também concluíram que é válido considerar a função u_0 para ser a posição inicial da corda, utilizando, por exemplo, a justificativa:

- "Porque é uma situação real simulável como uma corda de violão" (Aluno E1);
- "Porque é uma situação física possível, puxando a corda para cima em $x = x_0$" (Aluno E3).

Todos os alunos observaram que a função u_0 não é derivável em $x = x_0$ e que, portanto, não satisfaz as condições exigidas para que u seja solução da equação da onda, embora esteja associada a situações físicas de fato. Assim, responderam, conforme o registro dos alunos E1 e E3, que, para superar este problema, poderia:

- "Criar uma nova teoria com novos recursos matemáticos" (Aluno E3);
- "Buscar uma teoria matemática em que seja possível desenvolver este problema, pautando-se no já descoberto e procurando novos recursos matemáticos" (Aluno E2).

Essas justificativas evidenciam a compreensão que os alunos apresentaram ter sobre a evolução de conceitos matemáticos. Assim como a derivada clássica surgiu da necessidade de formalização desse conceito, o problema da corda mostra a necessidade de que novos conceitos sejam criados para que seja possível avançar no estudo. Salientamos que é importante que os alunos percebam que, para a solução de vários problemas matemáticos, há a necessidade de que novas teorias sejam criadas.

A Atividade 3 trata do modelo de vibrações da corda como uma aplicação do princípio de Hamilton. Para que houvesse compreensão, foi discutida, com os alunos, a dedução do modelo até se chegar à identidade integral. Na questão (a), os alunos responderam corretamente que as condições exigidas para que uma função seja solução da identidade integral é que u deve possuir uma derivada, referindo-se às derivadas parciais de primeira ordem e que deve existir a integral da função que envolve estas derivadas. Na questão (b), os alunos observaram que as condições exigidas na solução obtida via princípio de Hamilton não são as mesmas que as exigidas via solução de D'Alembert, justificando, conforme registro do Aluno E2, que "na de D'Alembert há necessidade de duas derivadas em u enquanto que Hamilton exige apenas uma derivada".

As apresentações, discussões e exercícios apresentados foram planejados como forma de propiciar aos alunos o entendimento sobre a evolução do conceito de derivada, bem como a construção de mecanismos mentais que favoreçam a compreensão do conceito de derivada fraca. Pelos registros dos alunos e as anotações no diário de campo, podemos concluir que os objetivos foram atingidos quase que integralmente.

Na Atividade 4 foi apresentada, inicialmente, a definição da derivada fraca, que foi amplamente discutida com os alunos. Após, foram apresentados exercícios aos estudantes para que respondessem questões sobre a derivada clássica e a derivada fraca de funções.

Os alunos mostraram curiosidade em conhecer o conceito de derivada fraca. "Até que enfim chegou o dia", foi a fala de um dos estudantes. Isso é muito positivo, pois demonstra que houve interesse dos alunos em estudar a evolução histórica dos conceitos e avançar na construção de seus conhecimentos.

Para a resolução da Questão 1, os alunos, em (a), representaram o gráfico da função u_o e observaram a existência de um ponto anguloso em $x = 10$. Concluíram, por meio da análise gráfica que u_0 não é diferenciável no sentido clássico. Em (b), os alunos utilizaram a definição corretamente para a obtenção da derivada fraca. Na Figura 2, está ilustrada a resolução feita pelo Aluno E5.

Achar o w(x) tal que

$$\int_0^{20} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{20} w(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$\int_0^{20} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{10} \underbrace{1/2\,x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv} + \int_{10}^{20} \underbrace{-1/2\,x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv}$$

$$u = \frac{1}{2}x \qquad du = \frac{1}{2}dx \qquad dv = \varphi'(x) \qquad v = \varphi(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_0^{10} - \int_0^{10}\underbrace{\varphi(x)}_{v}\cdot\underbrace{1/2\,dx}_{du} + \underbrace{-1/2\,x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_{10}^{20} - \int_{10}^{20}\underbrace{\varphi(x)}_{v}\cdot\underbrace{-1/2\,dx}_{du}$$

$$u = -\frac{1}{2}x + 10 \qquad du = -1/2\,dx \qquad dv = \varphi'(x) \qquad v = \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{2}.(10).\varphi(10) - \frac{1}{2}.\cancel{(0)}.\varphi(0) - \int_0^{10} 1/2\,\varphi(x)\,dx + \left[-\frac{1}{2}(20)+10.\varphi(20)\right] - \left[-\frac{1}{2}(10)+10.\varphi(10)\right] - \int_{10}^{20} -1/2\,\varphi(x)\,dx$$

$$= 5.\varphi(10) - \int_0^{10}\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx - 0.\cancel{\varphi(20)} - 5\varphi(10) - \int_{10}^{20} -\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{10}\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx - \int_{10}^{20} -\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 10 \\ -\frac{1}{2}, & 10 < x \le 20 \end{cases}$$

Figura 2. Resolução da Questão 1(b)/Atividade 4 pelo Aluno E5.

Observamos que, para responder a questão (b), o estudante escreveu que é preciso "Achar $w(x)$ tal que $\int_0^{20} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{20} w(x)\varphi(x)dx$" (Aluno E5), evidenciando, assim, ter clareza sobre o conceito da derivada fraca de uma função. A resolução feita pelo Aluno E5 torna evidente que ele desenvolveu as seguintes construções mentais:

- ações de substituir a função u_0 na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos [0,10] e [10,20];
- interiorização dessas ações por meio do processo de integração por partes;
- coordenação da fórmula de integração por partes e do teorema fundamental do Cálculo, considerando φ de suporte compacto no intervalo [0,20];
- encapsulação deste processo para obter o objeto matemático $w(x)$, que é a derivada fraca da função $f(x)$.

Essas construções também foram feitas pelos demais alunos.

Ao responder à questão (c), o Aluno E2 concluiu, de acordo com os dados obtidos em (a) e (b), que "No sentido clássico não é derivável, porém existe a derivada fraca da função". As respostas fornecidas pelos demais alunos são:

- "Que em 'a' no sentido clássico a função não é derivável no ponto $x = 10$, porém, pela derivada fraca, possui derivada nos intervalos" (Aluno E1).

- "Que a função não possui derivada clássica, por ser pontual, mas tem derivada fraca, por ter uma análise no intervalo" (Aluno E3).
- "A) No sentido clássico a função não é derivável no ponto 10. B) No sentido fraco a função é derivável no intervalo 0 a 20" (Aluno E4).
- "A função não é diferenciável no ponto 10 pela derivada clássica, mas pela derivada fraca no intervalo (0,20) ela é diferenciável" (Aluno E5).

Essas respostas nos fornecem evidências de que todos os estudantes foram capazes de coordenar os esquemas da derivada clássica e da derivada fraca, tornando clara a sua compreensão de que a derivada clássica é definida pontualmente e a derivada fraca é definida em um intervalo.

A Questão 2/Atividade 4 foi resolvida de modo análogo à Questão 1 pelos estudantes. Para tanto, eles utilizaram os mecanismos mentais de encapsulação e generalização para a obtenção da derivada fraca da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[a, b]$. Novamente aqui, os dados demonstram que os alunos coordenaram os diferentes esquemas: função, intervalos, integração por partes, teorema fundamental do Cálculo, função com suporte compacto, derivada clássica e derivada fraca e que foram previstos pela decomposição genética. Todos os estudantes concluíram que a função $f(x) = x^2$ possui derivada clássica e derivada fraca e ambas são iguais. Na Questão 2(d), todos os alunos concluíram que, se uma função possui derivada clássica, terá derivada fraca e que a recíproca não é verdadeira.

Na Questão 3/Atividade 4 foi indagado se é válida para a derivada fraca a propriedade da derivada da soma $(u + v)' = u' + v'$, ou seja, se é válido que a derivada da soma é a soma das derivadas. Os estudantes utilizaram a definição para obter a derivada fraca da função $f(x) = u(x) + v(x)$, que representa a soma das funções u e v. Para tanto, partiram da integral $\int_a^b [(u(x) + v(x)]\ \varphi'(x)dx$, utilizaram a técnica de integração por partes e o fato de φ ser uma função de suporte compacto em $[a, b]$, para concluir que a derivada fraca de $u(x) + v(x)$ é $w = u'(x) + v'(x)$, conforme pode ser observado na resolução do Aluno E2, mostrada na Figura 3.

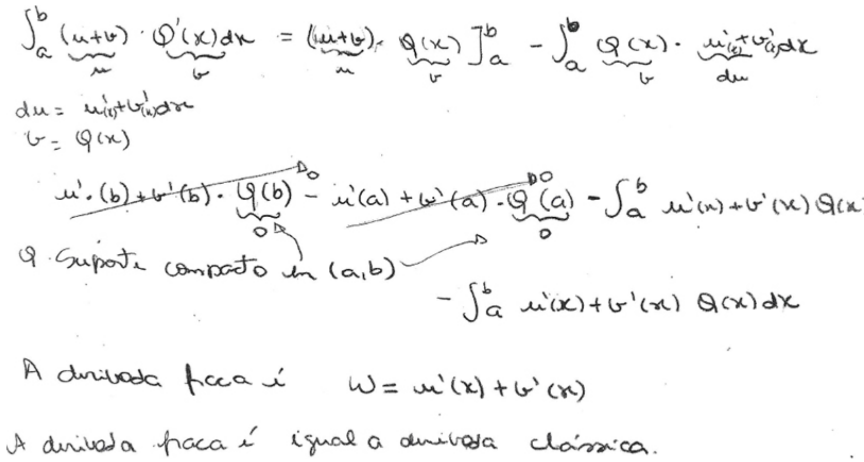


Figura 3. Resolução da Questão 3/Atividade 4 pelo Aluno E2.

Da mesma forma, na Questão 4/Atividade 4, os alunos utilizaram a equação integral para obter a derivada fraca da função constante. A resolução do Aluno E1 é mostrada na Figura 4.

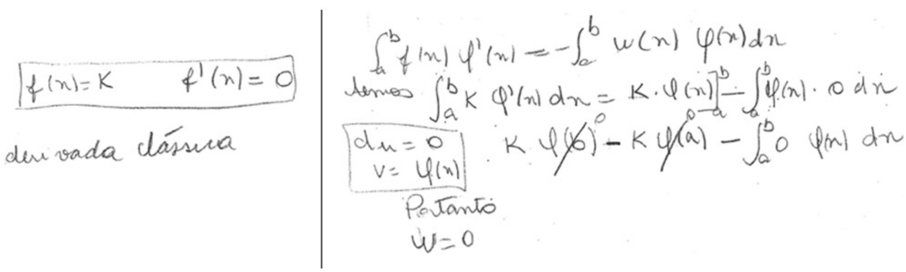


Figura 4. Resolução da Questão 4/Atividade 4 pelo Aluno E1.

Observamos que, a partir da função constante $f(x) = k$, o Aluno E1 determinou a derivada clássica $f'(x) = 0$ e utilizou a equação integral para determinar a derivada fraca $w = 0$. Todos os alunos concluíram que a derivada clássica e a derivada fraca de uma função constante são iguais a zero.

A partir dos resultados expostos, podemos constatar que os alunos coordenaram o esquema da derivada clássica com o da derivada fraca para mostrar que as propriedades da derivada da soma como sendo a soma das derivadas e que a derivada de uma constante é zero válidas para a derivada clássica, são também válidas para a derivada fraca.

Ressaltamos, porém, que alguns erros ocorreram na determinação da derivada fraca. Esses erros dizem respeito, principalmente, à inversão dos limites de integração no uso do teorema fundamental do Cálculo. No entanto, são erros que não comprometem os resultados gerais obtidos sobre a compreensão do conceito de derivada fraca.

No Quadro 1, apresentamos uma síntese geral das estruturas mentais desenvolvidas pelos estudantes nas quatro atividades referentes à passagem da derivada clássica para a derivada fraca. Para tanto, analisamos os registros de todos os alunos em cada uma dessas atividades e comparamos, por meio das respostas elaboradas, as estruturas mentais que foram desenvolvidas por eles tendo por base a decomposição genética para o conceito da derivada fraca.

Quadro 1
Análise geral das estruturas mentais desenvolvidas pelos alunos.

Atividades			**Estruturas mentais**			
			Ação	Processo	Objeto	Esquema
1 – Solução da equação da onda	Questão 1					1
	Questão 2	a)				1
		b)				1
2 – Fórmula de D'Alembert	a)					1
	b)				1	
	c)			1		
3 – Solução via princípio de Hamilton	a)				1	
	b)			1		
4 – A derivada fraca	Questão 1	a)			1	
		b)			1	
		c)				1
	Questão 2	a)			1	
		b)			1	
		c)				1
		d)				2
	Questão 3					1
	Questão 4					1

1 Desenvolvida por 100% dos alunos

2 Desenvolvida por 60 a 80% dos alunos

Nos dados do Quadro 1, podemos observar que 100% dos estudantes desenvolveram as estruturas mentais previstas em nossa decomposição genética para cada uma das questões propostos; com exceção da Questão 2 (d)/Atividade 4, em que somente um dos alunos (20% do total) não respondeu completamente à questão.

Esse resultado é, para nós, surpreendente, pois acreditávamos que, pelo fato de o conceito de derivada fraca envolver conceitos e teorias muito complexas, e os alunos estarem estudando pela primeira vez esse conceito, teriam dificuldades, o que não se confirmou. Acreditamos que as atividades propostas, que iniciaram com questões sobre soluções de equações diferenciais e modelos matemáticos para o problema de vibrações de uma corda, em que foram discutidas condições sobre as funções e a necessidade de novas teorias para a resolução desse problema, possibilitaram o desenvolvimento de mecanismos de abstração reflexionante, que propiciaram aos estudantes a compreensão do conceito de derivada fraca de uma forma bastante satisfatória. Além disso, todos os exercícios que precederam ou que foram resolvidos juntamente com os exercícios que envolveram a determinação da derivada fraca, também reforçaram a construção do esquema da derivada clássica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste artigo, resultados de parte de uma pesquisa que tratou de forma geral da evolução do conceito da derivada. Os resultados aqui obtidos referem-se à compreensão do conceito de derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Os dados que advieram dos registros dos alunos nas atividades propostas e das observações em sala de aula nos permitem afirmar que, mediante a decomposição genética dos conceitos, tendo como base a teoria APOS, foi possível a construção de mecanismos e estruturas mentais pelos alunos que possibilitaram a compreensão do conceito de derivada fraca. Salientamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, e que as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão. Nossos dados confirmam a ideia de que a construção do conhecimento é progressiva e é evidenciada na medida em que os estudantes utilizam outros esquemas, como esquemas de funções, de intervalos, da derivada clássica e de integração por partes, para a construção do esquema de derivada fraca.

REFERÊNCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1-37.

Bisognin. E. & Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), *13*(3), 509-526.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. (Org.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Figueiredo, D. G.; Neves, A. F. (1997). *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: SBM.

García, M., Gavilán, J. M., & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-236.

Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. (1988). *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Caderno Didático UFRJ.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pino-Fan, L. R., Godino J. D., & Font, V. (2015). Uma propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. *Bolema*, Rio Claro (SP), *29*(51), 60-89.

Pinto, G. M. F. & Vianna, C. C. S. (2012). Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de Cálculo semipresencial. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, Rio de Janeiro (RJ), *2*(3), 74-90.

Rachelli, J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS*. 2017. 294 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, Berlim (Alemanha), *46*, 507-515.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema*, Rio Claro (SP), *27*(45), 81-302.

Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), *13*(3), 393-413.

Vega, M. A., Carrillo, J., & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema*, Rio Claro (SP), *28*(48), 403-429.

Vrancken, S. & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, Rio Claro (SP), *28*(48), 449-468.