

QUAIS QUESTÕES A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS BUSCA RESPONDER?

Gérard Vergnaud¹

AVISO

A preocupação em deixar aos colegas brasileiros e sul-americanos um conjunto significativo do meu trabalho me levou a reunir aqui textos curtos tratando de temas relativamente diferentes. Sua unidade somente será percebida em “segundo grau”, pela sua complementaridade. Espero que esta escolha ambiciosa não decepcione muito os leitores.

INTRODUÇÃO

Não existe resposta para perguntas que não foram feitas; e algumas das questões abordadas na presente contribuição não inquietam muito a comunidade de pesquisadores. Entretanto, elas ajudam a alimentar o quadro de conhecimentos significativos fornecido por este novo campo de pesquisa que é a didática; e elas são úteis para os professores.

Eu optei por abordar quatro grandes temas, para os quais a teoria dos campos conceituais traz uma certa contribuição.

- 1 O desenvolvimento dos conhecimentos e das competências ao longo do tempo
- 2 As conceituações identificáveis na atividade em situação: conceitos e teoremas em ação
- 3 As relações entre essas conceituações em ação e os significantes linguísticos e simbólicos, possivelmente utilizados na classe
- 4 Três princípios de incerteza e o desenvolvimento da racionalidade

O DESENVOLVIMENTO DOS CONHECIMENTOS E DAS COMPETÊNCIAS AO LONGO DO TEMPO: O EXEMPLO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS

O desenvolvimento é um processo importante; mas o que é que se desenvolve? Uma variedade de formas de organização da atividade, em uma variedade de registros: gestos, competências científicas e técnicas, formas de interação com os outros, de competências de linguagem e de conversação, recursos emocionais e afetivos.

Estou interessado principalmente nas competências científicas e técnicas, mas seu desenvolvimento não independe daqueles outros registros; além disso, ele ocorre ao longo da vida toda, tanto no tempo curto de tomada de consciência quanto no tempo longo da experiência; quase sempre em uma interação ativa com situações e com o outro.

Falar sobre formas de organização da atividade é dizer mais do que falar sobre competências: são formas com as quais se pode descrever e analisar o desenvolvimento temporal e não apenas o objetivo procurado. Assim, vale a pena recordar algumas definições ordinárias da competência: elas muitas vezes evocam uma ideia de comparação, com uma perspectiva diferencial ou de desenvolvimento:

Diferencial: A é mais competente do que B se ele sabe fazer algo que B não sabe fazer

¹ Diretor emérito de pesquisa do CNRS.

Desenvolvimento: A é mais competente no tempo t' que no tempo t se ele sabe fazer aquilo que ele não sabia fazer.

Nós podemos enriquecer essas definições por ideias que evocam justamente a atividade.

A é mais competente se ele se posiciona de uma maneira melhor

A é mais competente se ele dispõe de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta em diferentes situações que possam surgir

A é mais competente se ele é menos impotente diante de uma situação nova

Mas essas definições complementares não são suficientes para caracterizar as diferenças significativas entre as formas de organização da atividade. Tomemos um exemplo simples, o da **enumeração**.

O **esquema elementar**, aquele da criança de 5 ou 6 anos que enumera os objetos em cima da mesa na sua frente, ou aquele do professor que conta as crianças presentes no ônibus para garantir que ele não se esqueceu de nenhum, após uma visita que ele organizou: dois conceitos-em-ação são suficientes para caracterizar sua atividade:

- o de **cardinal**, ou medida do conjunto enumerado, o qual é discreto.
- o de **correspondência bi-unívoca**, entre os objetos de um lado, (ou as crianças no ônibus) e os números pronunciados de outro lado (eventualmente evocados em voz alta ou em voz baixa). Testemunhas observáveis desta correspondência, os gestos efetuados para designar um a um cada um dos elementos enumerados. A regra “*contar todos e não contar duas vezes o mesmo*” resulta dessa bi-univocidade.

Os conhecimentos envolvidos na atividade da enumeração são mais ricos no próximo exemplo: durante a preparação da Copa do mundo de 1998 na França, foi realizada uma reunião dos responsáveis pela organização material dos jogos em Paris. O objetivo era identificar os estádios em condições de acolher os espectadores, esperados em grande número. Um dos participantes declara então “*eu acredito que o estádio de Nantes é grande o suficiente*”. No dia seguinte o presidente do comitê de organização telefona para o diretor do estádio de Nantes e pergunta “*Quantos lugares há em seu estádio?*” e o outro responde “*Eu não sei*”. Ele contratou então duas pessoas, durante dois dias, para contar os lugares do seu estádio.

A organização dessa atividade não pode ser reduzida ao esquema elementar visto acima e aos dois conceitos, de cardinal e de correspondência biunívoca.

Inicialmente a partilha da atividade entre as duas pessoas responsáveis pela contagem supõe o teorema da adição

$$\text{Card (A U B)} = \text{Card (A)} + \text{Card (B)}$$

Se cada um anota em um papel o resultado alcançado, então deve ser aplicado o **algoritmo da adição** e os conceitos associados com a numeração posicional: soma de unidades, depois as dezenas, eventualmente com trocas, e em seguida a soma das centenas e milhares.

Para as partes retangulares do estádio, basta multiplicar o número de lugares por linha pelo número de linhas

$$\text{Card (R X S)} = \text{Card (R)} * \text{Card (S)}$$

Para o canto angular do estádio, o problema é mais delicado; mas o mais velho dos dois, propõe ao seu colega: “*Você vai até a parte mais alta e conta a linha mais longa. Eu conto embaixo a linha mais curta; fazemos a média das duas e multiplicamos pelo número de linhas*”.

O mais jovem retruca “Você acredita que dá certo?”

Obviamente estes conhecimentos ainda não fazem parte do repertório do mais jovem.

$$S_{\text{média}} = (S_{\text{max}} + S_{\text{min}}) / 2$$

S = S média multiplicada por R

Assim, pode-se distinguir, na análise da atividade, competências de poder (potência) desigual, apesar de seu parentesco. Uma maneira interessante de diferenciar é identificar formas conceituais distintas. Graças a esta conceituação implícita, atividade e esquema permitem ir mais longe do que somente a ideia de competência, que não é muito analítica. Podemos assim dizer que o conceito de competência não é um conceito científico em si mesmo.

Definição

Um esquema é uma forma de organização da atividade, destinada a uma classe de situações. Ele inclui:

- 1 um objetivo ou vários
- 2 regras de ação; de tomada de informação e de controle
- 3 invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação
- 4 possibilidades de inferência

Essas características são próximas daquelas dos algoritmos, mas, ao contrário dos algoritmos, os esquemas não conduzem necessariamente, com um número finito de passos, a uma solução do problema proposto, se houver uma, ou para a demonstração de que não há solução.

Os algoritmos são esquemas, mas nem todos os esquemas são algoritmos

Entre as quatro propriedades que permitem analisar os esquemas, e caracterizar suas diferenças, a primeira concerne à intenção, a segunda ao desenvolvimento temporal da atividade (ações e coleta de informação), a terceira às conceituações (frequentemente implícitas, eventualmente explícitas) que organizam esse desenvolvimento, a quarta aos cálculos que tomam lugar durante o percurso (sub-objetivos e expectativas, lições obtidas).

A ideia de regra é essencial, mas não é suficiente: sem conceituação, pelo menos implícita, não há esquema. Além disso, os dois componentes mencionados aqui, o conceito e o teorema, obviamente complementares, têm um status cognitivo distinto. Os conceitos-em-ação não são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, apenas de serem pertinentes ou não. Os teoremas-em-ação são proposições e interferem no “cálculo” da atividade: são, portanto, susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos. Um teorema-em-ação falso continua sendo um teorema-em-ação.

Três problemas de níveis diferentes

Avancemos mais um passo na análise com estes três problemas, que exigem a mesma operação numérica (a adição $7 + 5$), mas que são resolvidos de modo bastante diferente.

Pedro tinha 7 bolas de gude. Ele ganhou 5. Quantas ele tem agora?

Roberto acaba de perder 5 bolas de gude; agora ele tem 7. Quantas ele tinha antes de jogar?

Thierry acabou de jogar duas partidas de bolas de gude. Ele não se lembra mais do que aconteceu na primeira partida. Na segunda partida ele ganhou 7 bolas de gude. Fazendo as contas, ele percebe que, no total, ganhou 15 bolas de gude. O que aconteceu na primeira partida?

O problema de Pedro é resolvido por quase todas as crianças de 5 ou 6 anos (no máximo 7 anos).

O problema de Roberto é resolvido com um deslocamento de um ano ou dois.

Para o problema de Thierry a maioria dos alunos no final da escola elementar (10 ou 11 anos) fracassa.

Como isso é possível?

O problema de Pedro corresponde a uma das duas classes de situações que dão à adição seu primeiro sentido: *o aumento conhecido de um estado inicial conhecido*.

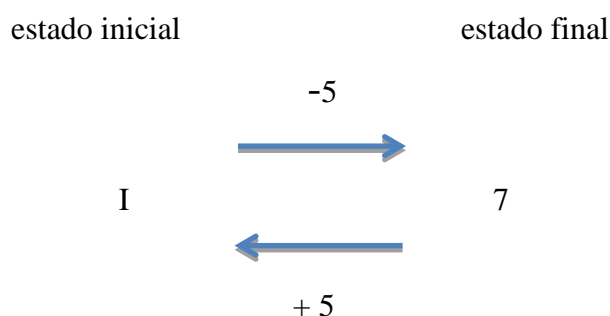
Outra classe de situações desempenha um papel prototípico também: *a reunião de duas partes conhecidas em um todo*. Estas são as primeiras situações apreendidas pela criança.

O problema de Roberto corresponde a uma classe de situações mais complexa no sentido de que, para reconhecer um problema de adição, é preciso um pouco de raciocínio e um teorema-em-ação suplementar: *se sabemos o estado final e a transformação direta é uma perda, então, para encontrar o estado inicial, é necessário adicionar esta parte ao estado final*. O deslocamento de um ou dois anos do sucesso corresponde a esse conhecimento suplementar.

Como representar esse teorema-em-ação na sua forma geral?

$$\text{Se } F = T(I) \text{ então } I = T^{-1}(F)$$

Esta representação é *disponível* para professores de matemática, mas não para os alunos de 6 ou 7 anos, ou até mesmo para alguns professores da escola primária. No entanto, uma outra representação é possível, mais intuitiva, que se refere aos estados inicial e final e às transformações direta e recíproca:



Quanto ao problema de Thierry, ele envolve duas partes sucessivas (duas transformações em que uma é conhecida) e sua composta, também conhecida. É um esquema relacional muito diferente do esquema do “estado inicial transformação estado final” que corresponde aos dois problemas de Pero e Roberto; além disso, a transformação composta e a segunda parte são de sinais contrários.

Como poderia-se prever, o fracasso das crianças se manifesta, e o fato de que as duas transformações são de sinais contrários desempenha um papel decisivo nesse fracasso.

Para mostrar isto, vou considerar vários casos e identificar o *deslize* de significado, eventualmente feito pelos alunos. Partindo do exemplo de Thierry, podemos variar de diversas maneiras as informações para a segunda parte e para a transformação composta; podemos assim comparar e interpretar as diferenças no sucesso e fracasso de acordo com valores numéricos e, em particular, considerando quando elas são ou não de mesmo sinal.

Deslizes de significado

Exemplo A

Caso de enorme fracasso: as duas transformações são de sinais contrários.

Thierry acabou de jogar duas partidas de bolas de gude.

Ele não se lembra mais do que aconteceu na primeira partida.

Na segunda partida ele

Fazendo as contas, ele percebe que, no total, ele

O que aconteceu na primeira partida?

perdeu 7 bolas de gude.

ganhou 15 bolas de gude.

Exemplo B

ganhou 7 bolas de gude

ganhou 15 bolas de gude

(segunda parte)

(ao todo)

Exemplo C

perdeu 7 bolas de gude

perdeu 15 bolas

Exemplo D

ganhou 15 bolas de gude

ganhou 7 bolas de gude

Exemplo E

perdeu 15 bolas de gude

perdeu 7 bolas de gude

Exemplo F

perdeu 15 bolas de gude

ganhou 7 bolas de gude

O exemplo A é onde fracassaram maciçamente.

No entanto, o exemplo B é de enorme êxito. O ganho total é maior que o ganho da segunda partida; nada se opõe a que a primeira partida seja também um ganho, igual à diferença.

O exemplo C se apresenta um pouco da mesma maneira com duas perdas, e uma perda total maior que a perda da segunda partida.

O exemplo D não pode ser interpretado da mesma forma pois o ganho total é menor que o ganho da segunda partida. É outro deslize de significado que os alunos estão fazendo: um estado inicial de 15 e um estado final de 7; a solução seria então uma perda, a diferença entre 15 e 7.

O exemplo E pode ser interpretado de uma forma um pouco análoga: se eu perdi menos no total do que na segunda partida, a solução é um ganho, igual à diferença.

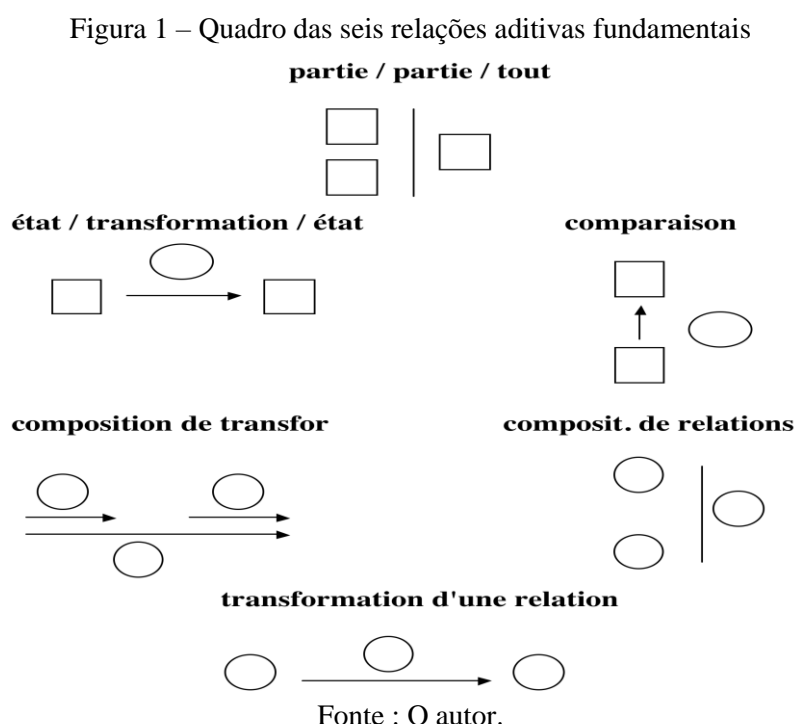
No exemplo F não podemos interpretar o enunciado nem como nos casos de B e C (o todo é maior que a parte), nem como nos casos D e E (a diferença entre o estado inicial e final). O deslizamento de sentido não é mais possível.

Pensamento e raciocínio, mesmo implícitos, nem sempre são racionais e objetivos: deslizes de significado muitas vezes são uma maneira de lidar com situações novas não prototípicas.

Ora, as oportunidades de encontrar situações novas, nas estruturas aditivas, são numerosas, como é mostrado na tabela contendo seis relações fundamentais esquematizadas: cada uma pode levar a uma variedade de casos, raramente redutíveis uns aos outros:

Há seis casos distintos para a relação “estado transformação estado”, se queremos calcular o estado final, a transformação ou o estado inicial, e conforme a transformação é positiva ou negativa. Há uma quantidade maior ainda para a composição de transformações ou transformação de uma relação.

Veja o quadro (Figura 1) das seis relações aditivas fundamentais:



Além disso, muitas vezes existem vários esquemas possíveis, distintos um do outro, para a mesma situação. Eis um exemplo:

André jogou duas partidas de bolas de gude e quer descobrir quantas bolas ele tinha antes de jogar; ele conta suas bolas e encontra 63 bolas. Ele se lembra que ganhou 16 bolas na primeira partida e perdeu 8 na segunda. Quantas bolas ele tinha antes de jogar?

Esquema 1:

Partir do estado final, juntar o que tinha perdido e subtrair o que tinha ganhado

$$63 + 8 = 71 \qquad 71 - 16 = 55$$

Esquema 2:

Fazer uma hipótese sobre o estado inicial, aplicar as duas transformações sucessivas; comparar o resultado assim obtido com o estado final dado no enunciado; corrigir a hipótese em função da diferença entre os dois:

$$\begin{array}{l} \text{hipótese } 50 \qquad 50 + 16 = 66 \qquad 66 - 8 = 58 \\ \text{constatação da diferença com } 63 \qquad 63 - 58 = 5 \\ 50 + 5 = 55 \end{array}$$

Esquema 3:

Compor as duas transformações para descobrir se, no total, André ganhou ou perdeu bolas de gude, e quantas. Aplicar ao estado final a transformação recíproca desta transformação composta

$$16 - 8 = 8 \qquad 63 - 8 = 55$$

As conceituações implícitas não são as mesmas nestas três maneiras de proceder: a inversão sucessiva das transformações no primeiro esquema não supõe a combinação de transformações, como no esquema 3.

O esquema 2, entretanto, exprime o fato de que a inversão das transformações não é tão evidente, e que a aplicação das transformações diretas permite avançar para a solução, fazendo uma hipótese ajustável sobre o estado inicial.

É interessante, neste ponto da apresentação, resumir algumas semelhanças e diferenças entre **Piaget e Vygotski**, pois ambos combateram o behaviorismo e atribuíram grande importância para:

- **a atividade:** esquema em Piaget, atividade em Vygotski
- **a conceituação:** invariante operatório em Piaget, conceitos cotidianos e conceitos científicos em Vygotski
- **a simbolização:** a função simbólica em Piaget, a linguagem e a significação das palavras em Vygotski
- **a consciência:** a consciência e a abstração reflexiva em Piaget, a consciência e a metacognição em Vygotski
- **a interação:** entre o sujeito e o objeto em Piaget, entre a criança e o adulto em Vygotski
- **o desenvolvimento:** os estágios de equilíbrio em Piaget, a zona de desenvolvimento proximal em Vygotski
- **a imitação e a interiorização** em Piaget, a **internalização** em Vygotski.

É me inspirando em Piaget e Vygotski, e me dirigindo a uma disciplina escolar, a matemática, que eu defini um campo conceitual:

Um campo conceitual é uma terna de três conjuntos:

- 1 O conjunto de situações, cujo domínio progressivo demanda uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas em estreita conexão
- 2 O conjunto dos conceitos que contribuem para o domínio dessas situações
- 3 O conjunto de formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar os objetos de pensamento e as conceituações implícitas ou explícitas nessas situações

Podemos indicar, resumindo as ideias, alguns conceitos organizadores das estruturas aditivas

- Quantidades discretas e contínuas
- Medida
- Estado/transformação
- Comparação significado/significante
- Composição binária (medidas, transformações, relações)
- Operação unitária
- Inversão
- Número natural/número relativo
- Posição/abscissa/valor algébrico

aos quais poderemos adicionar alguns conceitos pertinentes para as estruturas multiplicativas

- Análise dimensional
- Espaço vetorial; combinação linear
- Dependência, independência

As estruturas multiplicativas, que evocaremos brevemente agora, formam uma rede de situações e conceitos, essenciais para a análise de matemática e física.

Essencial também para apreciar a lentidão e a longa duração de seu desenvolvimento nos alunos da escola dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, ensino médio e mesmo nos adultos, como evidenciado pela história da matemática e da física.

É um dos melhores exemplos de "campo conceitual".

Com as estruturas aditivas, uma primeira conclusão se impõe: a relação entre número e grandeza é uma relação dialética

- Sem o conceito de número, compreenderíamos poucas coisas relativas ao conceito de grandeza.
- Mas sem a experiência das quantidades de objetos ordinários discretos e das grandezas físicas, sobretudo as espaciais, não haveria o conceito de número.
- A experiência do número começa com a experiência das grandezas.

AS CONCEITUAÇÕES IDENTIFICÁVEIS NA ATIVIDADE EM SITUAÇÃO: CONCEITOS E TEOREMAS-EM-AÇÃO; EXEMPLOS NAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Como as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas formam uma rede de situações e conceitos, essenciais para analisar a longa duração do desenvolvimento e da aprendizagem de conhecimentos escolares. É um dos bons exemplos de “campo conceitual” em aritmética ordinária.

Identifiquemos alguns dos conceitos e teoremas-em-ação mobilizados progressivamente pelos alunos.

Sem surpresa, as primeiras situações compreendidas pelos alunos são *situações de proporção simples, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação*, com números inteiros pequenos:

Por exemplo, a distribuição de balas para 4 alunos, dando 6 para cada um; ao todo, quantas balas serão necessárias?

Ou ainda, o custo de 4 kg de peras, custando 6 euros o kg; qual o custo total?

Nos dois casos procuramos $f(4)$ conhecendo 1 e $f(1) = 6$. Este é o caso mais simples de busca da quarta proporcional.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 6 \\ 4 & x \end{array}$$

Partição e quotição

Enquanto há apenas uma única estrutura de dados para multiplicação, existem duas para a divisão: a “partition” e a “quotition” na terminologia inglesa,

Partição		Quotição	
1	x	1	6
4	24	x	24

Exemplo de partição

Jane compra 4 kg de peras por 24 euros. Qual é o preço de um kg?

A divisão por 4 corresponde à inferência: *o preço de um kg é 4 vezes menos que o preço de 4 kg*.

Aplicamos a uma quantia de dinheiro um operador escalar, sem dimensão, “4 vezes menos”. Obtemos uma quantidade de dinheiro.

Exemplo de quotição

Roberto quer comprar peras a 6 euros o kg. Ele dispõe de 24 euros. Quantos kg ele pode comprar?

A divisão de 24 por 6 corresponde à sua aplicação a uma quantia de dinheiro: da inversa do coeficiente de proporcionalidade. *Obtemos kg porque dividimos 24 euros por um quociente de dimensões: 6 euros por kg.*

A conceituação da quotição é sensivelmente mais delicada do que a de partição.

Outra dificuldade: a extensão dos raciocínios aos números decimais menores que 1. Comparemos os dois casos A e B:

Problema A

285 kg de cortiça a 0,70 euros o kg

Para calcular o custo total, é necessário fazer uma multiplicação ou uma divisão?

Problema B

0,70 tonelada de cimento a 285 euros a tonelada

Para calcular o custo total, é necessário fazer uma multiplicação ou uma divisão?

Alunos dos anos finais do ensino fundamental não têm muita dúvida no problema A: “*é preciso fazer uma multiplicação, claro*”. Eles têm mais dúvida no problema B; *alguns propõem até mesmo uma divisão.*

Por que? A relação mais naturalmente procurada para raciocinar é a relação escalar.

Para o problema A, esta escolha não suscita qualquer dificuldade: como 285 é maior que 1, é necessário multiplicar 0,70 por 285, o que está de acordo com a ideia dos alunos de que a multiplicação torna maior.

Para o problema B, é necessário multiplicar 285 por 0,70; mas como 0,70 é menor que 1, obteríamos então uma soma menor; é o que faz os alunos hesitarem e leva alguns dentre eles a pensar que não se deve fazer uma multiplicação, justamente porque, em suas mentes, a multiplicação deveria tornar maior.

Assim o caráter crescente da função: se $0,70 < 1$ então $f(0,70) < f(1)$, – se transforma em obstáculo ao raciocínio proporcional.

Este erro demanda vários comentários

Nem sempre é verdade que a multiplicação torna maior e a divisão menor. Não é evidente que a multiplicação é comutativa quando se considera as dimensões das grandezas e não apenas seus valores numéricos.

Os operadores às vezes são escalares, outras vezes quociente de (entre) dimensões. Não se deve, portanto, fazer somente com números, mas também com vetores, dotados de uma dimensão.

Isso demanda um início de análise dimensional, que podemos colocar simbolicamente em evidência com um quadro que mostre as grandezas diferentes (uma coluna para os pesos, uma coluna para os preços) e relações diferentes (vertical para as relações escalares, horizontal para as relações de proporcionalidade entre grandezas).

Outro exemplo com dados mais numerosos

Sr. Félix é um empreendedor que quer avaliar os custos de fabricação para um conjunto de 25 casas: 12 F4, 8 F5, 5 F6². Antes de submeter uma proposta para o tempo de fabricação e a mão de obra necessária para as fundações em concreto armado (“alicerces” no vocabulário dos pedreiros), ele dispõe dos seguintes dados.

Primeiros dados

Os alicerces devem ter uma *seção* de 25 X 50 (em cm). O concreto terá a seguinte dosagem:

Para 1 m³ de concreto

250 kg de cimento
580 kg de areia
1500 kg de cascalho

Os preços são respectivamente

25 F	50 kg de cimento
40 F	a tonelada de areia
43 F	a tonelada de cascalho

Escreva um conjunto de perguntas usando os dados que você tem. Escreva suas perguntas com todas as letras, não faça cálculo.

Exemplos de perguntas feitas pelos alunos:

H comprimento do alicerce com um metro cúbico de cimento?

C preço de um metro cúbico de concreto?

G quanto concreto para uma tonelada (1000 kg) de areia?

D quanto cimento deve ser encomendado no total?

E ----- areia -----?

F ----- cascalho -----?

Tabelas de dados e questões

Tabela 1 – Quantidade de materiais

Alicerce	Concreto	Cimento	Areia	Cascalho
		50		
				1000
H	1	250	580	1500
			G	1000
385		D	E	F

Fonte : O autor.

² Esta é uma nomenclatura usada na França: F4, F5 e F6 são apartamentos com 4, 5 e 6 cômodos, respectivamente.

Tabela 2 – Preços dos materiais (em francos da época)

Cimento	Areia	Cascalho	Concreto
25 para 50 kg			
		43 a tonelada	
			C para 1 metro cúbico
		40 a tonelada	

Fonte : O autor.

Novos dados para a continuação da atividade

Senhor Félix estima o custo médio das armações em 350 F para um metro cúbico de concreto. Para a mão de obra, ele se baseia no fato de que, em média, dois trabalhadores produzem 18 metros lineares de alicerce em um dia de 8 horas; coloca o molde, as armações, concreto, remoção dos moldes, etc. A mão de obra acaba ficando, com impostos sociais, a um custo por hora para 48 F

Escreva, sem fazer quaisquer cálculos, novas questões que podemos fazer.

Que grandezas podemos introduzir na tabela anterior?

Que grandezas pedem um outro tipo de tabela?

Novas questões

U comprimento do alicerce por trabalhador e por dia?

Pesquisa do valor unitário $f(1,1)$

N quantos trabalhadores são necessários para fazer 130 m de alicerce em 5 dias?

S quanto de alicerce em 5 dias com 10 trabalhadores?

T quantos dias para fazer 1400 m com 10 trabalhadores?

Como estamos lidando com uma função de duas variáveis, desta vez é preciso uma tabela de dupla entrada:

		TRABALHADORES				
		1	2	N	7	10
DIAS	1	U				
	5			130		S
	T					1400

Quais são as conceituações concernentes a esta lição, que seriam dirigidas a alunos do ensino profissional?

Para a proporção simples

As propriedades de isomorfismo da função linear

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$f(ax) = af(x)$$

$$f(ax + a'x') = af(x) + a'f(x')$$

O fator de proporcionalidade

$$f(x) = kx$$

O produto em cruz e a regra de três

$$x' * f(x) = x * f(x')$$

$$f(x') = x' * f(x) / x$$

Para a proporção dupla

As propriedades da proporção simples às quais se juntam aquelas da linearidade dupla notadamente $f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2 f(x_1, x_2)$.

A título de exemplo, eis aqui o uso espontâneo do último teorema por um aluno de CM2 (equivalente ao 5º ano do ensino fundamental).

Situação: Crianças preparam sua estadia de viagem na neve e calculam as despesas alimentares que precisam prever.

Para o açúcar, é necessário contar 3,5 kg de açúcar para 10 crianças para 7 dias. Há 50 crianças e a estadia é de 28 dias. Quanto açúcar será necessário?

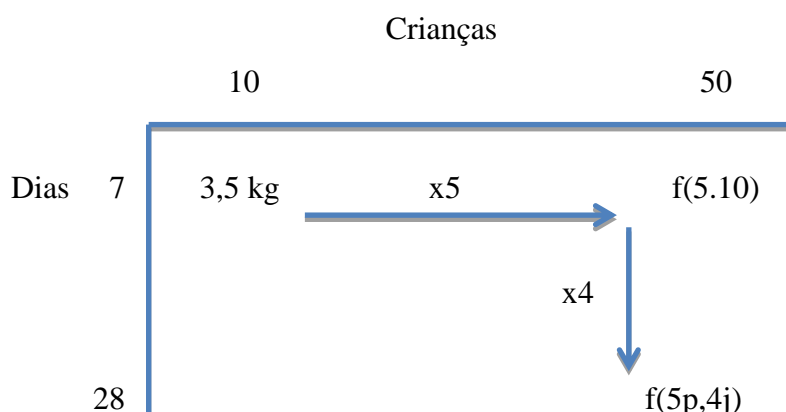
Um aluno de CM2 (5º ano) intervém e diz: “5 vezes mais, 4 vezes mais, isso dá 20 vezes mais”.

Como representar este raciocínio?

A forma algébrica é interessante, mas é compreensível por crianças de 10 anos?

$$f(5p,4j) = 5 \cdot 4 \cdot f(p,j) \quad \begin{array}{l} \text{5 vezes mais pessoas} \\ \text{4 vezes mais de dias} \end{array}$$

Podemos também usar uma representação gráfica



RELAÇÕES ENTRE CONCEITUAÇÕES NA AÇÃO E SIGNIFICANTES LINGUÍSTICO E SIMBÓLICOS

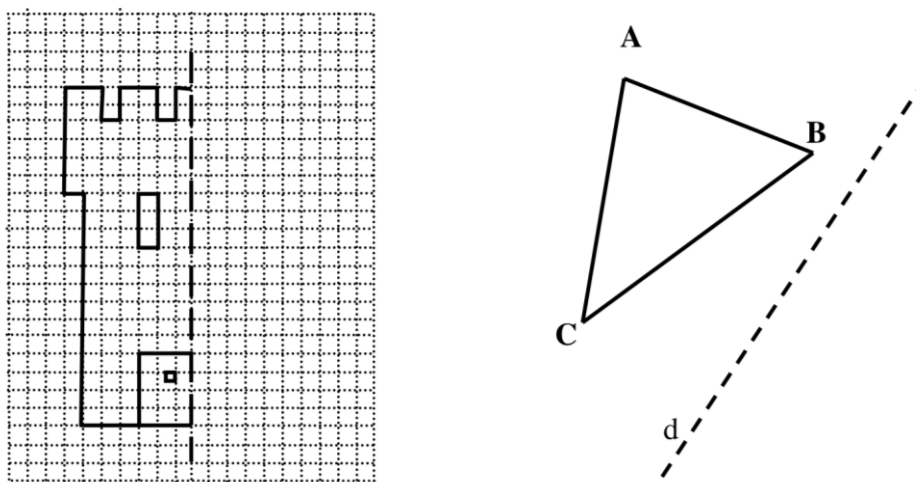
Nesta parte da minha apresentação, proponho ilustrar brevemente o fato de que os diferentes níveis de complexidade do conhecimento se referem tanto à forma predicativa quanto à forma operatória, de tal forma que nem um nem o outro são auto-suficientes.

Eu me proponho também destacar algumas propriedades da álgebra com relação à aritmética, e fazer valer sua dupla função: predicativa e operatória.

Forma operatória e forma predicativa

Em relação à forma operatória, aqui estão dois exemplos de situações que podem ser propostas, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental para o primeiro e nos finais para o segundo.

Figura 2 – Nível de complexidade para o desenho de objeto simétrico



Fonte : O autor.

Nós percebemos facilmente que a construção do triângulo simétrico ao triângulo ABC em relação à linha d pontilhada é mais complexa do que o desenho da segunda metade da fortaleza.

Para a fortaleza, temos papel quadriculado e o procedimento é relativamente simples “um passo à direita se temos um passo à esquerda no desenho da meia-fortaleza já desenhada”, ou “um passo à esquerda se temos um passo à direita”; “um passo para baixo se temos um passo para baixo”, ou “um passo para cima se temos um passo para cima”, ou vários passos em outro caso. Além disso, o eixo de simetria é vertical.

Para o triângulo ABC, há necessidade de instrumentos (o esquadro graduado eventualmente, a régua e o compasso mais frequentemente) e o domínio de certas propriedades de simetria ortogonal (relativas às distâncias até a reta d por exemplo).

Com relação à forma predicativa, é suficiente enunciar em português e francês algumas das propriedades e relações que podem ser enunciadas pelo professor para entender que esses alunos do sexto ano (11 a 12 anos) com certeza, mas também do sétimo ano (13 a 14 anos), terão dificuldades para fazerem formulações, e até mesmo para entender, especialmente as últimas.

Forma predicativa em português

1 – A fortaleza é simétrica (enuncia a propriedade de um objeto concreto desenhado, a fortaleza)

2 – O triângulo A'B'C' é simétrico ao triângulo ABC em relação à reta d (também enuncia a propriedade de um objeto concreto, o triângulo A'B'C', mas o predicado traz também outros objetos: o Triângulo ABC e a reta)

3 – A simetria mantém os comprimentos e os ângulos (fala de um novo objeto, a simetria, objeto abstrato que resulta de uma construção teórica nova, uma vez que não é uma fortaleza, nem um triângulo, nem uma reta. Não desenhamos o objeto simetria)

4 – A simetria é uma isometria (exprime uma relação entre dois tipos de objetos abstratos, as simetrias e as isometrias)

Forma predicativa em francês

1 – La forteresse est symétrique (énonce la propriété d'un objet concret dessiné, la forteresse)

2 – Le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d (aussi énonce la propriété d'un objet concret, le triangle A'B'C', mais le prédicat met en jeu deux autres objets: le triangle ABC, et la droite)

3 – La symétrie conserve les longueurs et les angles (parle d'un nouvel objet, la symétrie, objet abstrait, qui résulte d'une construction théorique nouvelle puisque ce n'est ni une forteresse, ni un triangle, ni une droite. On ne dessine pas l'objet symétrie)

4 – La symétrie est une isométrie (exprime une relation entre deux sortes d'objets abstrait, les symétries et les isométries)

O segundo enunciado é mais delicado que o primeiro: ele exprime uma relação a três termos enquanto que o primeiro enuncia uma propriedade aplicável a apenas um termo. O terceiro enunciado apresenta uma nova dificuldade, a de transformar o predicado dos dois primeiros enunciados em um substantivo, o que faz dele um novo objeto de pensamento, que tem as propriedades de manter os comprimentos e os ângulos. Outro salto cognitivo ocorre com o quarto enunciado, uma vez que as propriedades de conservação são, por sua vez, transformadas em um novo objeto, o conceito de isometria, em que as simetrias ortogonais são apenas uma subclasse. Portanto, é preciso ter cuidado antes de afirmar, com Vygotski, que o conceito é o significado da palavra.

Vamos falar agora da álgebra

A primeira observação interessante é que, baseando-se nos conhecimentos de aritmética, a álgebra representa um importante desvio formal. Nós podemos caracterizar as diferenças entre aritmética e álgebra da seguinte maneira:

Quadro 1 – Diferenças entre aritmética e álgebra

Aritmética	Álgebra
incógnitas intermediárias	extração de relações pertinentes
escolha intuitiva dos dados	expressões formais dos enunciados e das operações
operações na boa ordem	algoritmo
controladas pelo sentido	controle: regras e modelo adequado

Fonte : O autor.

Um novo conceito torna-se necessário, aquele de *roteiro-algoritmo*, em que um dos exemplos mais simples é dado a seguir:

$$3x + 14 = 35$$

$$3x + 14 - 14 = 35 - 14$$

$$3x = 21$$

$$3x / 3 = 21 / 3$$

$$x = 7$$

Este algoritmo contém várias operações elementares da aritmética que eu deixei visível, voluntariamente. Mesmo com essas operações visíveis, os alunos têm dificuldade para apreciar o significado da álgebra, problema sobre o qual tropeçam muitos alunos do ensino fundamental.

Nós podemos traduzir esta pergunta em termos de competências com relação à álgebra. Citar várias competências novas, muito significativas da ruptura com a aritmética, e de nível muito diferente:

- 1 Saber o que fazer diante de uma equação dada
atingir um certo objetivo, respeitar as regras
- 2 Saber colocar um problema em equação
extrair as relações pertinentes, controlar sua independência
- 3 Identificar os objetos matemáticos novos
equação e incógnita, função e variável
- 4 Reconhecer a função da álgebra
resolver problemas incômodos ; provar uma relação

Essas competências envolvem níveis de conceituação muito diferentes

- 1 e 2 são baseados em esquemas: “o sentido são os esquemas” segundo Piaget
- 3 é baseado em conceituações explícitas
- 4 é metacognitivo

Como para os campos conceituais vistos acima (estruturas aditivas e estruturas multiplicativas), os algoritmos ensinados no ensino fundamental estão em níveis de complexidade diferentes de acordo com a complexidade relativa das equações a serem resolvidas. Distinguímos frequentemente os seguintes níveis

$$a + x = b$$

$$ax = b$$

$$ax + b = c$$

$$ax + b = cx =+ d$$

$$ax + by = c \quad \text{et} \quad a'x + b'y = c'$$

Outra pergunta surge: será que os alunos usam os algoritmos ensinados ou se voltam a esquemas pessoais?

Às vezes eles são obrigados a fazer isso: por exemplo, não há algoritmo para colocar em equação problemas formulados em linguagem natural; os alunos recorrem então aos seus esquemas pessoais, mesmo quando lhes fazemos sugestões sobre este assunto.

O poder da álgebra é devido em parte ao fato de que ela é uma forma de conhecimento matemático excepcional: ao mesmo tempo predicativa e operatória. De fato, ela permite, ao mesmo tempo enunciar objetos, propriedades e relações (moderadamente certas precauções) e tratar esses enunciados para avançar nas soluções. Isto é o que Descartes foi capaz de mostrar, de forma exemplar e pela primeira vez, com seu tratado sobre geometria algébrica de 1636.

Podemos dizer as coisas de forma diferente, particularmente distinguindo o aspecto ferramenta do aspecto objeto da álgebra.

Aspecto ferramenta

resolução de problemas que seriam delicados pela aritmética
fórmulas de geometria, de física, de contabilidade, de economia
algoritmos de tratamento

Aspecto objeto

Equação e incógnita
Função, variável, parâmetro
Números relativos, racionais e reais
Monômios, polinômios, sistema

Sabemos, por exemplo, que alguns matemáticos, até o século XIX, negavam o estatuto de número para os números negativos. *Eles viam somente o lado “ferramenta cômoda de cálculo”*.

Inevitavelmente, muitos alunos do ensino fundamental são reticentes com os números negativos: por exemplo, se eles chegarem a uma solução negativa após um tratamento algébrico, eles exclamam “*eu me enganei!*”.

É, assim, útil procurar situações para os quais as soluções negativas podem fazer sentido.

Um primeiro exemplo simples

A temperatura externa está 2 graus acima de zero às 9 horas da manhã. Ela subiu 11 graus desde às 3 horas da manhã. Qual era a temperatura às 3 da manhã?

Um segundo exemplo mais sofisticado

Robert jogou bola de gude de manhã e à tarde. Ele ganhou 18 bolas à tarde. Mas, ao final de suas contas ele percebe que tem 5 bolas a menos do que ele tinha de manhã, antes de começar a jogar. O que aconteceu pela manhã?

Para esse último problema, duas formas de colocar em equação são possíveis, desigualmente acessíveis aos alunos no final do ensino fundamental.

$x + 18 = -5$ mas é bem delicado raciocinar diretamente assim

$35 + x + 18 = 35 - 5$

O que fazer?

Buscar situações cuja solução algébrica negativa pode ser interpretada:

como uma **transformação negativa** (perda, gasto...)

como uma **relação negativa** (dívida, a menos que...)

como uma **abscissa ou uma ordenada negativa**

Em todo caso é preciso evitar fazer perguntas que já indicariam que o número é negativo. Dar preferência a uma forma mais neutra, por exemplo:

Ocorreu um lucro ou uma perda? de quanto?

Em resumo, concepções e símbolos são instâncias cognitivas distintas: não devemos confundir a conceituação e simbolização, embora os símbolos tragam certa contribuição para a conceituação.

Quais qualidades possíveis de significantes linguísticos e simbólicos podemos considerar como importantes?

- Estabilidade e economia (resumo da informação)
- O caso de proximidade entre significantes/significados/invariantes operatórios
- Operacionalidade: inferências e cálculos

PRINCÍPIOS DE INCERTEZA E DESENVOLVIMENTO DA RACIONALIDADE

A matemática desempenha um papel importante na formação da racionalidade. Às vezes temos até tendência a conceder-lhe um papel principal e privilegiado, como os modelos matemáticos da física às vezes tendem a se apresentar: atribuímos assim aos modelos uma racionalidade que negamos à observação e às descobertas empíricas, no entanto, decisivas na ciência.

É útil retomar a questão a partir do desenvolvimento da criança que, sem conhecer a matemática, forma gradualmente as representações racionais das situações nas quais ela vive e se desenvolve.

Distinguimos três grandes categorias de situações:

- **Situações aleatórias:** não podemos prever os acontecimentos singulares.
- **Situações regulares:** podemos prever os acontecimentos singulares, mas não temos acesso aos processos que conduzem a esta regularidade.
- **Situações necessárias:** podemos prever e temos acesso aos processos, mas não dispomos de todas as categorias conceituais pertinentes para capturar a informação, prever ou agir.

Exemplos prototípicos

Aleatório: dados – loteria – meteorologia

Regular: estações do ano – marés – ciclo lunar

Necessária: orientação espacial – volume – geometria euclidiana

Podemos imaginar situações aleatórias, regulares ou necessárias para experimentar com crianças ou adultos.

Aleatória

Duas lâmpadas acendem de acordo com leis de probabilidade: duas vezes a lâmpada verde para uma vez a luz vermelha.

Resultado: os indivíduos se ajustam gradualmente à proporção 2 sobre 3 e 1 sobre 3, enquanto que eles teriam interesse em prever sempre “verde”.

Regular

Relativamente simples

Eis aqui dois exemplos de séries regulares

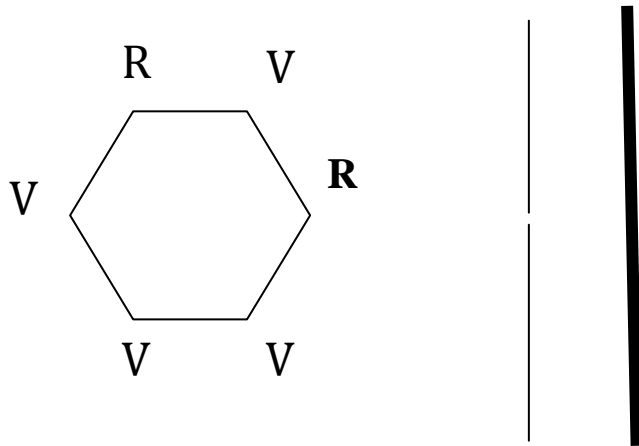
RVVRVVRVV...

Mais complexa

RVRVVVRVRVVVRVRVVV...

Necessária

Exemplo de situação necessária com esta última regra de sucessão: o pequeno orifício permite projetar luzes sobre a segunda tela na ordem RRVVVRV; é a rotação em um único sentido do hexágono que dá a esta regularidade sua propriedade de relação necessária.



Obviamente existem outras fontes de incerteza: principalmente **a interferência com a ação do outro** ou de determinantes exteriores. Portanto, é útil distinguir:

Situações produtivas: somente a própria ação do sujeito determina os efeitos e as variações

Situações passivas: a ação não tem qualquer efeito; os únicos determinantes são externos (típicamente de astronomia)

Situações interativas: as variações dependem de determinantes externos e também da própria ação.

Estas três categorias poderiam ser reinterpretadas com as três categorias principais mostradas anteriormente: aleatória, normal, necessária. Mas é importante distingui-las por si mesmas, porque elas desempenham um papel na construção da racionalidade pela criança.

Uma abordagem desenvolvimental conduz, de fato, a não as confundir. As crianças agem e podem assim experimentar; em situações produtivas, elas não observam outras variações, apenas aquelas geradas por sua própria ação. Assim, podemos considerar que a racionalidade tem desenvolvimento privilegiado nas situações necessárias e produtivas. No entanto, é em situações interativas e aleatórias que podemos situar o impacto mais original da teoria dos jogos. Podemos também situar na casa do meio a racionalidade que se desenvolve com o estudo das estações do ano e a astronomia, que desempenhou um papel muito importante na história das ciências.

Quadro 2 – Relações entre as categorias de situações

	Necessárias	Regulares	Aleatória
Produtivas	Base e começo da racionalidade		
Passivas		Estações, astronomia	
Interativas			Teoria dos jogos

Fonte : O autor.

A construção da racionalidade

O primeiro campo de experiência do bebê e da criança, no que se refere às suas necessidades, é o espaço.

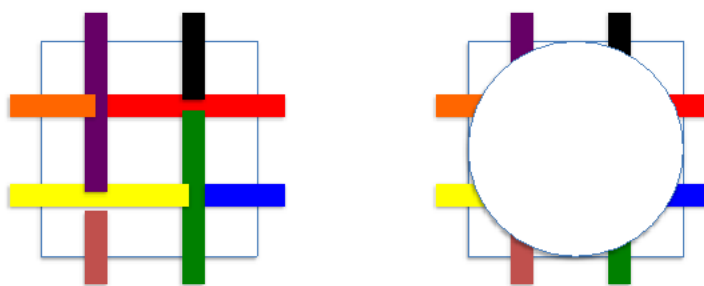
É também um campo de experiência essencial para o adulto. Daí provavelmente a importância da geometria na história das ciências, como área de conceituação e como fonte de modelos.

Vamos permanecer no estudo do bebê e da criança *pequena* e vamos considerar as situações que podem formar (moldar) suas primeiras representações calculáveis:

- os deslocamentos e as posições do sujeito em um espaço circunscrito;
- a manipulação de objetos materiais com certas propriedades.

Um exemplo da construção do necessário

Figura 3 – Dispositivo de barras entrelaçadas



Fonte: O autor.

Apresentamos, individualmente, para crianças de 4 a 8 anos um dispositivo de barras entrelaçadas umas às outras e pedimos para liberar a barra vermelha que, como pode ser visto na figura à esquerda, está bloqueada pela barra preta, que está bloqueada pela barra verde. Por sua vez a barra verde está bloqueada pela barra amarela; mas não pela barra azul (que para na borda da barra verde). Como pode ser visto na figura, a barra amarela está bloqueada pela barra marrom escura, mas não pela barra marrom claro. E, finalmente, a barra marrom escura está bloqueada pela barra laranja.

Dessa forma, seria preciso tentar retirar várias barras numa certa ordem para liberar a barra vermelha.

Nós tínhamos pensado em apresentar o mesmo dispositivo, com a mesma solicitação de retirar a barra vermelha, com uma tela escondendo as relações entre as barras (figura à direita). Mas nos contentaremos em mencionar apenas as principais observações feitas quando o dispositivo está visível.

Vamos falar sobre as tentativas: retirar a barra preta para tentar liberar a barra vermelha não representa uma dificuldade. Entretanto, tentar tirar a barra verde traz dificuldade porque ela está bloqueada pela da barra amarela, e as crianças nunca procuram as razões deste bloqueio: elas lutam para tentar tirar alternadamente a barra verde e a barra vermelha sem sucesso, evidentemente.

O primeiro algoritmo observado é aquele de uma menina de 4 anos e meio que descobre o bloqueio pela barra amarela. Ela se contenta primeiro com esta descoberta e

retorna para a barra vermelha; em vão. Ela tem então a ideia de retornar, a partir da barra amarela, para a barra marrom escura, em seguida, em direção à barra laranja. Ela descobriu, assim, que a relação de bloqueio não é simétrica e que não surte efeito retirar alternadamente a barra que bloqueia e a barra que é bloqueada.

É somente em torno de 7 anos ou mais, que algumas crianças descobrirão um algoritmo mais rápido raciocinando transitivamente com a inferência: “é preciso tirar x para tirar y e é preciso tirar z para tirar x” então “é preciso tirar z para tirar y”.

Existem várias outras maneiras de encadear as ações;

- girando em torno do dispositivo e tentando tirar as barras na ordem da rotação;
- tentando tirar as barras sem uma regra, ou levando em conta a conexão sem perceber a antisimetria;
- finalmente algumas crianças se recusam a qualquer tentativa e às vezes desenham uma caixa sem nenhuma barra no interior, apesar de serem claramente visíveis.

Observamos assim que há muitas maneiras de proceder, ou seja, vários esquemas, denominados abaixo de acordo com sua característica principal. Apenas os dois últimos podem reivindicar o estatuto de algoritmo.

Caixa preta – retirar o vermelho depois aleatoriamente.

Ordem espacial – tirar o vermelho depois continuar “rodando” na ordem

Conexidade – tirar vermelho depois preto, depois o marrom escuro

Asimetria da relação – tirar o verde, o vermelho, depois o amarelo para retirar o vermelho

Transitividade da regra – examinar o dispositivo antes de começar

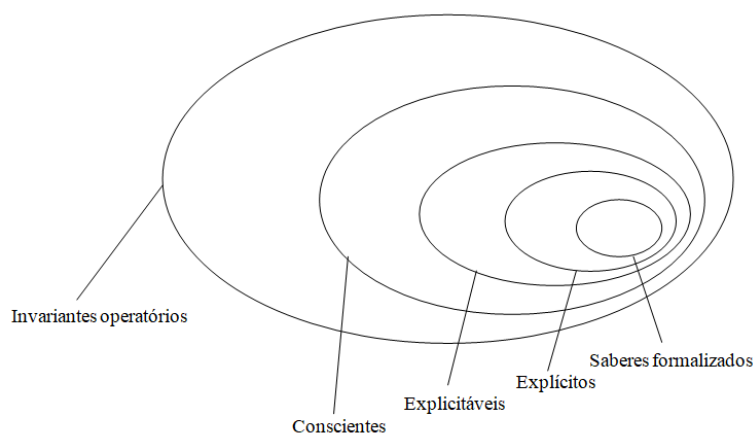
Assim, esquemas e algoritmos fazem parte da mesma família, dizem respeito, tanto os primeiros quanto os segundos, a classes de situações, que são compostas também por quatro componentes:

- um objetivo ou vários,
- regras de ação; tomada de informação e controle;
- invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação
- possibilidades de inferência.

Os algoritmos são esquemas, mas nem todos os esquemas são algoritmos, pois não levam a um resultado em um número finito de passos.

O papel da consciência e da explicitação também é uma forma de perceber diferentes níveis de conceituação possíveis na atividade racional, a partir dos invariantes operatórios presentes nos esquemas, mas, eventualmente pouco conscientes, até os enunciados e demonstrações formalizadas da ciência contemporânea (diagrama a seguir):

Figura 4 – Níveis de conceituação



Fonte: O autor.

REFERENCIAS E LEITURAS COMPLEMENTARES

Bachelard G. *La philosophie du non*. Paris: PUF, 1940.

Bachelard G. *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin, 1947.

Bruner J. S. *Savoir faire, savoir dire: le développement de l'enfant*. Paris: PUF, 1983.

Bruner J.S. *Culture et modes de pensée*. Paris: Retz, 2000.

Douady R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n°2, p. 5-31, 1986.

Mayen P. “le processus d’adaptation pragmatique dans la coordination d’une relation de service”. In: K. Kostulski & A. Trognon (dir.), *Communication interactive dans les groupes de travail*. Nancy: presses universitaires de Nancy, p. 205-234, 1998.

Mayen P. Interactions tutorales au travail et négociations formatives. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation*, n°35, p. 59-73. PUF, 2000.

Pagoni M. *Approche pragmatique de la conceptualisation des valeurs morales pendant l'adolescence: analyse cognitivo-discursive d'une situation d'argumentation entre adolescents*. Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université Paris 5 René Descartes, 1994.

Pastré P. La conceptualisation dans l'action: bilan et nouvelles perspectives. *Éducation permanente*, N°139 ("Apprendre des situations"), p. 13-35, 1999.

Pastré P. Le rôle des schèmes et des concepts dans la formation des compétences. *Performances Humaines et techniques*, n°71, p. 21-28, 1994.

Piaget J. *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel, Delachaux et Niestlé, 1964.

Piaget J. *La prise de conscience*. Paris: Presses Universitaires de France, 1974.

Piaget, J. *Biologie et connaissance*. Paris, Presses Universitaires de France.

Piaget, J. *Introduction à l'épistémologie génétique*. Paris: Presses Universitaires de France, 1949.

Piaget, J., Inhelder, B. (1966). *L'image mentale chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France, 1974.

Revault d'Allonnes, G. Le mécanisme de la pensée: les schèmes mentaux. *Revue philosophique*, XC; fac simulé dans *Psychologie française*, 2000, 45, 1920.

Vergnaud G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.M. Barbier (dir.), *Savoirs théoriques, savoirs d'action*. Paris: PUF, p 275-292, 1996.

Vergnaud G. L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne: Peter Lang, 1981.

Vergnaud G. Récopé M. De Revault d'Allonnes à une conception du schème aujourd'hui. *Psychologie Française*, 45, 1, pp 35-50, 2000.

Vergnaud G. Some of Piaget's fundamental ideas concerning didactics, *Prospects*, 26-1, 183-194, 1996.

Vygotski L. S. *Pensée et langage*. Paris, Editions Sociales. (traduction de Françoise Sève), 1934/1985.

Vygotski L. S. *Thought and Language*. Cambridge MIT Press, 1962.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR EM ESPANHOL E EM PORTUGUÊS

Moreira M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área. Universidad federal do Rio Grande do Sul, 2004.

Vergnaud G, Durand C. Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. In Coll. C. (ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: siglo xxi de espana editores, p. 105-128, 1983.

Vergnaud G, Halbwegs F., Rouchier A. Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias, y desarrollo conceptual del alumno. In Coll C. (ed.), *psicología genética y educación*, oikos-tau-barcelona, p.115-128, 1981.

Vergnaud G. A criança, a matemática e a realidade. Curitiba: UFPR, 2009.

Vergnaud G. A gênese dos campos conceituais. In: E.P. Grossi (Ed.) *Porque ainda há quem não aprende? A teoria*. Petrópolis, vozes, 2003.

Vergnaud G. Actividad y conocimiento operatorio. In: coll. C. (ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, siglo xxi de espana editores, p. 91-104, 1983.

Vergnaud G. *El niño las matemáticas y la realidad*. Mexico: trillas, 1991.

Vergnaud G. *Forma operatória e forma predicativa do conhecimento: o valor da experiência na formação de competências*. Araucarias, 1-2, 69-89, 2002.

Vergnaud G. Lev Vygotski, pedagogo e pensador do nosso tempo. Porto Alegre; geempa, 2004.

Vergnaud G. Problemas aditivos y multiplicativos. In: C. Chamorro (ed). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: ministerio de educación, cultura y deporte, 2002.