# Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética

*João Debastiani Neto* [1] *, Clélia Maria Ignatius Nogueira* [2] *, Valdeni Soliani Franco* [3]

**Resumo:** A teoria de Piaget se destaca na investigação da construção do espaço pela criança, incluindo a forma como ela o percebe e o representa. Segundo Piaget e Inhelder, no domínio das geometrias, a criança estabelece primeiro as relações topológicas para, posteriormente, construir simultaneamente as relações projetivas e euclidianas. Contudo, de acordo com as *Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná*, as geometrias não euclidianas são apresentadas aos alunos em uma ordem distinta daquela descrita por Piaget. Assim, o presente trabalho tem como objetivo identificar o modo como crianças entre 8 e 12 anos mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. Acredita-se que esta pesquisa vem dar subsídios para confirmar a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares. A fundamentação teórica advém da Teoria da Construção do Espaço, de Jean Piaget e Barbel Inhelder, e da Teoria dos Campos Conceituais.

**Palavras-chave:** Construção do espaço. Geometrias não Euclidianas. Ensino de Matemática.

# Geometry in the Secondary Education: a study based on Genetic Epistemology

**Abstract:** Piaget's theory stands in investigating the space construction by the child, including the way she or he perceives and represents it. According to Piaget and Inhelder, in the field of geometry, first, the child establishes topological relationships to, later, build both projective and Euclidean relations. However, according to the Basic Education Curriculum Guidelines for Mathematics in the State of Paraná, the non-Euclidean geometries are presented to students in an order other than that described by Piaget. Thus, this study aims to identify how children between eight and twelve mobilize some of the basic ideas for geometrical concepts construction during resolution of problem situations. We believe

[1] Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente do Departamento de Ciências da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: netto_jnt@hotmail.com

[2] Doutora em Educação. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: clelia@wnet.com.br

[3] Doutor em Matemática. Instituto de Ciências Matemática e Computação. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: vsfranco@uem.br

that this research will provide framework to confirm the inclusion of non-Euclidean geometries into Curriculum Guidelines. Our theoretical foundation results from the Theory of Construction of Jean Piaget and Barbel Inhelder and Conceptual Fields Theory.

**Keywords:** Construction of the space. Non-Euclidean geometries. Teaching Math.

# Introdução

A construção da noção de espaço na criança é uma temática ampla e complexa. Inicialmente, na medida em que a evolução das diversas formas de pensamento da criança é de natureza a nos informar sobre o mecanismo da inteligência e sobre a formação da razão humana em geral, o problema do espaço apresenta uma importância primordial. Há séculos, filósofos e psicólogos discutem sobre a natureza do espaço, chegando a diferentes respostas. Para alguns, a natureza do espaço é empírica, devido à intuição perceptiva e figurada; para outros, sua natureza é dada *a priori*, ou ainda, operatória, etc.

Nessas discussões, encontram-se diferenças entre as diversas interpretações da percepção espacial. Por um lado, existem epistemologias que consideram o espaço como uma "forma da sensibilidade" e, por outro, teorias que consideram ser ele elaborado por meio da dedução geométrica, abordada como atividade puramente do intelecto do sujeito.

Durante quase todo o século XIX, as explicações sobre a natureza do espaço se sustentavam nas diferentes formas de compreender como o sujeito percebe o objeto físico, oscilando entre o apriorismo e o empirismo. Existiram outras orientações filosóficas sobre a construção do espaço, que não serão abordadas aqui, pois optamos por apresentar aquelas que ocupam posições extremas com relação à natureza do espaço e que são contestadas pela teoria piagetiana e pelo interacionismo kantiano, citado inúmeras vezes por Piaget.

Na visão de Piaget, o conhecimento não pode ser visto como centrado, *a priori*, no sujeito, ou mais precisamente nas suas estruturas cognitivas, pois estas são o resultado de uma construção contínua; e nem tampouco no objeto, pois a percepção destes depende daquelas. Este é um ponto-chave para o entendimento da obra piagetiana. Só existe conhecimento porque existe uma construção por parte do sujeito que conhece. Mas essa construção não acontece no sentido idealista nem no sentido empirista. Não devemos negar a existência de uma realidade externa ao sujeito que pensa (como fazem os idealistas), nem tampouco afirmar ser essa realidade independente (do ponto de vista do sujeito que conhece) do sujeito cognoscitivo (como fazem os empiristas). O que é chamado de realidade depende do modo como a informação proveniente do mundo exterior (ao sujeito) é interpretada (desconstruída/reconstruída) pelo indivíduo.

Na explicação piagetiana, o conhecimento não é consequência direta da percepção dos objetos, nem está determinado pelo sujeito consciente que se apropria dele: não é, portanto, propriedade dos objetos nem dos sujeitos, mas, sim, o produto de relações estabelecidas entre sujeito e objeto.

Podemos dizer que Piaget concorda com o interacionismo proposto por Kant para explicar a possibilidade do conhecimento; entretanto, na concepção piagetiana, as relações entre o sujeito e o meio consistem em uma interação tão intensa, de modo tal que a consciência não começa nem pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas, sim, por um estado indiferenciado. E é desse estado indiferenciado que derivam dois movimentos complementares: um de incorporação das coisas ao sujeito (assimilação) e o outro de acomodação do sujeito às próprias coisas, num constante processo de interpenetração que estabelece, então, ser o conhecimento não um estado, mas um processo.

Nesta concepção construtivista, o sujeito é ativo em sua essência. Segundo Becker (1994, p. 21):

> Falar em sujeito é falar em atividade, fundamentalmente assimiladora. O sujeito epistêmico só o é na medida em que ele se constitui como tal. E ele se constitui como tal pela assimilação e pela acomodação combinadas. Rejeita-se, portanto, da forma mais radical que se possa imaginar, um sujeito passivo, tanto no que se refere à hipótese apriorista, quanto à hipótese empirista. O sujeito em geral e, por consequência, o sujeito epistêmico, é sujeito na medida em que ele se faz, na medida em que ele se constitui como um conjunto de relações, e não na medida em que é dado.

Ao conceber a possibilidade do conhecimento como um interacionismo construtivista, Piaget concorda em parte com a tese kantiana; entretanto, discorda que o espaço seja *a priori*, como acreditava Kant. Para o mestre genebrino, não existiriam as categorias da razão estabelecidas no kantismo:

espaço, tempo, objeto e causalidade seriam condições de compreensão do mundo, mas não dados *a priori*, e, sim, construídos pelo sujeito.

Para confirmar sua tese, Piaget (1973) recorre à psicologia infantil. Ao nascer, o bebê inicia o processo de adaptação ao mundo real. O mundo dos primeiros dias e meses é uma totalidade caótica que lhe impõe estímulos sonoros, luminosos, corporais, etc. É no funcionamento dos reflexos que o bebê organiza esta realidade: o que é para sugar, para prender, para olhar, etc. É a partir de esquemas muito primitivos, quase puramente orgânicos, que irão se desenvolver as relações espaciais, temporais, causais e de conservação.

Piaget (1979) estuda, a partir da perspectiva de construção do objeto, do espaço, da causalidade e do tempo, as reações das crianças durante os dois primeiros anos de vida e conclui que a construção do espaço acompanha o desenvolvimento cognitivo da criança como um todo.

Segundo Piaget (1975), a construção do espaço ocorre simultaneamente ao desenvolvimento cognitivo da criança e à sua evolução biológica. Para Piaget e Inhelder (1993), as primeiras relações espaciais estabelecidas pela criança são topológicas, e a partir delas é que são estabelecidas simultaneamente as relações projetivas e euclidianas.

As relações topológicas se referem às noções de vizinhança, separação, interior e exterior, com a utilização de expressões como "dentro", "fora", "ao lado de", "vizinho de", "região", "contínuo" e "descontínuo". As localizações que podem ser feitas, utilizando essas relações, não variam de acordo com o ponto de vista do observador. Por exemplo, se uma criança está dentro de uma roda de crianças, ela está no interior da roda tanto para ela quanto para seus companheiros (Nogueira, 2005).

Ainda de acordo com Nogueira (2005, p. 88-89), como desdobramentos das relações topológicas, surgem as projetivas, que requerem um grau maior de sofisticação. As noções de "direita", "esquerda", "em cima", "embaixo", "na frente", "atrás", etc., exigem que a criança seja capaz de fixar um ponto de referência para localizar os elementos. Essas relações variam de acordo com o observador, ou seja, são relativas.

> Ao contrário do que parecem, as noções de direita e esquerda não constituem um conhecimento social, isto é, um conteúdo a ser ensinado, mas uma operação mental que exige a

> reversibilidade do pensamento, dependendo, portanto, de diversas ações para serem adquiridas.

As relações euclidianas (que são estabelecidas em conjunto com as projetivas) referem-se às localizações e às medidas, envolvendo noções de comprimento, área e volume.

Essas três categorias de relações espaciais complementam-se, em um constante processo de interpenetração, que começa pelas topológicas, construídas pelas crianças desde muito pequenas. Estas vão se tornando capazes de estabelecer relações cada vez mais complexas, até chegar às euclidianas, que exigem um alto grau de abstração. Além disso, dentro de um mesmo tipo de relação, os conceitos obedecem a determinada gradação. Assim é que, nas euclidianas, por exemplo, primeiramente são construídos os conceitos de comprimento e medida, depois o de área e, finalmente, o de volume (Nogueira, 2005).

Algumas características da topologia aplicam-se bem ao espaço primitivo da criança. Aspectos como ignorar distâncias e ângulos, se preocupando com corpos deformáveis, mas sem rupturas, são observados nos primeiros meses de vida do sujeito. Geneticamente, o espaço topológico é o primeiro a se constituir. Dele derivam tanto o espaço euclidiano quanto o espaço projetivo, os quais se constroem paralelamente um ao outro, sendo simultaneamente distintos e solidários.

As primeiras intuições geométricas nas crianças são constituídas, de acordo com Kobayashi (2001), por relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade.

Todas essas relações descritas anteriormente constituem-se passo a passo, entre elementos de uma mesma figura ou de uma mesma configuração estruturada por elas e são independentes das deformações das formas em jogo, as quais não comportam conservação, nem distâncias, nem mesmo retas e ângulos.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), o espaço topológico é interior à figura. Ele exprime suas propriedades intrínsecas. Esse espaço não é, portanto, um espaço total que engloba todas as figuras: sua construção começa pela constituição dos objetos mesmo, com seu espaço interior, antes de se estender até às relações dos objetos entre si, num quadro mais vasto.

Ainda como resultado de suas investigações, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que, por volta dos 6 e 7 anos de idade, as crianças já começam a adquirir domínio das relações projetivas e euclidianas; ou seja, a partir dessa fase, sua percepção permite a constituição de geometrias que contemplem o espaço exterior ao sujeito e, assim, este passa a observar as transformações das figuras em suas várias projeções.

Com o espaço projetivo e euclidiano, o grande desafio para o sujeito está em situar os objetos e suas configurações uns em relação aos outros, segundo sistemas de conjunto, seja em projeções e perspectivas, seja em coordenadas dependentes de certos eixos, implicando a conservação das retas, dos ângulos ou das distâncias.

O espaço projetivo se constitui quando o objeto ou sua figura não são mais encarados em si mesmos, mas segundo o ponto de vista do sujeito. As relações projetivas, conforme Piaget e Inhelder (1993), são as que permitem a coordenação dos objetos entre si, relativamente a pontos de vista determinados. As noções de espaço (esquerda ou direita, acima ou abaixo, frente ou trás) vão se desenvolvendo na criança progressivamente, até a liberação do egocentrismo. Com isso ela consegue uma coordenação dos pontos de vista, por meio do agrupamento das relações características das três dimensões do espaço projetivo, ou seja, ela consegue, simultaneamente, reconstruir o ponto de vista dos outros e diferenciá-los do seu próprio.

O espaço euclidiano também deriva do espaço topológico e constrói-se paralelamente ao espaço projetivo. Ele coordena os objetos entre si em relação a um quadro de conjunto ou a um sistema de referência estável que exige, desde o início, a conservação tanto das distâncias quanto das superfícies. As relações euclidianas, para Piaget e Inhelder (1993), são aquelas que permitem localizar objetos em um sistema de referência, levando em consideração a conservação das distâncias e das dimensões. Apesar de haver diferenças entre os espaços projetivo e euclidiano, as relações projetivas (perspectivas) não precedem as relações euclidianas (medidas, coordenadas e proporções), nem o inverso. Ou seja, os dois sistemas são construídos simultaneamente, pois, quando a criança consegue coordenar os pontos de vista de um objeto é que ela chega a coordenar as distâncias e, portanto, a localizar objetos, tendo como referência um sistema de coordenadas.

Sendo assim, a organização gradativa das ideias geométricas segue uma ordem definida, iniciando-se pelas relações topológicas de uma figura, para mais tarde construir, de maneira simultânea, as projetivas e as euclidianas. No entanto, nas Propostas Curriculares observamos que a primeira das geometrias a ter seus conteúdos expostos na Educação Básica é a euclidiana; a topológica e a projetiva aparecem em momentos posteriores.

De acordo com as *Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná* (Paraná, 2008, p. 49), entende-se por Conteúdos Estruturantes "os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais".

Os conteúdos estruturantes propostos nas *Diretrizes Curriculares* (Paraná, 2008) para a Educação Básica da Rede Pública Estadual são: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções; e Tratamento da Informação. Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos:

> Geometria plana;
> Geometria espacial;
> Geometria analítica;
> Noções básicas de geometrias não euclidianas (PARANÁ, 2008, p.55).

As geometrias, no Ensino Fundamental, têm o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos, para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender:

> Os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;
> Geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;
> Geometria analítica: noções de geometria analítica utilizando o sistema cartesiano;

> Noções de geometrias não euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (Paraná, 2008, p. 56).

No Ensino Médio, devemos garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não euclidianas, ao abordar a geometria dos fractais, a geometria hiperbólica e elíptica.

Notamos, então, que, de acordo com estas *Diretrizes Curriculares*, a primeira das geometrias a ser trabalhada nas escolas é a euclidiana, contrariando a ordem genética das geometrias, estabelecida por Piaget, para quem, conforme já citado anteriormente, as primeiras intuições geométricas nas crianças são as topológicas (uma das geometrias não euclidianas).

Entretanto, por causa da sua importância para a matemática e por envolver ideias básicas passíveis de serem construídas bem antes do Ensino Médio e Superior, como a de interioridade ou projeção, entende-se que a ação pedagógica acerca dos conteúdos de geometrias pode ser iniciada muito antes disso. Assim, esta pesquisa se propôs a investigar se crianças de 8 a 12 anos identificam, compreendem e mobilizam algumas ideias básicas (continuidade, vizinhança, projeções) para a construção de conceitos geométricos euclidianos ou não euclidianos.

Considerando a importância das geometrias para a matemática e para outras áreas, e as nossas teorias de sustentação (Piaget, 1973; Vergnaud, 1990), nossa hipótese é de que ideias básicas dessas geometrias podem e devem ser construídas bem antes do momento em que são apresentadas oficialmente aos alunos. Entendemos também que esta pesquisa oferece subsídios para a inclusão de geometrias não euclidianas nas *Diretrizes Curriculares*, comprovando que elas podem ser apresentadas no nível de ensino que nos propusemos a investigar.

## O problema e os objetivos da pesquisa

Sustentados teoricamente em Piaget e Inhelder, formulamos o questionamento, a partir da hipótese inicial de que crianças da referida faixa etária identificam, compreendem e mobilizam as ideias básicas para a construção de conceitos geométricos euclidianos ou não. Concordamos com Vergnaud (1990), quando este estabelece que um conceito demora muito tempo para ser construído; e, assim, nossa intenção foi mostrar que as ideias básicas de geometrias podem e devem ser exploradas, ainda que de maneira implícita ou informal, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A questão que apresentamos, então, é: como trabalhar pedagogicamente essas ideias, de maneira a favorecer a construção de conceitos geométricos mais complexos, sejam eles euclidianos ou não? Para isso foi necessário identificar a forma como crianças que cursam o Ensino Fundamental mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema, o que se transformou no objetivo geral desta pesquisa.

Para a consecução desse objetivo, foi necessário estabelecer algumas das ideias básicas envolvidas em conceitos essenciais de geometrias e formular situações-problema envolvendo tais ideias.

Entendemos que algumas das ideias básicas necessárias à construção de conceitos geométricos – sejam as geometrias em questão euclidianas ou não – são as seguintes: as noções de ponto e do contínuo, as operações de secção, distâncias, caminhos fechados – ângulos e triângulos, e conservação de área.

## Metodologia

Foram aplicadas cinco atividades compostas de situações-problema, que se constituíram nos instrumentos de apoio para as entrevistas clínicas. A pesquisa foi realizada com dez crianças de 8 a 12 anos de idade, em uma escola particular localizada no município de Maringá, norte do Paraná. Foi escolhido tal colégio devido à facilidade de contato com sua direção, uma vez que um dos pesquisadores deste trabalho já havia atuado ali como professor no início do ano de 2010. Para melhor captação dos pormenores, todas as entrevistas e a aplicação dos exames piagetianos foram filmados, com autorização dos entrevistados e de seus responsáveis legais. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, na qual empregamos o Método Clínico Crítico Piagetiano e a entrevista semiestruturada, por entender esse encaminhamento como viável para a consecução dos objetivos.

Em consonância com o referencial teórico adotado, optamos pelo

Método Clínico Crítico de Piaget, que consiste na realização de entrevistas nas quais o entrevistador faz perguntas a uma criança e, baseado nas reações dela, observa, levanta hipóteses a respeito de sua capacidade conceitual e continua a fazer mais perguntas, de acordo com tais hipóteses. O Método Clínico surgiu da necessidade, identificada por Piaget, de elaborar uma técnica de pesquisa que não fosse extremamente rígida como o teste padronizado e, ao mesmo tempo, utilizasse os benefícios da observação, facilitando a realização de experiências, de avaliação da inteligência das crianças que integravam seu universo de pesquisa (Wadsworth, 1984). Esse procedimento é conhecido como "Método Clínico Crítico" ou "método de exploração crítica", por utilizar argumentações contrárias às afirmações do sujeito, captando não apenas a firmeza de suas convicções, mas também seu processo de pensamento e a estrutura característica de certo estádio de desenvolvimento.

A validade desse método se justifica porque ele se destina a decifrar os domínios do pensamento infantil, ao mesmo tempo em que possibilita uma sistematização das condutas originais, muitas vezes imprevisíveis, do pensamento da criança. É por meio do Método Clínico Crítico que temos a possibilidade de investigar a forma como a criança está pensando sobre uma determinada situação, o que outros testes e a pura observação não permitem.

Os protocolos utilizados foram elaborados depois do estudo teórico e das diversas correções de percursos realizadas após aplicação de "pré-testes" ou pilotos aplicados com algumas crianças. Devemos esclarecer que, pela própria natureza do Método Clínico, os protocolos não foram rígidos; houve alterações sempre que o sujeito indicou caminhos não previstos inicialmente. Existiu, contudo, o direcionamento contínuo do desenvolvimento das entrevistas, de maneira a ser possível investigar o que pretendemos.

Como o objeto de estudo deveria ser a identificação das relações estabelecidas pela criança, era fundamental que ela descrevesse, da maneira mais fiel possível, os raciocínios utilizados na solução das situações propostas, o que não seria possível apenas mediante a observação e a análise da produção escrita. Dessa forma, fizemos essa opção, em razão da necessidade de englobar a ideia do subjetivo, considerando não apenas o que é verbalizado pelo entrevistado, mas também aquilo que é omitido por ele.

## Local e seleção das crianças colaboradoras da pesquisa

A seleção das crianças foi feita em conjunto com a diretora do colégio. Foram entregues a ela os termos de consentimento para a eventual filmagem, que seriam posteriormente repassados aos responsáveis das crianças. A seleção foi realizada de acordo com os seguintes critérios:

- Idade entre 8 e 12 anos.
- Crianças que frequentassem diariamente a escola.
- Crianças que não apresentassem laudo médico relativo a problemas cognitivos.
- Crianças que não tiveram contato com as geometrias não euclidianas formalmente como conteúdo escolar.

A opção pela faixa etária dos 8 aos 12 anos se deu em razão de que as *Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná* estabelecem que conteúdos básicos de geometrias não euclidianas, particularmente noções topológicas, devem ser apresentados às crianças na segunda fase do Ensino Fundamental, aprofundando-os e complementando-os, no Ensino Médio, com alguns conteúdos pertinentes a outras geometrias. Entretanto, a psicogenética afirma que os sujeitos começam, bem antes dessa idade, a construir e representar o espaço, estabelecendo relações topológicas. As estruturas cognitivas acerca dos sistemas de coordenadas que são essenciais ao estabelecimento das relações projetivas são construídas por volta dos 8 anos de idade, e com 12 anos (início do estádio operatório formal) ocorre a elaboração de noções euclidianas e projetivas, a fim de formalizar as noções já construídas nos estádios anteriores.

Para representar uma criança, foram aqui utilizadas as três letras iniciais do seu nome e, entre parêntesis, a sua idade; por exemplo, se uma criança se chama Maria e tem nove anos e quatro meses, ela será representada pelo símbolo MAR (9:4).

## Os exames

Com base no estabelecimento das ideias básicas que foram investigadas, buscamos referenciais teóricos que pudessem subsidiar a elaboração das situações-problema que se constituíram em instrumentos de suporte para as entrevistas.

A escolha recaiu nos seguintes textos: *A representação do espaço na criança*, de Piaget e Inhelder (1993); *The child's conception of geometry* de Piaget, Inhelder e Szeminska (1960). Como orientação para utilizar o método Clínico Crítico Piagetiano, consultamos *Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*, de Wadsworth (1984). Das cinco provas aplicadas, a I, a II e a primeira parte da V foram adaptadas dos livros citados anteriormente, e foram elaborados especificamente para esta investigação os exames III e IV, além da segunda parte do exame V.

A ordem de realização dos cinco exames em cada entrevista foi: as noções de ponto e do contínuo; as operações de secção, distâncias, ângulos e triângulos (superfície hiperbólica); ângulos e triângulos (superfície esférica); e, por fim, a conservação da área.

## Os Instrumentos de Pesquisa

## Primeiro exame: as noções de ponto e de contínuo

### *Objetivos da atividade:*

- Identificar quais as noções que a criança tem sobre o ponto e o contínuo.
- Compreender o modo como a criança concebe o seccionamento de uma figura ou de uma reta até seus contornos últimos.
- Identificar quais são os procedimentos das crianças, referentes à representação da composição e da recomposição de figuras geométricas.

### *Procedimentos:*

Foi entregue a cada criança uma folha de sulfite branco em que havia um quadrado representado. Em seguida solicitamos a ela que desenhasse em outra folha, agora em branco, um quadrado tão pequeno que não fosse possível desenhar outro menor. A seguir, em outra folha de sulfite em branco, solicitamos que fizesse o maior quadrado possível.

A intenção dessas primeiras questões, sem referenciar ainda nem o contínuo nem o ponto, era orientar o pesquisador sobre a capacidade do sujeito de seriar ou encaixar grandezas.

O mesmo procedimento foi adotado em relação a um segmento de reta que foi apresentado à criança, impresso em uma folha de sulfite branca. Inicialmente foi solicitado que desenhasse um segmento de reta medindo a metade da medida do segmento inicial e depois a metade da metade, e assim por diante. Quando ele atingiu tamanhos tão pequenos, impossíveis de ultrapassar pela representação gráfica, foi indagado se não poderíamos continuar esses desenhos indefinidamente.

Tratava-se, pois, essencialmente, de questionar à criança se existe ou não o último termo da partição e, se existe, qual a sua configuração.

Como contraprova, investigamos a capacidade da criança para recompor o todo a partir de seus elementos. Para isso, perguntávamos à criança se poderia imaginar uma reta como constituída por um conjunto de pontos. Para auxiliá-la, sempre que necessário, era indicado que intercalasse um ponto entre dois pontos marcados pelo pesquisador.

## Segundo exame: as operações de secção

### *Objetivo da atividade:*

- Identificar o modo como a criança estabelece propriedades de um determinado sólido geométrico a partir de um ponto de vista afastado, isto é, estando situada em uma posição da qual considera os sólidos geométricos tais como eles parecem desse ponto de vista determinado.

### *Procedimentos:*

Foi apresentado à criança um cilindro em massa de modelar (ou um prisma) e uma faca grande e, antes de cortá-lo transversalmente, isto é, segundo um plano paralelo à base, foi solicitado que desenhasse em uma folha de sulfite branca a forma que tomaria a superfície de cada secção. Para tanto, encostamos a lâmina da faca na massa, sem cortá-la, mas indicando com precisão tanto o lugar em que deveria ser feita a secção como a direção desta.

Não imediatamente após, mas durante o interrogatório, o pesquisador formulava as mesmas questões e adotava os mesmos procedimentos para uma secção longitudinal (perpendicular à base do cilindro, do prisma, etc.).

Os sólidos geométricos de massa de modelar apresentados às crianças foram:

1) Um cilindro

2) Um prisma triangular

3) Uma esfera

4) Um anel formado por um cordão cilíndrico de massa de modelar, mas fechando-se em si mesmo (Figura 1)

Figura 1 – A representação de um anel cilíndrico de massa de modelar.

Fonte: foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

5) Uma estrela de quatro pontas com secção, seja de uma das pontas, seja da extremidade de uma ponta à extremidade da ponta oposta, como expõe a Figura 2:

Figura 2 – A representação de uma estrela de quatro pontas de massa de modelar

Fonte: foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

6)Um helicoide formado de um cordão de massa de modelar enrolado à maneira de um caracol alongado ou de um saca-rolha, que podemos ver na Figura 3:

Figura 3 – Representação de um helicoide em massa de modelar

Fonte: Foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

## Terceiro exame: distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica)

### *Objetivos da atividade:*

- Identificar se os alunos conseguem diferenciar distâncias em uma superfície plana das de uma não plana.
- Investigar se os alunos compreendem que a área de um triângulo plano é diferente da área de um triângulo hiperbólico e a forma como o fazem.
- *Procedimentos:*

Foi apresentado para a criança um objeto representando uma pseudoesfera, como ilustra a Figura 4:

Figura 4 – Objeto representando uma pseudoesfera

Fonte: foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

Em uma das trombetas existia uma fita amarela, que representava a distância entre dois pontos quaisquer nesta superfície. Em seguida, foi colocada embaixo desse objeto uma folha sulfite branca, para assim ser questionado: "*Se tomarmos estes dois pontos, que utilizamos para medir o comprimento da fita amarela, e fizermos dois furos na trombeta, perpendiculares à superfície da folha* *sulfite, projetando-os nesta, e depois medirmos a distância entre eles (na superfície plana), o comprimento da fita amarela que vamos utilizar para ligá-los na folha sulfite é o mesmo ou diferente da quantidade de fita utilizada na trombeta?".*

Na outra parte da trombeta existia uma representação de um triângulo, conforme a Figura 5:

Figura 5 – A representação de um triângulo na superfície da pseudoesfera

Fonte: foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

Primeiramente solicitamos à criança que representasse, em uma folha sulfite, exatamente o triângulo que ela observava. Em seguida questionamos: "*Quais as diferenças entre o triângulo que você acabou de representar e um triângulo plano?". "Você poderia dizer qual deles possui região interna maior?". "Por quê?*". "*E o que acontece com os ângulos internos deste triângulo*?".

## Quarto exame: ângulos e triângulos (geometria esférica)

### *Objetivo da atividade:*

- Investigar se as crianças percebem que, em uma superfície esférica, é possível o retorno ao ponto de partida, após caminhar x metros em direção ao sul; x metros na direção leste e mais x metros na direção norte, enquanto na superfície plana isso não é possível.

### *Procedimentos:*

Apresentamos para a criança a seguinte história:

"Um urso saiu de sua casa e caminhou cem quilômetros ao sul. Depois virou a leste e caminhou mais cem quilômetros em linha reta. Então virou novamente e caminhou por mais cem quilômetros ao norte".

Em seguida foram entregues folhas de sulfite e uma esfera de isopor, juntamente com uma caneta esferográfica. Solicitamos à criança que esboçasse na folha de sulfite e na esfera de isopor o percurso do urso. Indagamos então: "*Seria possível em alguma das superfícies o urso voltar à sua casa?*". "*Por quê?*".

## Quinto exame: a conservação da área

### *Objetivo da atividade:*

- Investigar em que momento as crianças percebem que há conservação da área, isto é, independentemente da disposição das "casas" ou do posicionamento dos cartões, a área permanece inalterada. Entendemos que, com base nesses dados, poderemos compreender como as crianças mobilizam a ideia de conservação de área e observar se atividades como essas podem favorecer a construção da conservação para os que ainda não a manifestaram.

### *Quinto exame: Primeira etapa*

A atividade consistiu em mostrar às crianças duas placas de isopor, representando duas pastagens. Em cada um desses campos foram colocadas uma vaca, que iria usufruir dos pastos, e algumas casas, também de isopor, dispostas em cada campo de maneira diferente. Em seguida, alteramos a estrutura aparente dos campos, retirando ou rearranjando a posição das casas. Será que a criança reconhecia a conservação da área (quantidade de pasto), apesar de as casas estarem dispostas de formas distintas, porém estando em mesma quantidade, em ambos os campos?

### *Procedimentos:*

Inicialmente colocamos uma vaca em miniatura, de plástico, em cada campo (duas placas de isopor com as mesmas dimensões), e questionamos qual dos dois pastos possuía mais grama para a vaca comer. Em seguida, contamos a seguinte história:

"Com o passar dos anos, ambos os campos foram sendo povoados, e algumas casas foram construídas, porém, a disposição com que as casas foram levantadas é diferente em cada campo".

Perguntamos novamente onde havia mais grama para a vaca comer. E por quê. Com base nas repostas obtidas, fomos modificando a disposição das casas, sempre questionando sobre a quantidade de grama dos dois campos.

## *Quinto exame: Segunda etapa*

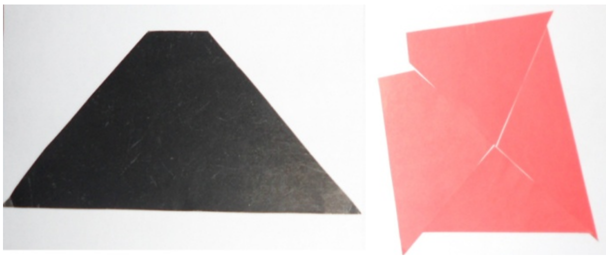
Na segunda atividade, foram apresentadas para as crianças duas figuras em papel cartão: uma representando um trapézio isósceles (cor preta) e a outra, um polígono seccionado em quatro partes (cor vermelha). O primeiro objeto, de cor preta, era um recorte único, isto é, que não apresentava secções; e o segundo, de cor vermelha, era seccionado em quatro partes distintas.

Primeiramente apresentamos, simultaneamente, a representação do trapézio preto e um arranjo das quatro partes do polígono de cor vermelha, de forma que este formasse uma representação de um polígono diferente do trapézio isósceles. Em seguida questionamos qual dos dois objetos apresentava maior área. Após esta primeira parte, rearranjamos as partes do polígono vermelho, de forma que este apresentasse dimensões iguais à representação do trapézio preto, e após, fizemos os mesmos questionamentos aos sujeitos. Queríamos, dessa forma, analisar, por meio desses questionamentos, se a criança compreendia que, mesmo formando figuras distintas, a área total dos dois trapézios continuava sendo a mesma.

## *Procedimentos:*

Foram apresentadas para as crianças duas figuras em papel cartão que representavam: uma, um trapézio isósceles de cor preta; e a outra, um polígono formado por quatro partes de papel cartão de cor vermelha, conforme ilustra a Figura 6:

Figura 6 – Rearranjo das partes em vermelho para a comparação das áreas



Fonte: foto retirada pelos próprios pesquisadores deste artigo

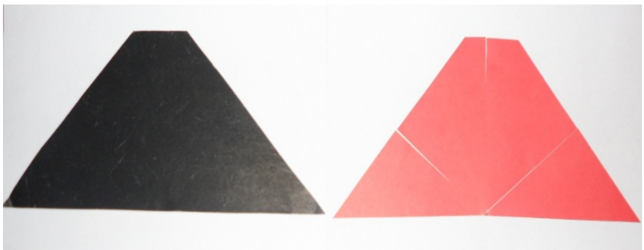
## *Primeiro Momento:*

Após esta apresentação, perguntamos qual das duas formas geométricas (trapézio isósceles e um polígono formado com as quatro partes do papel cartão) possuía maior área.

## *Segundo Momento:*

Em seguida, posicionamos as quatro peças do papel cartão em vermelho, de forma que este fosse idêntico (com as mesmas dimensões) ao trapézio isósceles preto não seccionado, como ilustra a Figura 7. Com base nisso, questionamos qual dos dois apresentou maior área.

Figura 7 – Comparação da medida das áreas dos trapézios



Fonte: foto retirada pelos pesquisadores deste artigo

## *Terceiro Momento:*

Para finalizar a atividade, rearranjamos novamente as quatro partes do papel cartão em vermelho, de forma que este formasse um polígono qualquer; e, assim, perguntamos novamente qual dos dois possuía maior área.

## Os procedimentos da pesquisa

Foi realizada uma entrevista individual com cada criança colaboradora da pesquisa, seguindo as orientações do Método Clínico Crítico Piagetiano. As entrevistas foram filmadas com uma câmera digital, e os vídeos, assim como os materiais produzidos pelas crianças, constituíram as informações para análise. Cada uma das entrevistas – realizadas em salas cedidas pela própria escola, com excelentes condições de luz e silêncio – durava aproximadamente trinta minutos, com a aplicação dos cinco exames. Todas foram filmadas com uma câmera operada manualmente por um dos colaboradores do projeto.

Cada situação-problema foi apresentada para criança de forma oral e, se ficasse constatado que a criança não tinha entendido o problema, era explicado novamente o que se pedia para a situação-problema. Também foi explicado que ela poderia resolver as situações-problema livremente, utilizando números, desenhos ou palavras. Após a criança ter feito suas anotações referentes à resolução da situação-problema, ela era questionada acerca dos procedimentos utilizados e levada a interpretar as notações utilizadas. A conversa foi orientada por um roteiro semiestruturado, contendo algumas questões predeterminadas, com a finalidade de direcionar as explicações para os objetivos da pesquisa. Como cada exame tinha objetivos específicos, esse roteiro era diferente para cada atividade, mesmo tendo em vista que o objetivo principal era o de investigar como os estudantes do final do Ensino Fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema.

## Análise dos exames aplicados

## Primeiro exame: a noção de ponto e do contínuo

Das questões que foram aplicadas neste exame, o que ficou mais claro foi a dificuldade de cada sujeito em abandonar aquilo que era concreto e conceber as figuras como infinitamente grandes ou infinitamente pequenas. A investigação realizada nos permitiu observar que a construção do contínuo, a qual se concretiza no nível IV (próximo dos 12 anos), acaba por ser uma síntese das relações topológicas elaboradas em níveis mais elementares; possibilitou também compreender quão complexas são as noções de ilimitado e de infinitamente grande e pequeno para a criança.

O objetivo era investigar a forma como os estudantes do final do Ensino Fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema – e, em particular, os conceitos de ponto e de contínuo. Por meio desta atividade, pudemos entender que os sujeitos conseguem mobilizar tais noções em situações-problema, algo que Piaget e seus colaboradores já tinham observado. No entanto, a grande questão a discutir é a de como tais estudantes conseguem mobilizar essas noções de ponto e de contínuo nos problemas.

Os resultados obtidos com esta atividade deixaram claro que, por volta de 12 anos de idade, tais conteúdos podem e devem ser trabalhados no âmbito escolar. De fato, sujeitos da sétima série do Ensino Fundamental podem ser apresentados a noções básicas de objetos geométricos, utilizando propriedades do infinitamente grande e infinitamente pequeno, composição e decomposição do todo a partir de suas partes. É possível também instigá-los a imaginar aquilo que é abstrato, abandonando a ideia do concreto.

Para que isso possa ocorrer da forma mais natural possível, sem acarretar obstáculos didáticos aos alunos, algumas atividades como as que acabamos de apresentar são necessárias, porém ainda não são suficientes. O que deve ficar como sugestão para os docentes é que tais conceitos são ainda um tanto quanto confusos para os estudantes, porém, o uso do lúdico e questões que os façam raciocinar em algo novo são de fundamental importância para a construção de novas estruturas do pensamento.

Como as relações topológicas são necessárias para a compreensão do contínuo, conforme estabelecido anteriormente, e como elas são construídas em torno de dois anos, recomendamos que atividades que favoreçam esta construção sejam sistematicamente ofertadas desde a Educação Infantil, tais como colar objetos dentro e fora de uma curva fechada; colocar objetos em lugares determinados pelo professor (dentro, fora, perto, longe, ao lado de); colocar e retirar objetos de dentro de outros, etc., aprofundando essas atividades, para que as crianças possam identificar ordem, envolvimento, vizinhança, já nos anos iniciais, de tal forma que a síntese dessas relações esteja consolidada, em torno dos 11 ou 12 anos, para o trabalho com o contínuo.

## Segundo exame: as operações de secção

As informações obtidas neste exame mostraram que, dentre as reações observadas no curso dos níveis II e III (crianças com idade em torno dos 10 anos) para as formas espirais, uma característica muito interessante se sobressaiu: a dificuldade dos sujeitos em representar a superfície de secção prende-se a uma indiferenciação muito resistente entre a geometria dos pontos de vista (representação projetiva) e a geometria dos objetos (deslocamentos efetuados no espaço euclidiano).

Por isso, quando pedimos às crianças para prever a forma de uma superfície de secção – o que as obrigou a imaginar, simultaneamente, a operação euclidiana do corte (deslocamento inerente à geometria dos objetos) e o sólido projetivamente, para dissociar o "ponto de vista interior" do plano de secção (operação dependente da geometria dos pontos de vista) –, não causou surpresa que aquelas que se encontravam em níveis mais elementares tivessem deixado todas as relações indiferenciadas: seus desenhos figuram, ao mesmo tempo, a forma do objeto com seus diversos planos misturados, o desenho da linha de secção ou do ato de cortar.

A descoberta progressiva da superfície de secção testemunha uma dissociação gradual entre as geometrias dos pontos de vista e a dos objetos, além de uma interação cada vez mais estreita entre as operações de projeção e de secção perspectiva. É assim que, para prever a forma que adotará a superfície de secção do cilindro, de um helicoide, de uma esfera, é necessário primeiro imaginar exatamente o movimento da faca e a linha exterior que ela seguirá em seu deslocamento. Mas, para ser capaz dessa antecipação, é preciso poder imaginar esse volume projetivamente, quer dizer, sob os diferentes ângulos perspectivos possíveis.

No que se refere ao objetivo de verificar como os estudantes do final do Ensino Fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema, e em particular neste exame – *As operações de secção* –, alguns aspectos merecem ser destacados. Por meio da atividade aplicada, foram corroborados os estudos realizados por Piaget e seus colaboradores, que enfatizavam que, por volta dos 12 anos de idade, as crianças conseguem mobilizar todas as operações cognitivas relativas à secção de sólidos geométricos.

Tudo isso que foi relatado no último parágrafo, Piaget e Inhelder (1993) constataram em seus estudos, realizados durante muitos anos. No entanto, a principal meta é um apoio pedagógico acerca do modo como esses estudantes mobilizam tais ideias básicas em situações-problema. Entendemos que atividades cuja finalidade é trabalhar com questões de secção de sólidos são mais complexas do que imaginamos. Por trás de uma "simples" representação de uma superfície, existem inúmeros fatores que têm de ser cuidadosamente trabalhados com os estudantes, tais como a interiorização de uma possível superfície gerada por meio de projeções em perspectivas de vários planos, para, assim, realizar a representação daquilo que se tem em mente.

Para que os alunos possam construir essas noções básicas, devemos fazê-los pensar por si, isto é, o professor deve estimulá-los a raciocinar por meio de atividades que possam mostrar o conteúdo em questão. Muitas aulas de cunho puramente expositivo são ministradas, sem considerar que o aluno pode trabalhar seu espírito investigativo. Inicialmente, podem ser apresentadas atividades que os façam investigar sobre intersecções de planos e superfícies, antes de mencionar o que é intersecção – atividades como as realizadas aqui e outras, que façam os alunos pensarem sobre a ideia de cortes de objetos, devem ser frequentes e as mais elementares para o estudo deste tópico.

Sabemos que, com 12 e 13 anos de idade, as crianças já possuem estruturas que lhes possibilitam realizar todas as atividades concernentes à secção de sólidos. Portanto, antes dessa idade, podem ser propostas atividades investigativas de secções de sólidos, para, posteriormente, por meio de *softwares* e materiais concretos, expor tais conteúdos de forma mais aprofundada.

## Terceiro exame: distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica)

Os dados obtidos com a aplicação deste exame indicaram que as crianças com idade inferior a 13 anos não mobilizam a ideia básica de distância, quando as superfícies possuem dimensões distintas (bi e tridimensional). Por conseguinte, mesmo conseguindo, por volta dos 6 anos de idade, estimar distâncias entre dois ou mais objetos em uma superfície plana, quando se comparam distâncias entre dois objetos em superfícies distintas (folha sulfite e trombeta), essa atividade se torna demasiadamente complexa: ela será possível, provavelmente, somente por volta dos 11 anos de idade.

Outra observação interessante se refere à representação dos triângulos. Não encontramos, nesta pesquisa, sujeitos que conseguissem distinguir os triângulos e suas propriedades (área e soma de ângulos internos) em sua totalidade. Mesmo de posse da trombeta, as propriedades questionadas não foram respondidas com sucesso, e a característica inicialmente percebida pelas crianças foi relativa aos lados do triângulo que está representado na trombeta (o que ocorre por volta dos 10 anos de idade). Mesmo com 12 anos, o máximo que os sujeitos conseguem diferenciar é que os triângulos presentes na folha sulfite e na trombeta possuem áreas distintas, porém os alunos não conseguem visualizar que as medidas dos ângulos internos são diferentes.

Esses resultados indicam que essas noções básicas para a apresentação da geometria hiperbólica podem e devem ser apresentadas em sala de aula, mesmo que as crianças não percebam que a soma dos ângulos internos não é 180º. Uma sugestão para que essas ideias básicas possam ser mais bem apresentadas seria utilizar materiais que representem essas superfícies, fazendo com que as crianças assimilem melhor o caráter distinto das superfícies (plana e hiperbólica). Materiais, por exemplo, como os que utilizamos: uma trombeta para simbolizar uma superfície hiperbólica e uma folha sulfite, para o plano.

## Quarto exame: ângulos e triângulos (geometria esférica)

Os dados obtidos com a aplicação deste exame indicaram que as crianças com idade superior a 12 anos identificam e mobilizam a ideia básica de que estamos trabalhando em superfícies distintas (plano e esfera); por conseguinte, os trajetos realizados serão distintos.

Outra observação interessante e que não constava nas questões iniciais se refere ao contato do aluno com a esfera de isopor. As respostas apresentadas pelos alunos que conseguiam mobilizar as ideias básicas dessa geometria para a resolução da situação-problema indicaram que somente de posse da esfera de isopor é que conseguiam realizar o trajeto do urso de forma correta em tal superfície.

Apesar de este não ser objetivo desta investigação, esses resultados indicam que essas noções básicas da geometria esférica podem e devem ser apresentadas em sala de aula com materiais que representem essas superfícies, ou seja, as crianças assimilam melhor o caráter distinto das superfícies (plana e esférica) com materiais que as possam representar, como, por exemplo: uma bola de basquete para simbolizar uma superfície esférica e uma folha sulfite, para o plano.

## Quinto exame: a conservação da área

Os dados obtidos com a aplicação das duas etapas deste exame indicaram que as crianças com idade próxima a 12 anos mobilizam a ideia básica de conservação de área em situações problema.

Segundo Facco (2003), e em conjunto com a análise das atividades realizadas neste quinto exame, podemos constatar que a maneira como os professores apresentam o conceito de área para os alunos nas escolas é inapropriada. Por meio da segunda etapa da atividade, observamos crianças com 12 anos de idade (sétima série do Ensino Fundamental) tomando as fórmulas matemáticas como referência para comparação de áreas (para isso verificam unicamente o comprimento da medida da base da figura) e deixando de lado as noções básicas do conceito área de figuras geométricas, como a superfície que esta figura apresenta. Por outro lado, encontramos crianças com 8 e 10 anos de idade que respondiam corretamente as questões de conservação de área, quando sequer haviam tido contato com as fórmulas matemáticas que poderiam calcular seu valor, utilizando, para isso, a ideia de quantidade de espaço que cada figura ocupava.

Isso provavelmente ocorre porque, ao apresentar o conceito de área como um número, obtido por meio de algumas fórmulas, ideias básicas que são de vital importância para a compreensão desse conceito deixam de ser trabalhadas (como, por exemplo, a noção espacial de área), o que acarreta equívocos como os apresentados por alguns sujeitos com 12 anos de idade.

Criticamos a escola que age dessa maneira, uma escola conteudista, que se preocupa mais com definições e fórmulas, apreendidas memoristicamente, quando o que deveria ser enfatizado são os aspectos conceituais, as ideias. Recomendamos, para um fazer pedagógico mais adequado sobre o conteúdo de áreas, que os conceitos sejam privilegiados, utilizando materiais instrucionais que permitam trabalhar, por exemplo, com a ideia de quantidade de espaço ocupado, deixando inicialmente de lado a forma como se encontra o valor que este espaço apresenta. Muitas atividades devem ser realizadas, passando, gradativamente, das que utilizam apoio concreto para as representações gráficas, para as que abstraiam o conceito, permitindo a generalização.

## Considerações

Uma das principais justificativas para a não introdução do tema "geometrias não euclidianas" no Ensino Fundamental poderia ser a maior dificuldade para sua aprendizagem do que para a geometria euclidiana. Mas, com os resultados desta pesquisa, é possível afirmar que essa não é uma justificativa válida.

Nesta investigação, constatamos que crianças com idade em torno de 10 anos, que já constituíram o sistema de coordenadas, conforme resultados de Piaget e Inhelder (1993), obtêm sucesso na resolução de situações-problema envolvendo ideias básicas da geometria esférica (exame IV). Outra constatação importante é que, com a noção de distância, que se consolida em torno dos 9 anos de idade, segundo resultados de Piaget e Inhelder (1993), as crianças conseguem mobilizar ideias básicas da geometria hiperbólica (exame III).

Se noções como a de distância e de sistemas de coordenadas, que são essenciais para a compreensão de geometrias não euclidianas, são consolidadas nos sujeitos ao redor dos 10 anos (momento este em que o aluno cursa o quinto ano do Ensino Fundamental), tais geometrias podem ser apresentadas já na segunda fase do Ensino Fundamental, contrariando as afirmações mais comuns entre os professores de que os alunos apresentam dificuldades nos conceitos de geometrias euclidianas e, por conseguinte, seriam maiores as dificuldades com as geometrias não euclidianas (Lovis, 2009).

Uma das explicações para a possível relutância dos professores no fazer pedagógico com as geometrias não euclidianas é o seu despreparo, conforme apontado por Santos (2009) e Lovis (2009), que constataram, inclusive, que professores do Ensino Fundamental, além de pouco conhecer as geometrias não euclidianas, possuem conhecimentos muito restritos sobre a geometria euclidiana. Assim, o problema com o ensino das geometrias não euclidianas envolve uma questão mais ampla, já que, de maneira geral, os professores poucas oportunidades possuem de estudar geometria (euclidiana ou não) em sua formação inicial ou continuada.

Nossa investigação possibilita questionar algumas escolas que ainda estão preocupadas em contemplar todo seu conteúdo anual, priorizando a quantidade de conceitos que serão apresentados, ao invés de trabalhá-los em menor quantidade, porém com maior qualidade. Recomendamos, com base nesta pesquisa, que conceitos importantes – como comprimento e área – não sejam trabalhados (apresentados como definições e fórmulas) em poucos minutos, o que pode acarretar falhas na construção de desses conceitos. Justificamos tal afirmação pelos resultados obtidos com o quinto exame, em que os três sujeitos com maior idade (11 e 12 anos) não realizaram a atividade da conservação da área corretamente, por procurarem utilizar conhecimentos escolares na solução da situação-problema proposta. Esses resultados indicam que o conceito de área não estava construído pelos sujeitos, pois associaram área unicamente a um número obtido por fórmulas matemáticas, deixando de lado a estreita vinculação entre área e a "dimensão" ocupada por uma superfície. Sujeitos com 8 anos de idade, que sequer foram apresentados a fórmulas matemáticas para o cálculo da área, responderam as questões dessa atividade com sucesso.

Os professores devem compreender que um determinado conceito se constrói ao longo de muito tempo e envolve ideias básicas que, muitas vezes, não estão explícitas na apresentação formal de tais conceitos. De acordo com Vergnaud, os conceitos matemáticos são construídos a partir de uma variedade de situações, e cada situação normalmente não pode ser resolvida com a ajuda de apenas um conceito. Por exemplo, para que se possa compreender que uma reta é constituída por um conjunto infinito de pontos, são necessárias ideias básicas de ponto, vizinhança, continuidade, envolvimento, ideias mobilizadas desde muito cedo pelas crianças, conforme ficou comprovado anteriormente (Debastiani; Nogueira; Franco, 2010) e nesta investigação (exame I). Entretanto, ao não serem instigados a mobilizar tais ideias em situações-problema propostas pela escola e nem a refletir sobre elas, as crianças podem acabar desconsiderando-as, para utilizar fórmulas e regras que geralmente são apresentadas desvinculadas dessas noções, conforme mostrou a realização do Exame V.

No que se refere às questões metodológicas, as escolas devem se preocupar em desenvolver o espírito investigativo do sujeito desde os anos iniciais de escolarização. Para tanto, devem ser propostas situações-problema do tipo das que foram elaboradas para os exames desta pesquisa. Os professores, ao preparar essas atividades, devem sempre considerar o estádio no qual a criança se enquadra (sensório-motor, pré-operatório ou operatório concreto) e as noções geométricas que ela possui, considerando-as como apoio para a construção de novos conhecimentos.

Dessa forma, os resultados encontrados nesta investigação indicam que crianças entre 8 e 12 anos, que cursam o Ensino Fundamental, conseguiram mobilizar algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. No entanto, nem todos os sujeitos tiveram sucesso em suas considerações. Para que maior número de sujeitos possa realizar tal mobilização de ideias, sugerimos algumas possibilidades que visam a um melhor ensino das escolas.

Primeiramente, como professores, devemos considerar que um conteúdo geométrico está arraigado a noções muito primitivas de cunho topológico, que são progressivamente construídas, até a elaboração das estruturas projetivas e euclidianas, por volta dos 6 anos, que se consolidam por meio de um processo sincrônico e solidário.

Dessa forma, para afirmar como um sujeito mobiliza tais ideias básicas (noção de contínuo, de geometria da superfície esférica, de conservação de área, entre outros), devemos considerar como prioridade a construção dos elementos mais primitivos. Por exemplo, não devemos falar em continuidade, sem apresentar ideias básicas de vizinhança, ordem e separação, pois, como foi visto, o contínuo é a síntese dessas estruturas topológicas; da mesma forma, não devemos apresentar noções de geometria esférica, sem antes serem trabalhadas as estruturas do sistema de coordenadas.

Para que haja a mobilização das ideias básicas em situações problemas pelas crianças, o professor tem papel fundamental. O docente precisa ter em conta toda essa construção de um conceito ao longo dos anos, deve verificar que isso não se faz em poucas aulas. E mais importante ainda: devemos considerar as ideias primitivas para a consolidação das ideias mais complexas. Para isso, atividades investigativas devem ser aplicadas desde os anos iniciais.

# Referências

BECKER, F. *A epistemologia do professor:* o cotidiano da escola. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1994.

DEBASTIANI, J. N.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S. A construção do espaço geométrico por crianças entre 03 e 10 anos. Revista *UNOPAR Científica Ciências Exatas e Tecnológicas*, Londrina, v. 9, n. 1, p. 71-78, nov. 2010.

FACCO, S. R. *Conceito de área:* uma proposta de ensino-aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo, 2003.

KOBAYASHI, M. C. M. *A construção da geometria pela criança*. Bauru: EDUSC, 2001.

LOVIS, K. A. *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um ambiente de Geometria Dinâmica*: o que pensam e o que sabem os professores. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2009.

NOGUEIRA C. M. I. *Grandezas e medidas*: encaminhamentos metodológicos para as séries iniciais do ensino fundamental. Maringá, EDUEM, 2005. (Coleção Formação de Professores – EAD, n. 22).

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. ***Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná:*** Matemática. Curitiba, 2008.

PIAGET, J. *A construção do real na criança*. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1979.

PIAGET, J. *Introduccion a la epistemologia genetica* (El pensamiento matemático). Buenos Aires: Paidos, 1975.

PIAGET, J. *Psicologia e epistemologia*: por uma teoria do conhecimento. Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária, 1973.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. *The child´s conception of geometry*. New York: Harper Torchbook, 1960.

SANTOS, T. S. *A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica*. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2009.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. *Recherches en Didáctique des*

*Mathématiques*, Grenoble, v. 10, n. 23, 1990.

WADSWORTH, B. J. Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau. São Paulo: Pioneira, 1984.

Submetido para publicação em 17/07/2012

Aprovado em 17/02/2014