RELATO DE EXPERIÊNCIA

O pensamento matemático na Escola Básica[1]

Sandro Azevedo Carvalho[2] *e Cydara Cavedon Ripoll*[3]

Resumo: Com o objetivo de fazer o leitor refletir sobre a questão "Como familiarizar gradativamente os alunos da Escola Básica com o pensamento matemático?", relata-se, neste artigo, uma experiência de sala de aula de oitavo ano do Ensino Fundamental, realizada em 2008, na qual o professor, enquanto discute as propriedades da operação de adição de números naturais, procura desenvolver a abstração e o pensamento matemático dos alunos, sem se afastar da linguagem inerente a este nível de escolaridade. Essa e outras atividades que buscavam o mesmo objetivo despertaram, em alguns alunos, o hábito de tentar justificar matematicamente os resultados trabalhados em sala de aula.

Palavras-chave: Pensamento genérico. Demonstração em matemática. Propriedades da adição.

The mathematical thinking in the Secondary School

Abstract: With the aim of making the reader think over the question "How can we help students of the Secondary School to become familiar with Mathematical thinking?", we report in this paper an experience that took place in an 8th grade classroom in 2008: the teacher, while discussing about addition properties, tries to develop with his students both abstract and mathematical thinking, keeping the appropriate vocabulary of this school level.

Keywords: Mathematical thinking. Proof in mathematics. Addition properties.

Introdução

Uma característica básica da matemática como ciência é o raciocínio dedutivo, e uma ferramenta fundamental para este é o pensamento genérico[4].

---

[1] Este texto é parte do trabalho de dissertação do primeiro autor, sob orientação do segundo autor, no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS (Carvalho, 2010).

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense. carvalho@sapucaia.ifsul.edu.br

[3] Universidade Federal do Rio Grande do Sul. cydara@mat.ufrgs.br

[4] O que entendemos por pensamento genérico ficará claro adiante.

Se a função da escola é formar um cidadão na sua plenitude, incluindo aí o acesso ao patrimônio científico e cultural da humanidade, tal formação não pode prescindir dos princípios da ciência matemática. É com esse olhar que defendemos que, tanto o pensamento genérico como a atividade de demonstrar, podem (e devem!) ser explorados e desenvolvidos na escola. Vamos além: tanto quanto possível, a exploração e o desenvolvimento de tais princípios matemáticos devem iniciar-se já nos primeiros anos de escolaridade.

"Como familiarizar os alunos da Escola Básica e neles desenvolver os métodos requeridos e praticados pela ciência matemática?" é uma pergunta que se relaciona com a nossa convicção exposta anteriormente, e deveria, em nossa opinião, estar presente no planejamento de atividades dos professores de Matemática desde os anos iniciais. O presente artigo está diretamente relacionado a esta pergunta. Nele, pretendemos enfatizar a introdução da demonstração e do pensamento genérico na escola, e relatamos uma experiência, realizada em uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, que ilustra como o pensamento genérico pode aí ser explorado.

Quando utilizamos, neste texto, o termo *demonstração,* nós o fazemos com o mesmo sentido empregado por Balacheff (1987, p. 148)[5]:

> Denominamos *prova* uma explicação aceita por uma determinada comunidade em um determinado momento. Essa aceitação pode estar sujeita a um debate sobre a determinação de um sistema de validação comum aos interlocutores.
> Para a comunidade matemática só são aceitas como provas formas particulares de argumentações. Elas são uma sequência de enunciados organizados segundo regras determinadas: um enunciado ou é aceito como sendo verdadeiro, ou é deduzido

[5] Nous appelons prevue une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette decision peut être l'objet d'un débat don't la signification est l'exigence de determiner un système de validation commun aux interlocuteurs.
Au sein de la communauté mathêmatique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suíte d'énoncés organisés suivant des règles déterminées; une énoncé est connu comme étant vrais, ou bien est deduit de ceux qui les précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons démonstrations ces preuves.

> daqueles que o precedem com a ajuda de uma regra tomada de um conjunto bem definido de regras de dedução. Denominamos tais provas de *demonstrações*.

Em outras palavras, estamo-nos referindo ao tipo de argumentação utilizada na matemática como ciência: aquela que comprova irrefutavelmente a validade ou a não validade de uma afirmação matemática, e que, muitas vezes, consiste de uma sequência de deduções amparadas em fatos já comprovados verdadeiros (ou aceitos como verdadeiros, no caso de axiomas ou postulados). Esta é também chamada, por Schwarz e Kaiser (2009), de "prova formal".

Alertamos, no entanto, que, ao mencionarmos *demonstração*, nem nós, nem Balacheff, nem Schwarz e Kaiser pressupomos a necessidade de incluir, em tal argumentação, a simbologia matemática. Mas, da experiência dos autores com professores de matemática da escola básica, é possível apreender uma confusão com relação a este termo. Reiteramos que *dominar a linguagem matemática simbólica* não é sinônimo nem pré-requisito para *demonstrar em matemática*. O mal-entendido de que uma demonstração depende, sim, do uso de simbologia matemática faz com que muitos professores e livros didáticos evitem toda e qualquer demonstração.

Ressaltamos, ainda, que, ao enfatizarmos aqui exclusivamente o pensamento genérico, não pretendemos desvalorizar a intuição ou o teste de alguns exemplos para dar maior credibilidade a uma conjectura – o que Balacheff aponta como "argumento do tipo empirismo ingênuo" ou o que Schwarz e Kaiser definem como "prova pré-formal": *"These notions were elaborated by Blum and Kirsch (1991): pre-formal proof means 'a chain of correct, but not formally represented conclusions which refer to valid, non-formal premises'"* (Blum; Kirsch, 1991, p. 187, apud Schwarz; Kaiser, 2009, p. 191). Pretendemos, sim, destacar que a última etapa do processo de elaboração de uma argumentação em matemática (a demonstração) não deve ser evitada na escola, sob pena de não se desenvolverem no aluno os princípios da ciência matemática.

Reforçando que tanto o pensamento genérico como a atividade de demonstrar podem (e devem!) ser explorados e desenvolvidos na escola, trazemos algumas situações passíveis de serem trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como situações – todas elas relativas à seguinte questão: *A soma de dois números pares é sempre um número par?* – em que a falta desse tipo de argumento acaba por não contribuir para a formação do aluno, no que diz respeito à matemática como ciência.

Salientamos, inicialmente, que, como a pergunta envolve um número infinito de situações (pois existe uma infinidade de números pares), uma *demonstração* da sua veracidade só poderá ser feita lidando com uma situação genérica, e não apenas verificando um número *finito* de casos particulares. É a isso que denominamos *pensamento genérico*. Verificar *apenas* alguns e não *todos* os casos é, matematicamente, um argumento incompleto que, infelizmente, nos dias de hoje, é um recurso utilizado em muitos livros didáticos brasileiros como capaz de decidir o valor lógico de sentenças deste tipo.

a) Analisemos a tentativa de argumentação, apontada por Balacheff como "empirismo ingênuo":

$2 + 4 = 6$, $8 + 16 = 24$, $10 + 18 = 28$. *Portanto,* a soma de dois números pares é *sempre* par.

A conclusão precoce, tirada a partir de três exemplos, não só *não constitui uma demonstração*, como deseduca o aluno quanto à sua formação matemática: a dedução posta acima, sozinha, não é aceita pela matemática. Os três exemplos testados servem como uma intuição para *conjecturar* que a soma de dois números pares deve, sim, ser também um número par, mas não para demonstrar tal conjectura. Se tal argumentação parte de um aluno, é nossa opinião que o professor não deve contentar-se com ela, mas estimular o aluno a aprimorá-la, por exemplo, por meio de alguma das formas como apontamos a seguir.

b) Uma possível demonstração, em nível de quinto ou sexto ano, fazendo uso do pensamento genérico, mas sem usar simbologia matemática:

Números/quantidades pares podem ser agrupados em duplas, sem sobrar nada, de modo que, ao somarmos dois números/duas quantidades pares, estamos apenas reunindo/juntando tais duplas, sem ainda sobrar nada. Portanto, a soma de dois números pares continua sendo um número par.

Note o leitor que esta segunda argumentação pode ser desenvolvida com qualquer aluno que tenha argumentado da primeira forma, pois ambas dependem apenas do conceito de número par. Mas a grande diferença é que esta segunda forma é aceita como *demonstração*, enquanto a primeira, não.

O professor pode, ainda, neste nível de escolaridade, iniciar a discussão com o apoio de material concreto, sem, no entanto, deixar de levar os alunos à generalização do argumento, iniciando o processo de generalização com uma pergunta do tipo: *"E se tivéssemos outros números pares (por exemplo, números pares muito grandes), nosso raciocínio e conclusão seriam diferentes?"*, para, finalmente, chegar à demonstração mencionada acima.

c) Uma possível demonstração em nível de oitavo ano, agora usando simbologia matemática:

Pode-se começar com o mesmo argumento do quinto/sexto ano, mas agora já não é esperada a necessidade do uso de material concreto. No entanto, como, neste nível de escolaridade, já se objetiva e se espera que os alunos comecem a dominar a linguagem das expressões algébricas, vemos aqui uma excelente oportunidade de fazer uso delas, trabalhando, entre outras coisas, uma aplicação da propriedade distributiva: como um número par pode ser escrito na forma $2n$, onde n é um número natural, temos que a soma de dois *quaisquer* números pares pode ser representada por $2n+2m$, com m e n naturais. Mas $2n+2m=2\cdot(m+n)$, que, por sua vez, é um número par, já que a soma de números naturais é um número natural. Portanto, a soma de dois quaisquer números pares é necessariamente um número par.

Note que a essência do argumento utilizado nesta última demonstração é a mesma; a diferença reside apenas no fato de que, nesta, estamo-nos expressando em uma linguagem mais próxima daquela que um matemático utilizaria. As duas demonstrações acima ilustram que apropriar-se da linguagem matemática é um processo independente da demonstração. Que o aluno se aproprie da linguagem matemática pode, sim, ser um objetivo almejado na Escola Básica, mas o caminho utilizado para atingi-lo deve evoluir de forma independente do outro objetivo – este prioritário! –: desenvolver a capacidade de compreender e produzir demonstrações. Caso contrário, acreditamos que se corra o risco de o primeiro objetivo impedir que o segundo venha a ser atingido. Ainda, as duas demonstrações acima fizeram uso (inevitavelmente) do pensamento genérico.

Neste momento, registramos uma crítica aos PCN, que permitem que uma argumentação vise apenas ao pertinente, ao plausível, sem deixar claros o significado e a abrangência desses termos:

> A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la.
> [...]
> Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.
> Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.
> Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (Brasil, 1998, p. 70-71)

Os termos imprecisos, embutidos em "argumentos *plausíveis* ou *pertinentes*", podem dar margem ao uso indiscriminado de argumentos não válidos em aulas de matemática, como, por exemplo:

- no nível de Ensino Fundamental, é completamente plausível/intuitivo pensar, em um primeiro momento, que, se um número inteiro é divisível por r e por s, então é também divisível por $r \times s$. No entanto, não se pode parar nesse estágio. De fato, essa afirmação é, em muitos casos, verdadeira, mas também é, em outros casos, falsa. Por exemplo, 24 é divisível por 2 e por 8; porém, não é divisível por $16 = 2 \times 8$. De fato, prova-se que ela é verdadeira sempre que r e s são relativamente primos;

- no nível de Ensino Médio, é plausível cogitar que não é possível contar todos os elementos de $\mathbb{Q}^+$ (conjunto dos números racionais não negativos), devido à sua densidade. No entanto, prova-se que o conjunto $\mathbb{Q}^+$ é enumerável, apesar de denso[6];

- em qualquer nível de ensino, é aceitável pensar, em um primeiro momento, que há mais números naturais do que números pares, pois nossa experiência com conjuntos finitos respalda a ideia de que qualquer parte própria de um conjunto tem menos elementos do que o conjunto todo[7]. Porém, não podemos parar por aí: como estamos tratando de conjuntos infinitos, é possível demonstrar que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais. Portanto, ambos os conjuntos têm mesma cardinalidade[8].

Um relato de experiência com o pensamento genérico em sala de aula

Relatamos, a seguir, uma experiência realizada em 2008 com alunos de oitavo ano de uma escola pública do município de São Leopoldo - RS. Tal experiência teve como objetivos:

- que os alunos estabelecessem as propriedades comutativa e associativa e a existência de elemento neutro da adição de números naturais, a partir do fato de que a ação de juntar é descrita matematicamente pela adição e que essa ação tem tais propriedades;

- que os alunos desenvolvessem o pensamento genérico necessário para demonstrar tais propriedades.

Buscamos o primeiro objetivo em um oitavo ano porque pretendíamos trabalhar com expressões algébricas, para as quais daríamos um sentido exclusivamente numérico. Com esse tratamento, algumas regras de adição de expressões algébricas são justificadas por essas propriedades. Assim, não só a nomenclatura *comutativa, associativa e elemento neutro* (desconhecida para a

---

[6] Este erro ficou registrado em um livro didático aprovado no PNLD: "Como entre dois racionais sempre há um outro número racional, não é possível escrever todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais".

[7] Os autores, ao questionarem alunos do Ensino Fundamental sobre isso, obtiveram como resposta que a quantidade de pares é a metade da quantidade de naturais.

[8] Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existe uma função bijetiva de A em B (ou, equivalentemente, uma correspondência um a um entre eles).

maioria dos alunos) foi introduzida e efetivamente utilizada como facilitadora da comunicação em expressões algébricas, como também foi destacado um conteúdo (propriedades da adição) até então utilizado de forma inconsciente por eles.

Para esta atividade, levamos, para a sala de aula, potes plásticos opacos e com tampa.

Para tratar da comutatividade da adição de naturais, convidamos os alunos a ficarem próximos à mesa do professor e começamos a aula, mostrando-lhes dois potes abertos. No pote da esquerda, colocamos três pedaços de giz e, no pote da direita, pusemos quatro pedaços de giz; a seguir, perguntamos:

— Quantos pedaços de giz têm, ao todo, nos dois potes?

— *Sete* — responderam os alunos.

Trocamos a posição dos potes, isto é, o pote da esquerda foi para a direita e o da direita foi para a esquerda. Perguntamos-lhes:

— E agora, quantos pedaços de giz há, ao todo, nos dois potes?

Os alunos riram, achando que estávamos de brincadeira[9], mas insistimos, solicitando-lhes que respondessem. E os alunos:

— A mesma coisa que antes, sete!

O procedimento foi repetido com diferentes quantidades em cada pote, sempre com os alunos vendo a quantidade de giz que colocávamos em cada um deles. Alguns alunos respondiam, dizendo que, após a troca, resultava a mesma quantidade que antes, porque só havíamos trocado as posições dos potes; outros respondiam que a quantidade não mudava, porque não havíamos acrescentado nem retirado pedaços de giz. Essas respostas

[9] Essa reação pode ter ocorrido porque as propriedades comutativa e associativa da adição de números naturais estão, há muito tempo, internalizadas pelos alunos, sendo elas constitutivas da própria noção de número e da adição de números. De fato, pode-se considerar que uma criança compreende o significado do número 15, por exemplo, quando ela é capaz de decompô-lo como 10 + 5 ou 5 + 10, ou 10 + 1 + 4, etc.

evidenciam que, para eles, estava claro o conceito de adicionar: juntar, reunir.

De repente, com o objetivo de direcionar para o pensamento genérico, colocamos muitos pedaços de giz em cada pote e os fechamos antes que os alunos pudessem determinar a quantidade que havia em cada um. Daí perguntamos:

— Neste pote — mostrando o pote da esquerda — há uma quantidade [de pedaços de giz] que ninguém sabe informar no momento. Neste outro pote — mostrando o pote da direita — também há uma quantidade [de pedaços de giz] que ninguém sabe informar. Juntando estas duas quantidades, estaremos adicionando os pedaços de giz do pote da esquerda com os pedaços de giz do pote da direita. Isso dá uma determinada quantidade, mas no momento não sabemos determiná-la com precisão. O que acontece, se trocarmos a posição dos dois potes — colocando o pote da esquerda na direita — e novamente juntarmos as quantidades dos mesmos?

— *Vai ter uma quantidade de giz, mas não sabemos que quantidade* — responderam alguns alunos, com a concordância dos demais.

— Correto. Mas, apesar de não sabermos determiná-la com precisão, será ou não esta a mesma quantidade que tínhamos antes da troca?

— Será a mesma, porque só mudou a posição — responderam alguns.
— Será a mesma, porque não acrescentamos nem retiramos nada — responderam outros.

Com as duas respostas acima, consideramos encerrada a demonstração, uma vez que elas, implicitamente, deixaram claro que os alunos estavam inconscientemente evocando a comutatividade da ação de juntar. Com a participação dos alunos, passamos, então, à etapa de registrar no quadro o que havíamos feito e o que havíamos concluído. Começamos pelas primeiras adições, nas quais era conhecida a quantidade de giz colocada em cada pote, por exemplo,

$3 + 4 = 4 + 3$,

$5 + 9 = 9 + 5$, etc.

Depois, perguntamos aos alunos:

— *E no caso em que não sabemos a quantidade de giz em cada pote, como podemos escrever?* Vários alunos responderam, evidenciando aqui o entendimento da noção de incógnita:

— *Usa uma letra!* —, pois já havíamos começado a estudar expressões algébricas.

— Usamos a mesma letra para as quantidades de cada pote ou usamos letras diferentes?

— *Diferentes* — responderam.

Perguntamos a eles por que deveríamos usar letras diferentes, aproveitando para discutir este outro ponto delicado para os alunos, no que diz respeito ao uso de letras para representar um número genérico, mas não souberam responder. Chamamos-lhes, então, a atenção para o fato de que, se usássemos letras iguais, estaríamos afirmando que havia a mesma quantidade de pedaços de giz nos dois potes, algo que não podíamos garantir. Escrevemos no quadro:

$$x+y \quad ? \quad y+x$$

e perguntamos que símbolo ou sinal deveríamos usar no lugar do ponto de interrogação. Os alunos responderam que deveríamos colocar o sinal de igual. Comentamos ainda que, apesar de, na prática, não podermos colocar uma quantidade qualquer de pedaços de giz nos potes que tínhamos em mãos, podíamo-nos convencer de que valia a igualdade acima para quaisquer quantidades, bastando para isso imaginar potes cada vez maiores (ou pedaços de giz cada vez menores). Portanto, aquelas letras que usamos para representar números estavam representando quaisquer números naturais, por maiores que eles fossem.

Para trabalhar a propriedade associativa, pegamos agora três potes e convidamos novamente os alunos para se aproximarem da mesa do professor. Colocamos dois potes à esquerda e o outro mais afastado, à direita. Em cada um deles colocamos uma quantidade de giz, por exemplo: 3, 5 e 6, nesta ordem. Perguntamos qual seria o total de pedaços de giz, se primeiro juntássemos os que estavam nos potes mais à esquerda para depois juntarmos essa quantidade com a do que estava à direita, isto é, já registrando no quadro com os alunos:

(3 + 5) + 6.

Os alunos responderam, corretamente, 14. A seguir, passamos para a direita o pote do meio, gerando a soma que registramos no quadro:

3 + (5 + 6).

Novamente, quando perguntados sobre o total, os alunos responderam que o resultado era 14. Escrevemos, então, no quadro:

(3 + 5) + 6 = 3 + (5 + 6).

Repetimos o procedimento com outros valores e, tão logo calculávamos, registrávamos no quadro nossas conclusões. Então, como já havíamos feito quando da propriedade comutativa, colocamos vários pedaços de giz em cada pote e os fechamos todos, antes que os alunos pudessem contá-los. A partir daqui, o procedimento, as respostas e as conclusões foram parecidas com aquelas relativas à propriedade comutativa. A diferença é que, agora, já íamos registrando no quadro o que fazíamos com o material. Os alunos concluíram que vale sempre a igualdade

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

não importando quais sejam os números naturais *a*, *b* e *c*.

Não é difícil para o leitor imaginar como foi o procedimento para a propriedade que reconhece o zero como o elemento neutro para a adição de naturais.

Considerações finais

Consideramos que, na atividade relatada ateriormente, o objetivo de desenvolver o pensamento genérico para estabelecer propriedades da adição foi alcançado. A abordagem com os potes, para justificar propriedades da adição de números naturais, foi aceita com naturalidade pelos alunos, bem como a abstração de imaginar potes maiores para conter quantidades maiores de pedaços de giz.

Atividades de familiarização com o pensamento genérico e com demonstrações em matemática, foram realizadas durante todo o primeiro semestre letivo de 2008 com essa turma de oitavo ano. Ao longo do ano, passamos a observar que alguns alunos já procuravam justificar suas respostas, mesmo que isso não lhes tivesse sido solicitado. Ou seja, tentar justificar matematicamente os resultados passou a fazer parte da rotina de alguns alunos. Houve ocasiões em que alguns deles demonstraram curiosidade em dar continuidade ao assunto que estava sendo trabalhado. Por exemplo, ao abordarmos a necessidade de ampliar o universo numérico que estava sendo trabalhado, questionaram *"Há alguma operação que não conseguimos realizar só com números racionais"?*

Salientamos ao leitor que a experiência pode ser adaptada para anos anteriores, mantendo o pensamento genérico e evitando, claro, o registro algébrico final. De fato, ela serve para justificar, por exemplo, algoritmos para a adição.

A argumentação utilizada na experimentação pode ser adaptada também para a adição de *quaisquer* números positivos (incluindo reais), trabalhando agora com medida, e não mais com contagem. Para tal, pode-se tomar como unidade de comprimento uma barra inteira de giz, de modo que os pedaços de giz representam comprimentos racionais ou até mesmo irracionais. Pensando agora em emendar pedaços de giz de comprimentos *quaisquer* e questionando sobre o comprimento total obtido, consegue-se levar os alunos a concluir que também a adição de *quaisquer* números (reais) positivos é sempre comutativa, associativa, e admite o zero como elemento neutro.

Sobre o pensamento genérico, sugerimos ao leitor voltar a refletir sobre a enorme diferença que há entre o método "vale para um, vale para dois, então vale sempre", não aceito pela matemática como ciência, e o método utilizado na experiência relatada. Reforçamos que testar alguns casos particulares tem valor, sim, para a matemática, mas o método deve ser reformulado para "vale para um, vale para dois, então *talvez valha* sempre".

Afinal, "*Como familiarizar gradativamente os alunos da Escola Básica com o pensamento matemático?*" Esperamos, com este artigo, ter convencido o professor leitor de que o pensamento genérico é um dos ingredientes que levam o aluno a perceber e a praticar a matemática como ciência, e que ele pode ser utilizado em várias situações, mesmo nos anos iniciais da Escola Básica.

Referências:

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. *Educational Studies in Mathematics* – Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, v. 18, n. 2, p. 147-176, maio 1987.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, S. A. *Pensamento genérico e expressões algébricas no Ensino Fundamental.* Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29352. Acesso em: 24 fev. 2014.

SCHWARZ, B.; KAISER, G. Professional Competence of Future Mathematics Teachers on Argumentation and Proof and How to Evaluate it. In: LIN, F.-L. et al. (Ed.). *Proof and Proving in Mathematics Education*. ICMI Study 19. v. 1. Taipei: National Taiwan Normal University, 2009. p. 190-195.

Submetido para publicação em 09/03/2012
Aprovado em 13/02/2014