Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática[1]

Elizabeth Gomes Souza[2] *e Jonei Cerqueira Barbosa*[3]

Resumo: Este artigo tem o objetivo discutira aprendizagem matemática na modelagem matemática em termos teóricos. Para esse fim, adotamos as ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein, relativas ao seu entendimento de linguagem e matemática como uma modalidade normativa de uso da linguagem. Esses entendimentos são utilizados como embasamento filosófico para a análise das definições teóricas apresentadas por Anna Sfard sobre aprendizagem matemática em âmbito escolar. A partir do uso das ideias de ambos os autores, apresentamos uma compreensão de modelagem e apontamos algumas implicações para a temática da aprendizagem matemática na modelagem.

Palavras- Chave: Modelagem matemática. Sistema normativo. Aprendizagem matemática.

Theorical contribuitions about the mathematics learning in the mathematical modelling

Abstract: This paper aims to thematize the mathematics learning in the mathematical modeling from a theoretical framework. In order to it, we have followed the ideas of the philosopher Ludwig Wittgenstein about his understanding of language and mathematics as a normative use of language.Those ideas have been used as a philosophical framework for the analysis of the theoretical definitions pointed by Anna Sfard on mathematics learning in school context. From the use of ideas of

---

[1] Este artigo é uma versão ampliada e modificada de um capítulo da tese de doutorado da primeira autora (SOUZA, 2012), elaborado sob a orientação do segundo autor.

[2] Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Professora da Faculdade de Educação Matemática e Científica e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Integrante do Grupo de Estudos em Modelagem Matemática (GEMM/UFPA) e Grupo de Estudos em Linguagem Matemática (GELIM/UFPA). Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá. CEP 66075-110. Caixa postal 479. Belém-Pa. E-mail: elizabethgs@ufpa.br

[3] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia e do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Líder do Grupo de Pesquisa Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA/UFBA). Endereço para correspondência: Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, Canela, Salvador – Bahia, CEP: 40110-100. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

both researchers, we show an understanding of modelling as well as we point out to some implications for debate about the mathematics learning in modeling.
Keywords: Mathematical modelling. Normativesystem. Mathematics learning.

Introdução

Afirmações relativas à importância de os alunos utilizarem os conteúdos matemáticos que aprendem na escola para resolverem problemas com os quais podem se deparar no dia a dia, em seus ambientes de trabalho e nas tomadas de decisões diárias diversas, estão sendo cada vez mais explícitas em parâmetros curriculares nacionais. Citações que apontam ser esse um dos objetivos de ensino da matemática estão presentes, por exemplo, em guias curriculares alemães (Germany, 2004), norte-americanos (NCTM, 2000) e brasileiros (Brasil, 2002).

A modelagem matemática[4], na perspectiva da Educação Matemática, pode ser definida, de maneira geral, como a abordagem de problemas da realidade, utilizando conteúdos matemáticos.

As argumentações a respeito das implicações do uso da modelagem no contexto escolar e acadêmico para a aprendizagem matemática resultaram em sua consolidação como campo de pesquisa na área Educação Matemática. Essa consolidação é representada pela realização bianual da Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática no Brasil e pelo, também bianual, Encontro da Comunidade de Professores de Modelagem e Aplicações, realizado em âmbito internacional.

Algumas pesquisas e relatos de experiências apontaram, nesses congressos e em outros encontros[5], que a modelagem gerava motivações nos alunos para aprenderem matemática (Maaβ, 2010; Silva, 2009), permitia que os alunos identificassem que os conteúdos da matemática escolar eram úteis em situações cotidianas (Ferruzi; Almeida, 2009; Swan et al., 2007), possibilitava que previssem como resolveriam problemas em seus ambientes de trabalho (Kaiser; Schwarz, 2010) e que analisassem criticamente

---

[4]A partir deste momento, citaremos apenas a palavra *modelagem* em substituição à expressão *modelagem matemática*.

[5] Por exemplo, citamos o Seminário Nacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) e o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).

argumentos pautados em matemática (Barbosa, 2006), entre outras ênfases geradas pela implementação da modelagem para a aprendizagem matemática dos estudantes.

Embora as pesquisas e os artigos científicos que tratam da aprendizagem matemática dos estudantes, proporcionada pela implementação da modelagem em contextos escolares e acadêmicos, sejam diversos, eles têm, predominantemente, como foco o relato de argumentos favoráveis à aprendizagem matemática dos alunos (Biembengut; Schmitt, 2010; Lesh; Fennwald, 2010) ou a descrição do modo como os alunos resolveram os problemas propostos, por meio de conteúdos matemáticos (Barbosa, 2007; Ferreira; Wodewotzki, 2007; Maaβ, 2006).

Em termos filosóficos, as pesquisas de Araújo (2007) e de Veleda e Almeida (2010) tiveram como objetivo identificar a fundamentação filosófica sobre matemática que embasa algumas das principais delimitações de modelagem sustentadas na literatura.

A pesquisa de Araújo (2007) destacou que, predominantemente, diferentes perspectivas de modelagem são fundamentadas filosoficamente em correntes realistas e formalistas de matemática.[6] Segundo a autora, tais embasamentos orientam o encaminhamento do desenvolvimento das tarefas de modelagem no contexto escolar.

Já Veleda e Almeida (2010), a partir de algumas definições de modelagem, buscaram identificar qual entendimento de realidade estava orientando essas definições. As autoras destacam que o realismo estava presente de maneira implícita nas principais definições sobre modelagem e corroboram a constatação do estudo de Araújo (2007) de que qualquer definição de modelagem sustentada está estritamente vinculada à "concepção de realidade que se tem" (Veleda; Almeida, 2010, p. 9).

Nessa direção, o presente estudo visa contribuir com as pesquisas já

---

[6]De maneira simplificada, podemos entender o realismo como uma corrente filosófica cuja compreensão de realidade principal repousa na ideia de que a realidade existe independentemente da criação humana. Ou seja, ela é anterior ao homem e também não depende dele para se constituir. Já, para o formalismo, a realidade é uma constituição humana que ocorre a partir da abstração por meio da lógica que o homem é capaz de realizar das formas concretas e perceptíveis ao seu mundo sensório.

realizadas sobre aprendizagem matemática e sobre os aspectos filosóficos relativos à modelagem, no sentido de oferecer contribuições teóricas para a compreensão da aprendizagem matemática na modelagem, a partir de discussões de cunho filosófico, que envolvem o entendimento de matemática e de modelagem.

Iniciaremos por explicitar os fundamentos filosóficos que sustentam nosso entendimento de linguagem e de matemática, com base nas ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein, em particular, aquelas oriundas de seu livro *Investigações filosóficas*. Em seguida, utilizando essas ideias, analisaremos os conceitos teóricos de Anna Sfard sobre aprendizagem matemática. E, por fim, elaboraremos implicações das delimitações para a tematização da aprendizagem matemática na modelagem.

O papel da linguagem em wittgenstein

As ideias subjacentes à denominada "virada linguística",assumidas, predominantemente, no final de século XX, são caracterizadas pela distinta compreensão do papel da linguagem na constituição de significados. Um dos autores cujas ideias fundamentam a virada linguística é o filósofo Ludwig Wittgenstein.

A virada linguística é caracterizada pelo entendimento de que é *na* linguagem e *pela* linguagem que significamos o mundo ao nosso redor, em seus múltiplos e variados aspectos. Por exemplo, que sensação física denominamos de dor, que fatos denominamos de tristes ou de alegres, como denominamos os objetos ao nosso redor, como falamos e o que falamos, entre outros inúmeros exemplos.

O principal entendimento em torno do papel da linguagem caracterizado na referida "virada linguística" repousa na ideia de que a significação do mundo ao nosso redor se constitui no campo da linguagem, e não no exterior a esse campo. Com base nessa compreensão, o fato de um determinado gesto ser significado como sendo um sorriso, por exemplo, foi constituído *na* linguagem e *por* ela, no sentido de que alguém, no ensino dessa significação, pode ter sorrido e falado a um aprendiz: *"Vamos, sorria!"*, indicando, dessa forma, que gesto *significa* o uso da palavra "sorriso".[7]

Essas considerações não se restringem aos gestos, pois também fatos, objetos, situações e palavras que nos circundam são entendidos em Wittgenstein (1999) como constituídos *na* linguagem e *pela* linguagem.

Tal maneira de conceber a linguagem foi identificada como "virada linguística", em virtude de destoar do entendimento, predominante até o momento, de que a linguagem seria apenas um meio ou ainda veículo para *expressar* a significação. Esta, por sua vez, não se constituiria em um terreno linguístico e, sim, no mundo das ideias, em entidades mentais. Esse entendimento de linguagem é intitulado de "compreensão referencial de linguagem",[8] ou seja, é pautado na ideia de que a linguagem possui um referente, pois ela mesma não é dotada de significação.

Wittgenstein (1999) se opõe a essa ideia referencial de linguagem, ou seja, de linguagem somente como veículo formador de significados. Em sua obra, essa ideia é representada pela seguinte visão agostiniana[9] de linguagem: "cada palavra tem uma significação. Esta significação é agregada à palavra. É o objeto que a palavra substitui." (Wittgenstein, 1999, §1).

Para o filósofo, a significação das palavras não corresponde à identificação de um referente para a linguagem, cuja função seria de significar as palavras. A significação ocorre e operacionaliza-se no *uso* da palavra. Nas palavras de Wittgenstein (1999, §433), "todo o signo sozinho parece morto. O que lhe dá vida – No uso, ele vive. Tem então a vida respiração em si ? – Ou o

---

[7] A significação do gesto sorriso pode ocorrer de diferentes maneiras; todavia, em qualquer exemplo que possamos considerar, podemos identificar que tal significação perpassa e é*na* linguagem constituída.

[8] Ressaltamos que o entendimento referencial de linguagem,ao qual Wittgenstein(1999) se opõe, relaciona-se à compreensão de que a linguagem não exerce papel crucial na constituição de significados de maneira ampla,ou seja, na significação das emoções, das palavras, das crenças, da maneira de lidar e viver no mundo, etc. Isso porque, nesse caso, a significação seria compreendida como algo que ocorre na esfera extralinguística, ou seja, advém dos objetos os quais as palavras nomeiam. Por exemplo, a significação da palavra "dor" se daria em nível interno das sensações, portanto particular e pessoal. Todavia, Wittgenstein (1999) esclarece que as palavras têm critérios públicos de significação, porque seus significados são constituições linguísticas. Isso justifica o fato de podermos falar de uma dor que nunca sentimos, exemplifica Moreno (2003).

[9] A visão agostiniana de linguagem é atribuída a Santo Agostinho, um padre que viveu durante os anos de 354 a 430, e está presente em sua obra denominada *Confissões*. Suas ideias são relativas à filosofia cristã.

uso é a sua respiração ?".

É a ideia de *uso* que fundamenta a compreensão de linguagem como cenário de constituição de significados. *Uso* está relacionado à prática linguística (Glock, 1998; Gottschalk, 2004a, 2004b, 2008; Jesus, 2002; Moreno, 2003, 2005). É nela que identificamos e significamos o mundo que nos cerca.

Assim, Wittgenstein (1999) aponta para um entendimento dinâmico e pragmático de linguagem, e não estático e rigidamente fundamentado nos objetos que supostamente possuem a essência da significação. Essa distinta compreensão de linguagemestá explícita na elaboração do termo "jogos de linguagem",por Wittgenstein (1999, §7, §21, §23, §67).

A expressão "jogos de linguagem",utilizada pelo filósofo, tem o objetivo de sugerir a identificação dos diversos usos que fazemos da linguagem ou, ainda, de indicar que "vejamos" como a linguagem funciona em diversas situações com as quais nos deparamos (Wittgenstein,1999, §66,§106). Usamos a linguagem para os mais variados fins. São exemplos de jogos de linguagem citados pelo filósofo:

> [...]comandar e agir segundo comandos [...] representar um teatro, cantar uma cantiga de roda, resolver enigmas, fazer uma anedota, contar, resolver um exemplo de cálculo aplicado, traduzir de uma língua para a outra, pedir, agradecer, maldizer, saudar [...] (Wittgenstein, 1999, §23).

Dessa forma, a expressão "jogos de linguagem" instaura a análise e a identificação dos diversos usos que podemos realizar com a linguagem. Também, Wittgenstein (1999) delimita como"jogos de linguagem" os diferentes usos que as palavras possuem. Ainda,os diversos usos da expressão "ser bom" e "sei continuar" são designados de "jogos de linguagem" dessas expressões (Wittgenstein, 1999, §66,§77, §179).

O uso da expressão "jogos de linguagem" em Wittgenstein (1999) é diverso. Entretanto, esses usos nos sugerem que analisemos como a linguagem funciona, ou seja, de que maneira a usamos e para quais finalidades. Diante disso, o filósofo enfatiza: "chamarei também de jogos de linguagem o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada" (Wittgenstein, 1999, § 7).

Identificamos os jogos de linguagem na prática linguística. A simples pronúncia da palavra "lajota" pode significar diferentes comandos e não possui uma significação única, preestabelecida e imutável. Em um contexto de construção civil, conforme exemplifica o filósofo, a pronúncia da palavra "lajota" pode significar que o ajudante do pedreiro deve trazer a lajota para quem a pronunciou, constituindo, assim, um específico jogo de linguagem.[10]

A opção pelo uso do termo "jogos de linguagem" e não somente "linguagem" visou salientar que a linguagem é uma *atividade* (Glock, 1998; Moreno, 2003, 2005), em oposição ao entendimento de linguagem como um sistema de símbolos fixos e universais. Uma atividade cuja característica é ser regida por regras.

A identificação da existência de regras vinculadas à linguagem explicita a noção de que o *uso* da linguagem, em suas mais diversas formas, não é uma atividade arbitrária, o *uso* não é qualquer um. As regras, nesse sentido, não se referem à organização dos símbolos, embora os envolvam, mas as regras que Wittgenstein (1999) explicita são regras relacionadas aos usos da linguagem.

Elas são denominadas de "regras gramaticais". A gramática, aqui, se refere "tanto às regras constitutivas da linguagem, quanto à investigação filosófica das regras", ressalta Glock (1998, p. 193). As regras da gramática dizem respeito aos padrões de correção, ou seja, ao uso da linguagem que faz ou não sentido.

Importante destacar que, mesmo possuindo a aparência de serem anteriores ao uso da linguagem, as regras são consideradas orientadoras, normas de direção. Elas não ditam o modo como as palavras devem ser usadas, garantindo o seu uso correto, apenas sugerem quais usos podem ser assim considerados. Questões contingenciais, por exemplo, podem modificar frequentementeesse uso.[11]

---

[10]Em virtude de o termo "linguagem" estar, tradicionalmente, vinculado somente à oralidade, é possível identificar a busca de ampliação do termo por alguns autores. Em Lektorsky (2002, p. 110-111 apud Miguel, 2010, p. 47), o autor utiliza a expressão "jogos de práticas", para se referir a jogos que envolvem movimentos do corpo, como a maneira de andar ou de rezar, por exemplo. Já Miguel, Vilela e Moura (2010, p. 158) adotam a expressão "jogos de cenas", cuja significação tem inspiração no termo "jogos de linguagem" de Wittgenstein (1999), agora, correspondendo a imagens, à disposição física dos objetos, às cores, ao próprio espaço físico, etc.

[11] Wittgenstein (1999) não sustenta uma noção comum de regras como estipulações fixas e imutáveis.

As regras da gramática orientam quais usos das palavras fazem sentido. Por exemplo, dizemos que sentimos dor, mas não faz sentido atribuirmos esse sentimento a coisas, como a cadeira ou a mesa; assim, podemos dizer que essas expressões não compõem a nossa gramática.

Todavia, afirmar se o uso de uma determinada palavra faz ou não sentido depende de conhecermos em que *forma de vida* determinados jogos de linguagem das palavras estão instaurados/vinculados. Isso explica o entendimento de que a linguagem passa a ser embasada em "fundamentos sem fundamentos" (Moreno, 2003, p. 125), pois *formas de vida* são dinâmicas e instáveis, mas são justamente elas que dão à linguagem a constituição de seus significados.

A expressão "forma de vida", em Wittgenstein (1999), é citada sempre em conjunto com a expressão "jogos de linguagem" ou "linguagem": "[...] E representar uma linguagem significa representar-se uma forma de vida (Wittgenstein, 1999, §19)", " [...] O termo jogo de linguagem deve salientar que o falar da linguagem é parte de uma atividade, de uma "forma de vida" (Wittgenstein, 1999, §23).

Para Glock (1998, p. 174), uma *forma de vida* pode ser entendida como "uma formação cultural ou social, é a totalidade de atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem". Moreno (2003, p.129) apresenta um entendimento semelhante, descrevendo *formas de vida* como "sistemas regrados de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas que se entrecruzam hábitos, atitudes, éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade".

Ambas as definições e as citações de Wittgenstein (1999) referenciadas acimanos apontam que *forma de vida* seriao conjunto de sistemas que compõem a vida, que caracterizam a vida de uma determinada maneira e não de outra. *Forma de vida* pode ser entendida, também, como o conjunto de valores, crenças, ações, sentimentos, concepções, a própria linguagem, etc. que uma determinada coletividade/ou grupo social sustenta.

Regras da gramática são orientadoras de quais são os possíveis usos corretos das palavras. Com base na ideia de regras como orientadoras de direção, o filósofo nos previne e adverte para o fato de que novos usos podem ser elaborados e acrescentados aos anteriores, antigos usos podem ser extintos e, contingencialmente, novos usos podem ser criados.

A linguagem concebida como elemento constituidor de significados, a partir da virada linguística, possui um papel de constituidor também das *formas de vida*; pois é *na* linguagem e *por* ela que valores, hábitos, ações, concepções, etc. são constituídos. Essa questão deve justificar o fato de que *representar* uma *linguagem* conduz à compreensão de uma *forma de vida*, citada por Wittgenstein (1999).

A seguir, apresentaremos algumas delimitações de Wittgenstein relativas a sua compreensão de matemática, as quais, como veremos, incluem a busca da identificação da matemática edos usos da linguagem que a caracterizam.

A matemática como sistema normativo

Para Wittgenstein[12], as proposições matemáticas, asserções das mais diversas ordens, por exemplo, as proposições aritméticas, geométricas, algébricas, etc., são proposições de caráter normativo (Glock, 1998; Gottschalk, 2004a, 2004b, 2008; Jesus, 2002; Miguel; Vilela; Moura, 2010; Moreno, 2005; Vilela, 2007, 2009, 2010).

Isso significa que as proposições matemáticas têm como características serem normatizadoras de nossas experiências no mundo. Elas são *normas de como proceder*, *sistemas* ou, ainda, podem ser denominadas de *padrões de correção*, os quais podemos adotar para organizar nossas mais diversas experiências (Gottschalk, 2004a, 2004b, 2008).

Assim, as proposições matemáticas funcionam como *sistemas* pelos quais nossas experiências podem ser configuradas. A proposição aritmética "2+2=4", por exemplo, pode ser usada para nossa experiência de escrever artigos e dizer que, nos últimos meses, escrevemos quatro artigos: dois em janeiro e dois em fevereiro. Por isso, faz sentido dizermos que escrevemos quatro artigos, desde que tenhamos escolhido a proposição aritmética "2+2=4" para organizar nossa experiência de contagem.Nesse exemplo,

---

[12] Nesta seção e em alguns momentos, ao longo do texto, citaremos Wittgenstein, sem referenciar uma obra em particular. Quando assim fizermos, visamos apontar que a ideia de Wittgenstein citada não foi extraída somente de seu livro *Investigações filosóficas*, mas também corresponde a ideias apresentadas por alguns de seus comentadores, referentes a outras obras do filósofo. Os comentadores adotados são: Glock (1998), Gottschalk (2004a, 2004b, 2008), Jesus (2002), Miguel, Vilela e Moura (2010), Moreno (2003, 2005) e Vilela (2007, 2010).

podemos observar que a proposição aritmética foi utilizada para orientar nossa experiência de citar quantos artigos nós escrevemos, no sentido de que nós a adotamos como normas/sistemas para essa experiência – por isso, seu caráter normativo.

Essa questão evidencia que as proposições matemáticas não *descrevem* nossas experiências, e, sim, as normatizam. Um entendimento descritivo de matemática poderia considerar que as proposições matemáticas possuam relação de um para um com nossas experiências, ou ainda que essas proposições sejam representações de entidades matemáticas perfeitas, que preexistam independentemente de nossas experiências e do uso delas para descrevê-las.

Também, o fato de as proposições matemáticas serem concebidas como normativas e não descritivas implica dizer que os fatos empíricos e as experiências não refutam, não revisam as suas proposições.[13] Isso porque as proposições matemáticas são o *próprio padrão de correção*, e padrões de correção não podem, eles mesmos, ser passíveis de refutação e de falseabilidade, em função dos fatos.[14] Assim, afirma Gottschalk (2008) que, para Wittgenstein, "seguimos as proposições matemáticas 'sem correr perigo de entrar em conflito com a experiência', pois não são falseáveis por ela. Têm uma função normativa, e não descritiva. Não se referem a nada, apenas organizam a nossa experiência empírica" (Gottschalk, 2008, p. 79, ênfase do autor).

Diante disso, ainda que nós não encontremos mais quatro artigos escritos em um dos computadores dos autores desse artigo, o sistema normativo adotado (a proposição matemática 2+2=4), não é refutado, por exemplo, em função de experienciarmos a existência de três artigos. Ao contrário, esse sistema matemático pode não ser mais útil para a normatização de nossa experiência e podemos nos valer de outro sistema ou, simplesmente,

---

[13] As proposições matemáticas não são passíveis de revisão com base na experiência, tal como são as proposições oriundas das ciências empíricas. Nessa direção, o filósofo assinala a diferença de *status*entre as proposições matemáticas e as proposições empíricas.

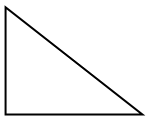
[14] Wittgenstein (1999) compara as proposições matemáticas a uma régua, e a experiência, ao objeto a ser medido. A régua não é refutada e falseada pelo objeto medido. Semelhantemente, por serem normativas, as proposições matemáticas são o próprio *padrão de correção*, não sendo falseadas pela experiência, na qual as proposições foram tomadas como padrão de correção. Sua falseabilidade é interna ou, nas palavras de Glock (1998, p.30), é fornecida pelas "provas".

um dos artigos pode ter sido excluído do computadorao acaso.

Além disso, proposições matemáticas, por serem normativas, permitem a elaboração de proposições descritivas de diversas ordens (Glock, 1998; Gottschalk, 2008; Miguel; Vilela; Moura, 2010). Por exemplo, a partir de nossa afirmação sobre a escrita de quatro artigos, eu posso criar a proposição "escrevemos mais artigos esse ano do que no ano passado".[15]

Assim, as proposições matemáticas, por serem *normativas*, ou seja, funcionarem como sistemas, ditam como uma "coisa deve ser" e não "como uma coisa é", caso eu adote esse sistema (Vilela, 2007, p. 154). Em outras palavras, essas proposições dão a certas situações determinado formato, quando as adotamos.

Importante destacar que são as mais diversas as situações nas quais as proposições matemáticas podem ser adotadas como sistemas para a organização e a configuração. Podemos, por exemplo, constatar que as proposições matemáticas podem ser usadas como sistema normativo para a identificação do seguinte desenho:



Para a experiência de identificar essa figura, podemos usar as seguintes proposições matemáticas como sistema normativo: "polígonos são formas geométricas planas cujo contorno é fechado e formado por segmentos de reta que não se cruzam" e "triângulo é um polígono que tem três lados" (Ribeiro, 2010, p. 186 e p. 211). A partir do uso dessas proposições como sistema normativo, podemos identificar a figura desenhada acima como um *triângulo*.

No contexto escolar, predominantemente, apenas um sistema matemático é adotado. Tal sistema é disciplinar e denominado de matemática escolar. Todavia, podemos identificar, no estudo de Vilela (2007), a existência de outros sistemas normativos. A autora realizou um estudo que identifica,

[15] Proposições empíricas podem vir a ser normativas, desde que passem a ser sistemas normativos para outras proposições empíricas. Se uma proposição é empírica ou normativa, isso depende de como ela é usada, ou seja, é um atributo do uso. Proposições empíricas são aquelas que podem ser refutadas pela experiência e que são *usadas* para descrever fatos e objetos no mundo.

nas diferentes adjetivações referentes à matemática, apresentadas em algumas pesquisas (por exemplo, a matemática da rua, dos agricultores, da escola, etc.), a existência de diferentes matemáticas ou, em nossas palavras, diferentes sistemas matemáticos normativos, pelos quais podemos organizar nossas experiências.

A seguir, apresentaremos algumas implicações da compreensão de matemática como sistema normativo para a maneira de entender a modelagem e, subsequentemente, a aprendizagem na modelagem.

Modelagem: *uma* maneira de *organizar* situações empíricas

Em diversas fontes de referência, como livros, artigos, dissertações e teses sobre modelagem na perspectiva da Educação Matemática, o termo "modelagem" é frequentemente usado para a designação da elaboração, da investigação e/ou da resolução de problemas denominados de problemas reais, utilizando conteúdos matemáticos (Almeida; Araujo; Bisognin, 2011; Barbosa; Caldeira; Araújo, 2007; Kaiser et al., 2011; Silveira, 2007).

Algumas pesquisas explicitam que a realização da modelagem em âmbito escolar tem inspiração direta em uma prática peculiar aos matemáticos aplicados (Biembengut; Hein; Dorow, 2007). Tal prática consiste no uso de conceitos matemáticos em geral, ou seja, conceitos da álgebra, da geometria, do cálculo diferencial, etc., na resolução de problemas reais.

Há também, como característica, o fato de a resolução desses problemas ser desenvolvida por meio de etapas. Partes dessas etapas, de maneira geral, são nomeadas de matematização, interpretação e validação (Blum; Ferri, 2009; Galbraith; Stillman, 2006; Maaβ, 2006).

Com base na referência à designação de modelagem advinda dessa prática, passou-se a denominar de "modelagem" a resolução de problemas nos moldes citados acima, quando o contexto de desenvolvimento é o contexto escolar, e o objetivo é o ensino de conceitos matemáticos disciplinares.

Todavia, a partir de algumas pesquisas que tiveram como objetivo analisar a forma como esse desenvolvimento é realizado pelos alunos (Blum; Ferri, 2009; Ferri, 2006), iniciou-se a constatação de que esse desenvolvimento no contexto escolar destoa da prática de modelagem originalmente adotada por pesquisadores da área da Matemática Aplicada.Isso porque, no contexto escolar, os alunos não seguem linearmente as etapas da realização da modelagem, apontam Blum e Ferri (2009). Além disso, em âmbito escolar, há variáveis intrínsecas a esse contexto, por exemplo, conteúdos escolares preestabelecidos a serem ensinados, tempo escolar fixo, supervisão escolar, etc., que dão à implementação da modelagem no contexto escolar uma configuração própria e distinta da prática de origem e de inspiração da modelagem em âmbito escolar: a matemática aplicada desenvolvida por matemáticos aplicados (Barbosa, 2001; Kluber; Burak, 2009).

Algumas pesquisas, como a de Araújo (2007) e a de Veleda e Almeida (2010), buscaram identificar, nas principais perspectivas de modelagem existentes, que entendimento de matemática, implicitamente, elas embutem. Nessas pesquisas, podemos destacar que esse entendimento também possui vínculo com a compreensão de matemática que enviesa a prática dos matemáticos aplicados.

Isso porque, predominantemente, na literatura em modelagem na perspectiva da Educação Matemática, constatamos a identificação da modelagem como o uso da *matemática* para resolver problemas da *realidade* (Blum; Ferri, 2009; Burak; Kluber, 2011; Kaiser; Schwarz, 2010; Niss, 2010) ou problemas com referência na *realidade* (Barbosa, 2006).

Ambas são identificações diretamente inspiradas nos entendimentos de matemática subjacente ao campo de pesquisa da Matemática Aplicada. Isso porque originalmente, nesse campo, a realização da modelagem é predominantemente ilustrada como um conjunto de etapas que iniciam com a existência de um problema *real*, cujo uso de conceitos matemáticos resulta na representação *matemática* do problema *real*. O problema real e a matemática são frequentemente ilustrados como dois conjuntos distintos e disjuntos.

Podemos concluir dessa implícita diferenciação entre matemática e realidade, basicamente, três premissas. A primeira é que os problemas abordados em modelagem não são matemáticos. Outra é que a matemática tem a potencialidade de resolvê-los. E, por fim, que a modelagem teria a função de realizar a união entre a realidade e a matemática.

Para nós, essas questões sugerem um entendimento descritivo de matemática, pois, nesse caso, a matemática teria a função de *descrever* a realidade, fatos e situações, haja vista não pertencer à realidade. Seu caráter seria universal e simbólico, e seu objetivo seria o de expressar simbolicamente essa *realidade*, da mesma forma e em qualquer contexto.

A compreensão de matemática apresentada por Wittgenstein permite-nos ampliar esse entendimento, oferecendo mais uma maneira,entre outras possíveis, de compreender modelagem. Como vimos, para o filósofo, a matemática não descreve a realidade, pois tem caráter normativo, o que significa considerar que o papel da matemática seria o de organizar nossas experiências.

Partiremos de um exemplo para apresentar uma compreensão do papel da matemática na abordagem dos problemas em modelagem à luz da consideração de matemática como sistema normativo, e, dessa maneira, indicar uma possível (não única e definitivamente posta) delimitação para o *uso* da palavra modelagem.

O exemplo adotado foi extraído de Niss (2010). O autor apresenta um problema relativo à identificação da altura em que se deve encher de vinho uma taça para que ela seja preenchida em dois terços de seu volume total.

Tendo em vista que, em âmbito escolar, a modelagem adota, como sistema matemático normativo, o sistema matemático escolar, um dos primeiros encaminhamentos para a matematização do referido problema é a identificação de que proposições matemáticas normativas relativas a esse sistema podem ser utilizadas para a organização dessa experiência.

Podemos dizer que Niss (2010) adotou as proposições geométricas do sistema matemático escolar, particularmente aquelas relativas à figura geométrica cone, mas em sua forma invertida, pois,com isso, essa figura se assemelhava à forma da taça de vinho. Assim, realizaram-se os cálculos relativos ao volume do cone, à identificação de sua altura, de sua área lateral, etc.

Por fim, Niss (2010) utilizou os cálculos encontrados relativos ao *cone,* para concluir que a *taça de vinho* seria preenchida em dois terços de volume de seu total, se fosse inserido vinho a uma altura que corresponderia a 0,79 da altura total da taça.

Nesse exemplo, com base nas ideias de Wittgenstein, podemos compreender que o sistema matemático escolar foi utilizado como sistema normativo, haja vista ter sido a partir desse sistema que Niss (2010) organizou a experiência de determinar a altura da taça para ser inserido vinho em dois terços de seu volume total. Em particular, identificou semelhanças entre a forma geométrica da taça de vinho e as proposições matemáticas relativas ao sistema matemático escolar, em especial, aquelas da figura geométrica cone. Contudo, essa experiência poderia ser organizada de maneira diferente, caso resolvêssemos adotar outro sistema matemático.

Nessa caracterização da matematização de problemas na modelagem, a partir do entendimento de matemática escolar como sistema normativo, ressaltamos que esses problemas possuem a sua peculiaridade. Dizemos que, em modelagem, o sistema normativo matemático é utilizado para matematizar *situações de natureza empírica*. Ou seja, situações que podem ser refutadas e falseadas, a partir da análise dos fatos.

Com isso, apontamos que podemos constatar os fatos, por meio da experiência, observando se a taça de vinho está preenchida em dois terços de sua capacidade, por exemplo. Ressaltamos, porém, que as proposições matemáticas não são refutadas, quando os cálculos matemáticos encontrados não correspondem ao que ocorre com os fatos. Não se reelabora uma nova fórmula para os cálculos do volume do cone[16], ou seja, não se modifica a fórmula ($v = h\pi R^2/3$),nem a figura geométrica que possui esse nome, por exemplo, em função de a altura encontrada, h= 0,79, não corresponder a dois terços do volume total da taça, conforme a experiência preconizava.

A busca por uma matematização cujos resultados possam ser delimitados como os mais "fiés" possíveis, em relação aos fatos,[17] faz com que se busque por outras proposições matemáticas normativas – por exemplo, por outras proposições geométricas ou algébricas – ou se acrescentem outras variáveis às proposições adotadas. Todavia, essa procura não gera mudanças nas proposições normativas propriamente.

Além disso, destacamos que a compreensão de matemática como

[16] A menos que a fórmula do volume do cone adotada não seja a fórmula peculiar ao sistema matemático escolar. Nesse caso, a fórmula do cone permanece não sendo refutada pela experiência, haja vista tratar-se de um equívoco na adoção da fórmula.

[17]A partir de um entendimento de matemática como sistema normativo, dissolve-se a busca por uma matematização mais próxima, ou ainda mais fiel de uma suposta realidade. Os diferentes sistemas matemáticos adotados correspondem a diferentes maneiras de organizar as experiências. Essas maneiras nem são próximas, ou menos próximas, da realidade, mas podem ser vistas simplesmente como maneiras diferentes de lidar com as experiências.

sistema normativo pode nos auxiliar a explicar o fato de que os resultados matemáticos encontrados na matematização de problemas na modelagem são denominados de *aproximações* da realidade, conforme sinalizam alguns autores (Araújo, 2007; Bassanezi, 2002; Biembengut; Hein, 2003; Cifuentes; Negrelli, 2011), mas não se confundemcom uma possível realidade extralinguística, nem são suas representações fiéis.

Podemos, também, compreender que a matematização de problemas em modelagem não *representa* fielmente os fatos, porque a matemática não é descritiva da realidade, ela é usada como norma para a compreensão da realidade. Como sistema normativo, a matematização corresponde a um modo de *ver* as situações empíricas e, a depender das proposições matemáticas adotadas, esse modo de *ver* se modifica.

Assim, os diferentes resultados matemáticos possíveis de serem encontrados, relativos à matematização de um problema em modelagem, podem ser compreendidos como diferentes maneiras de organizar experiências de natureza empírica.

Diante dessas ponderações, entendemos que a modelagem pode ser caracterizada pela utilização do sistema matemático escolar na organização de situações empíricas. Organização no sentido de que essas situações passam a ser configuradas, moldadas, de determinada maneira.

O uso do próprio sistema já é responsável por essas situações serem organizadas de forma específica. Assim, resumidamente, podemos também designar modelagem como *uma* maneira de organizar situações empíricas. *Uma,* porque é a *maneira* proporcionada pela adoção do sistema matemático escolar como sistema normativo.

Além disso, enfatizamos que essa designação de modelagem deve ser entendida como um dos *usos* possíveis para a palavra "modelagem", na perspectiva da Educação Matemática.

Na seção seguinte, apresentaremos algumas ideias de Anna Sfard sobre a dinâmica da aprendizagem matemática e, na sequência, discutiremos as possíveis implicações das ideias sustentadas nas seções anteriores, para a aprendizagem matemática na modelagem matemática.

A aprendizagem matemática em âmbito escolar

O contexto escolar é concebido como um *espaço*, um *local* específico *de* aprendizagens e *para elas*. Predominantemente, essas aprendizagens se referem especificamente àaprendizagem de conhecimentos intitulados de disciplinares, como Matemática, Física, Química, Biologia, História, Geografia, etc.

Em particular, a disciplina de Matemática abordada no contexto escolar é, frequentemente, organizada em conteúdos. A partir dos estudos sobre discurso e inspirada em algumas ideias de Wittgenstein (1999) relacionadas ao entendimento não referencial de linguagem, Sfard (2008) é uma das autoras que tem buscado fundamentar alguns conceitos relativos à temática da aprendizagem matemática, configurando-a em termos discursivos.[18]

Para Sfard (2008), aprender matemática está relacionado à *proficiência* em produzir discursos de forma estritamente vinculada à maneira como essa produção está historicamente instituída e estipulada na nomenclatura de matemática escolar.

No entendimento de matemática de Sfard (2008), afirma-se que alguém aprendeu matemática, quando o indivíduo produz discursos à luz da produção discursiva historicamente estabelecida. Tendo em vista que o discurso historicamente estabelecido está *vivo* na produção discursiva dos participantes que já compõem o grupo social que gera discursos matemáticos,[19]ou seja, nas pessoas que já discursam o discurso matemático escolar, aprender matemática diz respeito a elaborar discursos à luz da produção discursiva de alguns de seus participantes.

Disso decorre uma das condições importantes para a aprendizagem, segundo essa perspectiva, que é a existência de um discursante do discurso matemático escolar, aquele cujo discurso é considerado o modelo para a produção discursiva dos aprendizes. Esse discursante é denominado por Sfard (2008)de discursante experiente.

Em âmbito escolar, o professor de matemática pode ser considerado tal

---

18 Em Sfard (2008), discurso possui uma conotação estritamente comunicacional. A autora considera como discurso a produção verbal, escrita e/ou gestual dos indivíduos.

19 Discursos matemáticos são discursos que versam sobre formas geométricas, números, fórmulas, etc.

discursante, mas não somente ele, pois os alunos se tornam discursantes experientes, quando elaboram discursos à luz do discurso matemático escolar. Os alunos que ainda não os produzem são intitulados de discursantes iniciantes ou aprendizes.

Com base nessas ideias, podemos concluir que a aprendizagem sustentada por Sfard (2008) é analisada como um percurso que se inicia em não sendo um discursante do específico discurso denominado de matemático escolar e culmina em tornar-se discursante dele.

Não concebemos a matemática escolar como um conjunto de conteúdos, fixos e predeterminados. A matemática escolar, para nós, é um sistema normativo pelo qual podemos organizar nossas experiências empíricas. Nessa direção, os estudos de Sfard (2008) nos sugerem que aprender a matemática escolar, em nossos termos, seria aprender esse específico sistema normativo, intitulado, na nomenclatura, de matemática escolar.

Diante disso, podemos dizer que os estudos de Sfard (2008) apontam que os alunos, na aprendizagem matemática escolar, utilizam outros sistemas matemáticos que não o matemático escolar para normatizar as suas experiências. Segundo a autora, os alunos utilizam o discurso matemático do dia a dia, quando na aprendizagem do discurso matemático escolar.

Por conta disso, Sfard (2007) esclarece que a aprendizagem matemática corresponde a uma "mudança" de natureza discursiva por parte dos alunos. Uma mudança de adoção do discurso matemático do dia a dia para a adoção do discurso matemático escolar ou, em nossos termos, uma mudança entre sistemas matemáticos normativos. Nas palavras de Sfard (2007, p. 576, tradução nossa, grifo nosso),"porque a aprendizagem do discurso matemático escolar na escola é a modificação do discurso do dia a dia das crianças, aprendizagem pode ser vista como a *transformação* desse discurso aprendido espontaneamente, ao invés de se buscar a construção de um novo".

Entendemos que o termo *mudança* embute a ideia de que apenas um único sistema matemático deve ser adotado pelos alunos, o matemático escolar, e ele deve suplantar o sistema matemático que aluno utiliza em contextos não escolares.

Porém, apontamos que os alunos podem adotar o sistema matemático escolar no contexto escolar, mas não julgamos que esse sistema deva ou possa substituir outro sistema matemático, conforme as ideias de Sfard (2008) sugerem, porque entendemos que sistemas matemáticos distintos estão relacionados a*formas de vida* também distintas. Diante disso, julgamos que cada sistema é importante e válido no interior da *forma de vida* à qual está vinculado. Assim, os alunos podem manter – e provavelmente o farão – a utilização do sistema do dia a dia no contexto e em situações que julguem que esse sistema é o mais útil.

Ainda que a mudança na produção discursiva sugerida por Sfard (2008) ocorra somente em âmbito contextual, ou seja, somente no contexto escolar, a autoraconsidera a mudança discursiva como uma necessidade de realização pelos alunos, unicamente.

Com isso, ela não aponta para a existência de situações nas quais mudanças nas produções discursivas dos professores sejam necessárias porque eles se equivocaram ou porque os alunos apresentam uma produção discursiva mais útil para a compreensão de uma determinada temática.

Diante disso, argumentamos que a aprendizagem matemática em âmbito escolar pode se constituir como uma *delimitação discursiva,* em alternativa à *mudança discursiva*. Delimitação discursiva, no sentido de que os alunos identifiquem a utilização de determinado *sistema*, em função das finalidades elaboradas no interior da *forma de vida*à qual o sistema está vinculado. Dessa forma, os alunos podem utilizar um ou outro sistema, avaliando a que *forma de vida* o uso de determinado sistema está relacionado.

Para Sfard (2008), a identificação da necessidade de mudança discursiva por parte dos alunos ocorre por meio de um conflito denominado de "conflito commognitivo"[20](Sfard, 2008, p. 276, tradução nossa). O conflito commognitivo é uma situação indicativa de que os alunos e os professores estão usando diferentes discursos ou, em nossos termos, diferentes sistemas.

---

[20] A palavra *commognitivo* é uma tradução do neologismo "commognitive" criado por Sfard (2008, p. 83). Esse neologismo corresponde à junção das palavras "comunicação" e "cognição", escritas, originalmente, em língua inglesa. O termo *commognitive* foi criado pela autora para evidenciar o seu entendimento de que os processos cognitivos são processos comunicacionais. Entre esses processos cognitivos, por exemplo, a autora define a atividade de pensar**,** em termos comunicacionais, como sendo "uma comunicação consigo mesmo" (Sfard, 2008, p. 82, tradução nossa).

Em termos de *delimitação discursiva*, podemos entender que a existência do conflito pode constituir-se como um importante momento para o professor esclarecer as peculiaridades de diferentes sistemas e suarelevância no interior das formas de vidas em que esses sistemas são utilizados.

Para nós, o sistema matemático escolar como sistema historicamente estabelecido, que possui *status* disciplinar, deve ser ensinado aos alunos pelos professores como *um* dos sistemaspossíveis, aquele que pode ser utilizado como sistema normativo para organização de algumas de suas experiências, mas que não é o único, pois julgamos que a maneira como esse sistema é apresentado aos alunos pode conduzi-los a compreender que somente esse sistema é válido e deve ser usado para a organização de todas as experiências com as quais eles se deparem.

Para nós, Sfard (2008) reitera um posicionamento de unicidade, pois destaca que os alunos devem adotar o sistema matemático como modelo e abandonar outros sistemas normativos que utilizem, em virtude de que o sistema matemático escolar é um sistema historicamente estabelecido e abordado como padrão para o ensino da matemática há muito tempo, devendo haver razões, ainda que não explícitas, para essa escolha.

Nas palavras da autora, os alunos devem se convencer de que "se eles [o professor, o autor do livro didático, etc.] estão falando o modo como eles fazem, eles devem ter boas razões. Além disso, eles já têm feito isso por um longo tempo até agora" (Sfard, 2008, p. 287, tradução nossa).

Sobre essa questão, temos o entendimento de que o sistema matemático escolar deve ser abordado no contexto escolar, mas não como o único sistema matemático existente, como já sinalizamos, e nem isento de análise crítica, conforme as ideias de Sfard (2008) podem conduzir a concluir.

Ainda que Sfard (2008) sugira que os alunos devam se alinhar ao sistema matemático escolar acriticamente, pois devem simplesmente compreender que ele vem sendo adotado como padrão para a organização de experiências em âmbito escolar há longo tempo, a autora reconhece que esse alinhamento dos alunos ao sistema matemático escolar é uma questão de "relação de poder" (Sfard, 2008, p. 283, tradução nossa).

A pesquisadora aponta que essa relação de poder é decorrente da liderança do discurso do professor como discurso modelo, o qual os alunos devem seguir, haja vista ser esse um discurso peculiar ao sistema matemático escolar. Ela destaca que essa liderança é historicamente incontestável e predeterminada.

Todavia, julgamos que a relação de poder relativa ao fato de os alunos deverem seguir o discurso matemático do professor como *discurso líder*, ou ainda como discurso modelo, é uma relação instituída entre os discursos ou, em nossos termos, entre os sistemas matemáticos normativos.

O sistema matemático escolar tem sido adotado, *há longo tempo*, como sistema padrão em aulas de matemática no contexto escolar, ou seja, como *o* sistema normativo, pelo qual diversas experiências devem ser organizadas. Exclui, assim, a possibilidade de outros sistemas matemáticos normativos serem utilizados. Por isso, justificamos que a liderança do discurso do professor é uma liderança exercida, implicitamente, pelo sistema segundo o qual o discurso do professor é orientado.

Em uma perspectiva wittgensteiniana, aprender algo pode ser entendido como aprender a *ver* (Gottschalk, 2008; Miguel; Vilela; Moura, 2010; Moreno, 2005). Com base nessa ideia, podemos dizer que a aprendizagem matemática, a aprendizagem do sistema matemático escolar tal qual se adota no contexto escolar, proporciona *uma* e somente *uma*maneira de *ver* nossas experiências, de organizar nossas experiências de determinado modo. Isso porque, no contexto escolar, adota-se o sistema matemático escolar como sistema padrão, pelo qual as experiências devem ser analisadas.

Consoante com essa ideia, as delimitações de Sfard (2008) apresentadas acima reiteram que a aprendizagem matemática no contexto escolar corresponde à adoção única do sistema matemático escolar e ao alinhamento dos alunos a ele.

A aprendizagem matemática na modelagem

Na implementação da modelagem no contexto escolar, predominantemente, o sistema matemático escolar é adotado como padrão pelo qual as tarefas de modelagem são *organizadas*. Em outras palavras, esse sistema é escolhido como *forma de ver* e *de lidar* com as situações-problema propostas nesse contexto.

Não basta somente identificar essa premissa que perpassa o desenvolvimento das tarefas de modelagem no contexto escolar e explicitálas. É importante discutir e refletir sobre o que tal entendimento significa ou ainda o que ele *manifesta*.

A partir de iniciais análises com base em uma perspectiva wittgensteiniana, desenvolvida neste artigo, podemos identificar que as experiências ou ainda as situações-problema tratadas em modelagem no contexto escolar são homogeneizadas pelo sistema matemático escolar. Ou seja, toda e qualquer experiência é especificamente *vista* com a ferramenta conceitual peculiar ao sistema matemático escolar.

Nessa direção, a aprendizagem matemática em modelagem assemelha-se ao que preconiza Sfard (2008), ou seja, reitera a aprendizagem matemática em termos da existência de uma substituição – ou mudança discursiva – do que os alunos adotavam pelo sistema matemático escolar, unicamente.

Com isso, a aprendizagem matemática no uso da modelagem culmina por não contemplar a aprendizagem de outros sistemas matemáticos que, vinculados a outras *formas de vida*, requerem uma análise própria e específica, ao invés de comparativa ao sistema matemático escolar.

Escolher, elaborar, usar ou pesquisar uma situação-problema de natureza empírica e abordá-la, utilizando o sistema matemático escolar unicamente, tal qual definimos constituir-se a implementação da modelagem no contexto escolar, unifica e padroniza o modo como essas situações devem ser abordadas.

Essa ação ignora a existência de outros sistemas, pelos quais as situações-problema podem ser também abordadas. Mas por que assim procedemos? Por que atribuímos ao sistema matemático escolar tamanho *status* de ferramenta para resolver os problemas de natureza empírica tratados no contexto escolar?

Talvez adotemos, de maneira implícita, as delimitações de Sfard (2008), ou seja, *porque sempre fizemos assim, sempre adotamos o sistema matemático escolar, deve haver boas razões para isso*. Para além do contexto escolar, muitas situações-problema possuem o sistema matemático escolar como sistema padrão para análise. São exemplos disso os problemas oriundos de operações bancárias e financeiras com as quais nos deparamos no dia a dia. Essa é uma das respostas possíveis ao nosso questionamento.

Todavia, existem ainda outras situações que não possuem o sistema matemático escolar como sistema padrão. Em particular, nós as encontramos nas diferentes práticas cotidianas dos indivíduos, conforme documentam pesquisas no campo da etnomatemática.

As primeiras implementações da modelagem no contexto escolar já indicaram que os padrões de uso do sistema matemático escolar geravam obstáculos ao seu uso (Burak, 1994, 2004). A matemática escolar estruturada em conteúdos preestabelecidos e lineares divergia do ensino da matemática propiciado pela modelagem, porque, em modelagem, as proposições matemáticas relativas ao próprio sistema matemático escolar são tratadas a partir das situações-problema e, por isso, não seguem a linearidade estruturante do sistema matemático escolar, tal qual se encontra predominantemente posta.

Mudanças curriculares são relevantes para a implementação da modelagem no contexto escolar com menos obstáculos advindos da maneira pela qual a matemática escolar está curricularmente organizada (Biembengut; Hein, 2003; Caldeira, 2007). Essa identificação pode ser indício de uma necessária reflexão a respeito não apenas da mudança na *forma* como os conteúdos da matemática escolar estão estruturados, mas também da escolha do próprio sistema matemático escolar, como sistema padrão, predominantemente adotado para o desenvolvimento de tarefas de modelagem.

Em Miguel, Vilela e Moura (2010), encontramos encaminhamentos teóricos em torno de uma mudança, na referência disciplinar de matemática, para uma compreensão INdisciplinar de ensino da matemática. Os autores analisam esse ensino, fundamentados na compreensão de matemática como prática social. Ensinar matemática poder ser entendido como o ensino de práticas, e essas são diversas e se constituem em diferentes formas de vida.

Conceber a matemática como prática social e o ensino da matemática como ensino de práticas amplia as práticas matemáticas a serem abordadas no contexto escolar. E a modelagem, que já possui como objetivo tratar de situações com as quais os indivíduos podem se deparar em diferentes contextos, possui o potencial de ser uma abordagem pedagógica (Malheiros, 2012) com a qual podem ser oportunizadas aos alunos diferentes maneiras de praticar matemática. Todas válidas e úteis, a depender da *forma de vida* relacionada às situações estudadas.

As ideias de Wittgenstein (1999) adotadas neste artigo nos instigaram a analisar o modo como *usamos*modelagem na perspectiva da Educação Matemática, por que a *usamos* de uma determina maneira e quais as implicações desses *usos* para a aprendizagem matemática no contexto escolar.

Objetivamos que essas reflexões sejam úteis para pensarmos sobre modelagem, haja vista, conforme sinalizou Araújo (2007), que a delimitação que se tem de matemática reverbera nas conceituações de modelagem e, consequentemente, na maneira como a modelagem será implementada na sala de aula.

Nessa direção, o presente artigo visou apresentar uma possível maneira de entender modelagem e as implicações da adoção de uma compreensão normativa de matemática, para o entendimento de que matemática se pretende aprender no contexto escolar, quando no uso da modelagem.

Essa deve ser entendida como mais uma maneira de *ver*a temática da aprendizagem matemática escolar na modelagem. Para isso, as ideias de Wittgenstein nos auxiliam a identificar a importância de tornar explícito o que está posto, de uma maneira não definitiva e homogeneizante.

Agradecimentos

Agradecemos aos participantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia, Ana Virgínia de Almeida, Jamille Vilas Boas, Maria Raquel Queiroz, Thaine Santana, pelos comentários feitos à versão prévia deste artigo.

Também agradecemos aos professores Adilson Oliveira do Espírito Santo, Antônio Miguel, Aurino Ribeiro Filho, Denise Silva Vilela e ao professor José Luís de Paula Barros Silva, pelos comentários feitos à versão anterior deste artigo e aos pareceristas *ad hoc* da revista.

De maneira particular, somos gratos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro à pesquisa à qual este artigo integrou.

Referências

ALMEIDA, L. M.W.; ARAÚJO; J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011. p.65-81.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 17-32.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 161-174.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática*: concepções e experiências de futuros professores. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 17-32.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT; S; HEIN, H; DOROW, K. C. Mapeamento das pesquisas sobre modelagem matemática: análise das dissertações e teses. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. *Anais*... Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M. S; SCHMITT, A. L. F. Modelagem matemática no ensino fundamental: um meio de despertar no estudante o interesse em aprender matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇAO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

BLUM, W; FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Blumenau, v.1, p. 45-58, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.*PCN:* Orientações Educacionais Complementares aos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

BURAK, D. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. *Zetetiké*, Campinas, v. 2, n. 2, p. 47-60, 1994.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2004, Londrina. *Anais*... Paraná: UEL, 2004. 1 CD-ROM.

BURAK, D; KLUBER, T. E. Encaminhamentos didático-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO; J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011. p. 65-81.

CALDEIRA, A. D. Etnomodelagem e suas relações com a Educação Matemática na Infância. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 161-174.

CIFUENTES, C. J; NEGRELLI, L. G. O processo de modelagem e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO; J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011. p. 123-140.

FERREIRA, D. H. L.; WODEWOTZKI, M. L. L. Questões ambientais e modelagem matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 115-132.

FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

FERRUZI, E. C; ALMEIDA, M. W. L. O contexto da modelagem matemática: possibilidade de construção do conhecimento. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMATICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina. *Anais...* Londrina, Paraná, 2009.1 CD-ROM.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process.*ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe,v.38, p. 143-162, 2006.

GERMANY.Federal Ministry of Education and Research. *The development of Nacional Educacional Standarts*. 2004. Disponível em: <http.://www the_development_of_national_educationel_standarts.pdf.bmbf.de/pub/>. Acesso em: 16 jun. 2011.

GLOCK, H. J. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedes,* Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências*, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul./dez., 2004a.

GOTTSCHALK, C. M. C. Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. *Anais...* 2004b. 1 CD ROM.

JESUS, W. P. *Educação Matemática e filosofias sociais da Matemática*: um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest. 2002. 212 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

KAISER, G. et al. (Org.). Trends in teaching and learning of mathematical modeling ICTMA 14. New York: Springer, 2011.

KAISER, G; SCHWARZ, B. Authentic modeling problems in mathematics education-examples and experiences. *Journal furMathematik-didaktik*, Berlin, v. 31, p. 51-76, 2010.

KLUBER, T. E; BURAK, D. Bases epistemológicas e implicações para as práticas de modelagem matemática na sala de aula. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília, *Anais*... Brasília, 2009. 1 CD-ROM

LESH, R; FENNEWALD,T. Introduction to part I modeling: What is it? Why do it?. In: LEISS et al. (Org.). *Modeling student mathematical modeling competences:*13 ICTMA.New York: Springer, 2010. p. 5-10.

MAAβ, K. Modeling in class and the development of beliefs about the usefulness of mathematics**.** In: LESS et al. (Org.). *Modeling student mathematical modeling competences:* 13 ICTMA.New York: Springer, 2010. p. 409-420.

MAAβ, K. What are modelling competencies. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MALHEIROS, A. P. S. Delineando convergências entre investigação temática e modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2012, Petrópolis. *Anais*... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2012, 1 CD-ROM.

MIGUEL, A. Percursos indisciplinares na atividade de pesquisa em história (da educação matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. *Bolema*, Rio Claro, v. 23, n. 35a, p. 1-57, 2010.

MIGUEL, A; VILELA, D. S; MOURA, A. R. L. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, Campinas, v. 18, p.129-203, 2010.

MORENO, A. Descrição fenomenológica e descrição gramatical - idéias para uma pragmática filosófica. *Revista Olhar*, São Carlos, v. 7, n. 7, p. 94-139, 2003.

MORENO, A. *Os labirintos da linguagem*: ensaio introdutório. São Paulo: Moderna, 2005.

NCTM. Nacional Council of teachers of mathematics. *Principles and Standarts of School Mathematics*. 2000. Disponível em:< http://standardstrial.nctm.org/document/index.htm>. Acesso em: 16 jun. 2011.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In: LESS et al. (Org.). *Modeling student mathematical modeling competences:*13 ICTMA.New York: Springer, 2010. p. 43-59.

RIBEIRO, J. *Matemática*: ensino fundamental.São Paulo: Scipione, 2010.

SFARD, A. *Thinking as communicating:* human development, the growth ofdiscourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

SFARD, A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, Philadelphia,v. 16, n. 4, p. 567-615, 2007.

SILVA, D. K. A transposição didática de conceitos de geometria espacial em situações didáticas de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. *Anais*... Brasília, 2009. 1 CD-ROM.

SILVEIRA, E. *Modelagem Matemática em Educação no Brasil*:entendendo o universo de teses e dissertações. 197 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2007.

SOUZA, E. G. A aprendizagem matemática na modelagem matemática. 2012. 143 p. Tese (Doutorado em Filosofia, Ensino e História das Ciências)-Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2012.

SWAN, M. et al. The roles of modeling in learning mathematics. In: BLUM, W. et al. *ICMI Study 14:* applications and modelling in mathematics education – discussion document*,* 2007. p. 275-284.

VELEDA, G. G.; ALMEIDA, L. M. W. A caracterização da realidade em trabalhos de modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010, 1 CD-ROM.

VILELA, D. S. Elementos para uma compreensão das matemáticas como práticas sociais. In: MIORIM, M. A.; VILELA, D. S. (Org.). *História, filosofia e educação matemática:* práticas de pesquisa. Campinas: Alinea, 2010. p. 89-125.

VILELA, D. Práticas Matemáticas: contribuições socio-filosóficas para a Educação Matemática. *Zetetiké,* Campinas, v. 17, p. 191-212, 2009.

VILELA, D. S. *Matemáticas nos usos e jogos de linguagem:* ampliando concepções na Educação Matemática. 247f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999. (Coleção Os pensadores).

Submetido em 14/11/2012

Aprovado em 17/02/2014