Intuições de alunos do 9º ano em acontecimentos independentes

Paulo Ferreira Correia[1] *José António Fernandes*[2]

Resumo: Neste artigoapresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de independência de alunos do 9º ano de escolaridade. Participaram no estudo 310 alunos, do 9º ano, a quem foi aplicado um questionário com várias questões sobre probabilidade condicionada e independência, sendo aqui apenas exploradas as duas que envolvem independência. Em termos de resultados, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que estes possuem ideias intuitivas sobre o conceito de independência nos contextos estudados.

Palavras-chave: Independência.Reposição de objetos.Alunos do 9º ano.

Intuitions of 9th grade pupils about independent events

Abstract: This paper aims at describing some results of a study about intuitive ideas of independence of pupils attending the 9th grade. In the study participated 310 pupils of the 9th grade, who answered a questionnaire with several tasks on conditional probability and independence. In this paper we explore just the two tasks that involve independence. In general, the results show that students have intuitive ideas about the concept of independence in the contexts studied.

Keywords: Probability.Independence. 9th grade pupils.

Introdução

Na opinião de Gal (2005), as Probabilidades constituem um tema útil no dia a dia das pessoas, representam um saber instrumental noutras disciplinas, constituem um conhecimento necessário a várias profissões e intervêm na tomada de decisões. Borovcnik e Kapadia (2010) acrescentam o papel das Probabilidades na compreensão de qualquer procedimento inferencial de Estatística, referindo tratar-se de um tema importante, merecedor de estudo por direito próprio.

As diferentes aplicações do tema têm-se refletido na necessidade de um aprofundamento do seu ensino, aspeto que pesou na sua recente introdução nos programas escolares dos primeiros anos de escolaridade de muitos países.

[1]Professor na Escola Secundária/3 de Barcelos, Portugal. ferreiracorreiapaulo@gmail.com
[2] Professor no Instituto de Educação, Universidade do Minho, Portugal. jfernandes@ie.uminho.pt

Também Fischbein (1975), Falk, Falk e Levin (1980) e Borovcnik e Peard (1996) advogam que a aprendizagem de conceitos relacionados com a incerteza deve ser iniciada logo nos primeiros graus de ensino.

No caso de Portugal, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Portugal, 2007), o seu estudo passou a iniciar-se nos dois últimos anos do 1º ciclo da escolaridade básica, com a exploração de situações aleatórias queenvolvem o conceito de acaso e a utilização do vocabulário próprio para as descrever.

Já no que respeita ao ensino formal de probabilidade condicionada, o NCTM (2003) restringe-o a alunos dos anos 9-12, e os programas de matemática portugueses preveem o ensino dos tópicos de probabilidade condicionada e independência apenas no ensino secundário.

Contudo, são vários os estudos (Jones et al., 1999; Tarr; Lannin, 2005; Tarr, 1997; Watson, 1995) que defendem que o tópico de independência é, de facto, apropriado para o currículo de matemática do ensino básico. No estudo de Tarr (1997),com alunos do 5º ano de escolaridade, os resultados revelam que a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e independência não precisa de ser adiada até que os estudantes tenham desenvolvido destrezas robustas de comparação de frações, podendo a abordagem desses conceitos ser efetuada de uma forma intuitiva (Watson, 1995).

De um ponto de vista da probabilidade teórica, parece lógica a abordagem simultânea dos tópicos de probabilidade condicionada e independência, dado que a definição de probabilidade condicionada e a definição de independência estão relacionadas, pois dois acontecimentos A e B, com $P(B) \neq 0$, são independentes, se $P(A|B) = P(A)$, e são dependentes, se $P(A|B) \neq P(A)$.

A definição de acontecimentos independentes pode também ser estabelecida a partir da regra do produto. Neste caso, os acontecimentos A e B, de um espaço amostral associado a uma experiência aleatória, são independentes, quando verificam a relação $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Repare-se que nesta definição não se exige que os acontecimentos A e B tenham probabilidade diferente de zero, alargando-se, assim, a definição de acontecimentos independentes ao caso em que pelo menos um dos acontecimentos tem probabilidade zero.

Huff (1971, apud Hawkins; Jolliffe; Glickman, 1992) sugeriu a seguinte definição alternativa para acontecimentos independentes, envolvendo apenas probabilidades condicionadas: dois acontecimentos A e B são independentes, se $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$, onde $\overline{B}$ é o complementar de B.

No entanto, enfatizando a relação entre probabilidade condicionada e independência, há autores que recomendam a introdução do tópico de independência como um caso especial de probabilidade condicionada (Ahlgren; Garfield, 1991; Tarr, 1997), na medida em que esta abordagem será mais intuitiva para os alunos (Kelly; Zwiers, 1988; Shaughnessy, 1992) e porque o ensino simultâneo dos dois conceitos permite, por um lado, o estabelecimento de conexões entre eles e, por outro lado, favorece a diferenciação entre os dois tópicos (Tarr, 1997).

Embora exista investigação substancial sobre o pensamento probabilístico de alunos do ensino básico, pouca dessa investigação se tem centrado no pensamento de estudantes em probabilidade condicionada e independência. Essa ausência de investigação sobre o pensamento dos estudantes nestes dois conceitos é uma questão preocupante, dada a importância crescente que lhe é atribuída no ensino de Probabilidades no ensino básico (Tarr; Jones, 1997).

Assim, tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades nesse nível de ensino, na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9º ano sobre independência nos contextos de lançamento de moedas e de rotação de roletas.

Investigação prévia

As ideias intuitivas dos alunos, resultantes das suas experiências, embora aceitáveis em muitos dos contextos em que são aplicadas pelos estudantes, podem ser desoladoramente inconsistentes com os conceitos que pretendemos que eles aprendam na escola (Garfield; Ahlgren, 1988).

Borovcnik e Kapadia (2010) salientam que as pessoas usam a sua experiência para efetuar julgamentos probabilísticos de forma imperfeita – pior ainda, de forma desorganizada; têm dificuldades em efetuar julgamentos envolvendo probabilidades muito pequenas e muito altas, especialmente se elas estão associadas a consequências desfavoráveis; estão inclinadas para atribuir igual chance às diferentes possibilidades, especialmente se são apenas duas; atribuem probabilidades e processam-nas em novas situações, negligenciando as regras mais básicas, como, por exemplo, que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

Ainda segundo estes autores, algumas particularidades do pensamento estocástico tornam-no muito diferente daquele mobilizado em outras situações: não há um controle direto do sucesso em probabilidades – o acontecimento mais raro pode ocorrer e destruir a melhor estratégia; a interferência das reinterpretações causais pode deixar uma pessoa completamente perdida; os nossos critérios em situações de incerteza podem ter a sua base em qualquer parte e podem estar carregados de emoções – a probabilidade e a divindade tiveram uma origem comum na Grécia antiga.

Estimativas informais de probabilidade, apoiadas na experiência, são, muitas vezes, fortemente influenciadas por aspetos não científicos. Por exemplo, as pessoas recorrem ao que é mais fácil de lembrar, à informação fornecida pelas suas preconcepções, ao que parece especial em circunstâncias atuais e à preferência por um certo resultado, o que as leva a ignorar influências contraditórias e a exagerar outras. Devemos ter cuidado com essa tendência, quer nos outros quer em nós próprios, porque ela pode distorcer os nossos julgamentos acerca de um grupo de situações similares (Ahlgren; Garfield, 1991).

Segundo Garfield e Ahlgren (1988), de uma maneira geral, as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento correto de intuições sobre ideias probabilísticas fundamentais devem-se essencialmente a três aspetos: muitos estudantes têm dificuldades associadas ao conceito de número racional e ao nível do raciocínio proporcional, aspetos usados no cálculo, na descrição e na interpretação de probabilidades; as ideias probabilísticas conflituam, muitas vezes, com as experiências dos estudantes e com a forma como eles veem o mundo; e muitos estudantes desenvolvem aversão às probabilidades, ao serem expostos a um ensino muito abstrato e formal do tema.

Um importante estudo acerca do pensamento probabilístico de alunos do ensino básico sobre independência foi levado a cabo por Fischbein, Nello e Marino (1991). Nesse estudo, os 618 alunos do 4º ano ao 8º ano de escolaridade eram questionados sobre se o acontecimento obter três faces europeias é mais provável em três lançamentos consecutivos de uma moeda ou no lançamento simultâneo de três moedas. Os autores verificaram que 38% dos alunos do 4º e do 5º anos e 30% dos restantes, sem instrução em probabilidades, responderam que a probabilidade não era a mesma. Predomina, em todos os anos de escolaridade, a crença de que é mais provável obter três faces europeias em três lançamentos consecutivos de uma moeda do que no lançamento simultâneo de três moedas. Apoiados nas entrevistas realizadas, os autores concluíram que os alunos acreditavam fortemente que os resultados obtidos no lançamento da moeda podiam ser controlados pelo indivíduo. Ora, esta crença é incompatível com a independência dos acontecimentos, uma vez que a probabilidade de obter face europeia em cada experiência se mantém constante e igual a $1/2$.

Ideias erradas semelhantes foram obtidas pelo National Assessment of Educacional Progress in Mathematics (Brown et al., 1988, apud Tarr; Lannin, 2005), quando foi pedido aos alunos para elegerem o resultado mais provável no próximo lançamento de uma moeda equilibrada, se nos primeiros quatro lançamentos sucessivos se obteve $E\,E\,E\,E$ (em que E representa a face europeia de uma moeda). Agora, apenas 47% dos alunos do 7º ano escolheram a alternativa correta: as faces nacional e europeia são igualmente prováveis.

Resultados ligeiramente melhores foram obtidos num estudo envolvendo 2.930 estudantes dos 11 aos 16 anos de idade (Green, 1983), em que foi lançada quatro vezes uma moeda equilibrada, obtendo-se face europeia em todos os lançamentos. Quando questionados sobre o resultado mais provável no quinto lançamento, 75% dos estudantes (incluindo 67% dos estudantes de 11-12 anos de idade) responderam corretamente que "obter a face europeia é tão provável como obter a face nacional".

Num outro estudo, Konold et al. (1993) pediram a estudantes universitários de um curso de remediação matemática para indicarem quais das sequências seguintes é mais provável e menos provável de ocorrer, respetivamente, quando é lançada cinco vezes uma moeda equilibrada: a) $EEENN$, b) $NEENE$, c) $NENNN$, d) $ENENE$ e e) as quatro sequências são igualmente prováveis. Relativamente à sequência mais provável, aproximadamente 61% dos estudantes responderam corretamente, mas apenas 35% responderam corretamente em relação à sequência menos provável. Fernandes (1990), num item muito semelhante ao usado por Konold et al. (1993), obteve resultados muito semelhantes em alunos do 11º ano e em futuros professores de matemática.

Esses resultados mostram que um número assinalável de estudantes, que tinham revelado compreender a independência relativamente à sequência mais provável, abandonou esse pensamento na sequência menos provável. Assim, os autores concluíram existir um conflito entre a crença de que, numa moeda, a probabilidade de sair face Europeia (E) é igual à probabilidade de sair face Nacional (N) e a crença de que, em vários lançamentos de uma moeda, o número de faces Europeia e faces Nacional é sensivelmente igual.

No estudo de Fischbein, Nello e Marino (1991), antes referido, questionaram-se também os alunos acerca da probabilidade dos acontecimentos A: "obter face 5 num dado e face 6 no outro" e B: "obter face 6 em ambos os dados", na experiência aleatória de lançamento de dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6. Foram muito poucos os alunos que responderam corretamente, e a instrução não se revelou um fator de melhoria nesta ideia errada.

Os alunos dos 11 aos 14 anos, que tinham recebido instrução em Probabilidades, apresentaram justificações que envolvem o conceito de independência e a equiprobabilidade das seis faces do dado: "Cada dado é independente do outro. A probabilidade de obter um certo número de um dado é $1/6$ e a probabilidade de obter o mesmo número com outro dado é a mesma" (Fischbein; Nello; Marino, 1991, p. 535). Neste caso, a justificação de que os pares ordenados $(5, 6)$ e $(6, 6)$ têm igual probabilidade resulta da combinação entre as ideias de independência e de equiprobabilidade e do fato de considerar os resultados possíveis 5 e 6 separadamente.

Num estudo posterior, Fischbein e Schnarch (1997) confirmaram os resultados anteriores, em que alunos do 5º ano ao ensino superior apresentaram percentagens de respostas corretas que variavam entre 6% e 20%. A grande maioria (com percentagens de respostas a variar entre os 70% e os 78%) dos alunos escolheu a opção "têm ambos a mesma chance", e a confusão entre acontecimentossimples e compostos foi a única ideia errada que se manteve estável ao longo das idades.

A dimensão da amostra é outro aspeto que pode gerar dificuldade nos julgamentos probabilísticos dos alunos, uma vez que tendem a negligenciar a sua influência, quando efetuam estimativas de probabilidade, atribuindo às pequenas amostras propriedades apenas válidas na população ou em grandes amostras (Kahneman; Tversky, 1982). Na situação seguinte, apresentada por

Fischbein e Schnarch (1997, p. 99), muitos alunos revelaram essa tendência.

> A probabilidade de obter face europeia pelo menos duas vezes quando se lançam três moedas é:
> a) Menor do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> b) É igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> c) É maior do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.

Diante desta questão, cerca de 30% dos alunos do 5º ano e 75% dos alunos do 11º ano aderiram à ideia errada de que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 2 vezes, quando se lançam 3 moedas, é igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes, quando se lançam 300 moedas De uma maneira geral, a utilização da estratégia efeito do tamanho da amostra (ou do número de experiências) aumentou com a idade, embora nesta questão tenha diminuído nos estudantes universitários.

Os autores concluíram que os alunos ignoraram o papel da dimensão da amostra na probabilidade dos dois acontecimentos e, na opinião dos autores (Fischbein; Schnarch, 1997, p. 101), "esta ideia errada baseia-se na ideia de que uma proporção é representativa de um número indeterminado de pares de números". Esta é uma crença tão forte que disfarça uma ideia mais subtil, especificamente, a ideia de que, se a amostra se torna maior, a probabilidade de obter um certo resultado empírico tende a aproximar melhor a predição teórica. Por outro lado, os estudantes poderão não compreender a influência do tamanho da amostra, porque invocam raciocínio proporcional e assumem que toda a amostra deve ser proporcional ou refletir o comportamento da população.

Stavy e Tirosh (2000) atribuem essa concepção errada à regra intuitiva "mesmo A – mesmo B", pela qual a igualdade das razões ($2/3 = 200/300$) implica a igualdade das probabilidades. As autoras também constataram que o uso, por parte dos estudantes, desta regra intuitiva parece tornar-se mais proeminente com a idade, enquanto a sua habilidade para reconhecer a proporcionalidade estabiliza.

Tarr (1997) concluiu que, antes da instrução, mais alunos exibiram nível 2 (numa escala de 1 a 4) de pensamento em independência do que o que foi exibido em qualquer outro nível de pensamento, em consequência da predisposição dos alunos para adotar a estratégia da representatividade (Kahneman; Tversky, 1982), quando faziam julgamentos probabilísticos. Consequentemente, o autor refere a importância de confrontar os estudantes com esta heurística por meio de problemas apropriados, dado que ela é provavelmente o maior impedimento para a compreensão do conceito de independência.

Da experiência de ensino implementada com alunos do 5º ano, centrada na compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e independência, Tarr (1997) concluiu que os estudantes foram, de uma maneira geral, bem-sucedidos na aprendizagem dos dois conceitos. Em particular, 22 dos 26 estudantes foram classificados no nível 3 ou 4 em probabilidade condicionada e independência.

Quanto às alterações qualitativas no pensamento probabilístico dos estudantes, Tarr (1997) constatou que, comparando com as avaliações iniciais em independência, os estudantes, após a instrução, estavam mais inclinados a usar números para rejeitar a estratégia da representatividade e reconhecer que o espaço amostral é conservado nas situações com reposição e que nenhum número finito de experiências garante a realização do acontecimento pretendido numa experiência aleatória.

A "heurística da representatividade" (Kahneman; Tversky, 1982), para além da influência das "conceções erradas do acaso", é também influenciada pela "insensibilidade às probabilidades prévias ou *a priori* dos resultados"; neste caso, por ignorar o impacto da informação prévia na probabilidade e pela "insensibilidade à dimensão da amostra", fenómeno que os autores designam por "lei dos pequenos números", já antes referido. O problema seguinte, apresentado por Fischbein e Schnarch (1997, p. 98) a alunos do 5º ano, 7º ano, 9º ano, 11º ano e a estudantes universitários, desencadeou a adesão dos alunos a esta heurística.

No jogo do loto escolhem-se 6 números de um total de 49. O João escolheu os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e a Ana escolheu os números 39, 1, 17, 49, 8 e 27. Qual deles tem maior chance de ganhar?

a) O João tem mais chances de ganhar.

b) A Ana tem mais chances de ganhar.

c) O João e a Ana têm as mesmas chances de acertar nos 6 números.

Nas justificações dos alunos que responderam que a Ana tem mais chances de ganhar, está implícita a adesão à heurística da representatividade, se a justificação do aluno evoca argumentos de aleatoriedade (por exemplo, referir que a chave da Ana reflete maior aleatoriedade do que a chave do João). Fischbein e Schnarch (1997) concluíram que a adesão à estratégia da representatividade diminuiu com a idade, variando entre 22% dos estudantes universitários e 70% dos alunos do 5º ano.

As ideias erradas "efeito recente negativo" e "efeito recente positivo" (Fischbein, 1975) são ideias que ilustram a heurística da representatividade. No primeiro caso, verifica-se uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda equilibrada, seria mais provável sair a face europeia. Já no segundo caso, há uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda, seria mais provável sair novamente a face nacional.

No caso do estudo de Fischbein e Schnarch (1997), a adesão à estratégia efeito recente negativo diminuiu com a idade, tendo sido de 0% para os estudantes universitários e 35% para os alunos do 5º ano. Quanto à estratégia efeito recente positivo, ela ocorreu residualmente e foi utilizada apenas por 5% dos alunos do 7º ano e por 6% dos estudantes universitários.

Já no estudo de Green (1983), antes referido, observou-se um equilíbrio entre a percentagem de alunos a aderirem ao efeito recente positivo e ao efeito recente negativo (respetivamente, 11% e 12%). Do aprofundamento da análise, concluiu-se que a percentagem de acertos aumentou com a idade, variando entre os 67% e os 80%, e a adesão às estratégias *efeito recente negativo* e efeito recente positivo variou, em ambos os casos, entre os 10% e os 14%.

Para Watson (2005), há uma tendência, por parte de alguns alunos, para utilizarem incorretamente a ideia de *chance50-50*, identificando-a com a expressão "tudo pode acontecer" ou como descrição de qualquer acontecimento desconhecido. Ainda na opinião da autora, dado o carácter incerto dos resultados, alguns alunos, em especial aqueles que têm dificuldades no nível do raciocínio proporcional, estarão inclinados para apresentar este tipo de resposta.

A utilização incorreta desta ideia tanto pode ocorrer em situações probabilísticas em que o espaço amostral é constituído por apenas dois elementos não equiprováveis, como em situações em que o espaço amostral contém mais do que dois resultados igualmente prováveis (Tarr, 2002, apud Tarr; Lannin, 2005). Basicamente, os sujeitos consideram que, se os acontecimentos são possíveis, então são igualmente prováveis. Este raciocínio, conhecido por "enviesamento de equiprobabilidade", frequentemente entra em conflito com o conceito de probabilidade.

No estudo desenvolvido por Lecoutre e Durand (1988), em que participaram 342 alunos dos 14 aos 18 anos de idade, os autores concluíram sobre a extrema resistência do enviesamento de equiprobabilidade aos fatores manipulados, designadamentea variações de fatores relacionados com a situação experimental (informação de natureza combinatória, de natureza frequencista, modificações no nível da formulação, etc.) e de fatores de caracterização dos sujeitos (nível de formação, tipo de estudos secundários, sexo, etc.).

Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência em diferentes contextos. Neste texto, referimo-nos apenas às duas tarefas sobre independência inseridas nos contextos de lançamento de uma moeda e de rotação de uma roleta.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, designados por A_i, com $1 \leq i \leq 310$, pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano). Desses alunos, 51% eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino, as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 3º período do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1, e 79% não tinham qualquer repetência.

Foi aplicado aos alunos um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias tarefas sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas duas que envolvem o conceito de independência.

O questionário foi aplicado aos alunos em aulas de 90 minutos, no início do segundo período escolar de 2011/2012. Entretanto, os alunos tinham estudado, no início do ano letivo, os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano, que inclui aspetos de linguagem e as definições clássica e frequencista de probabilidade, e não faz referência à probabilidade condicionada e à independência.

Com as questões que tratamos neste texto, pretendemos confrontar os alunos com duas situações de independência complementares, isto é, uma situação de equiprobabilidade (lançamento de uma moeda equilibrada) e outra de não equiprobabilidade (rotação de uma roleta). Na questão da roleta, a diferença notória das áreas foi intencional por forma a facilitar a resposta correta, dado que pretendíamos efetuar uma interpretação conjunta das justificações dos alunos nas questões 1 e 2, de modo a clarificar o seu pensamento acerca de aspetos como o enviesamento de equiprobabilidade e a heurística da representatividade.

A título de exemplo, vejam-se as justificações do aluno A_3. Este aluno, para justificar que no sexto lançamento de uma moeda equilibrada é igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda, depois de, nos primeiros cinco lançamentos, ter saído sempre a face europeia, refere: *"Porque em todos os lançamentos é provável sair uma [face] ou outra"*. Na segunda questão, o aluno admite que é igualmente provável o ponteiro de uma roleta assinalar a cor preta e a cor branca quando a roleta parar, numa roleta dividida em quatro setores circulares congruentes, 3 pintados de preto e 1 pintado de branco. Da justificação do aluno na segunda questão, constata-se que ele recorreu à estratégia de enviesamento de equiprobabilidade —*sé é possível é equiprovável* –, que não estava explícita na justificação apresentada na primeira questão.

Na análise efetuada considera-se que dois acontecimentos são independentes, se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A \mid B) = P(A)$. Nesta perspetiva, consideramos a independência como um caso especial de probabilidade condicionada (Ahlgren; Garfield, 1991).

Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nas duas questões de independência, determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados.

De seguida, apresentam-se os resultados obtidos em cada uma das duas questões exploradas pelos alunos.

Apresentação de resultados

Questão 1

Quando se lança uma moeda, há dois resultados possíveis: obter a face Europeia (E) ou obter a face Nacional (N). Lançou-se cinco vezes consecutivas uma moeda equilibrada ao ar e obteve-se sempre a face Europeia, isto é, a sequência $E\ E\ E\ E\ E$. Algum dos seguintes resultados é mais provável? a) Obter novamente a face Europeia no sexto lançamento. b) Obter a face Nacional no sexto lançamento. c)É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento. Justifica a tua resposta.

A questão 1 envolve a experiência aleatória de lançar uma moeda equilibrada e anotar a face que fica voltada para cima. Associado à experiência aleatória, considera-se o espaço amostral $\Omega = \{E, N\}$, em que E representa a face europeia e N a face nacional de uma moeda.

A experiência é repetida cinco vezes, obtendo-se, em todas elas, a face europeia. Atendendo a que a probabilidade dos acontecimentos E : "sair face europeia" e N : "sair face nacional" não se altera à medida que a experiência é repetida, por se tratar de provas independentes, também no sexto lançamento os acontecimentos E e N são equiprováveis e com probabilidade igual a $1/2$
.

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de alunos segundo as opções de resposta da questão 1, incluindo a percentagem de alunos que não responderam a esta questão.

Tabela 1 – Distribuição dos alunos (em %), segundo as opções de resposta da questão 1 ($n = 310$)

Respostas	Percentagem
a) Obter novamente a face Euro no sexto lançamento.	7,7
b) Obter a face Nacional no sexto lançamento.	1,9

c) É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento.*	89,7
Não responde	0,7
Total	100

Nota — A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correta.

Da Tabela 1 destaca-se a elevada percentagem de alunos a responderem corretamente à questão 1, sendo que, de entre os alunos que selecionaram uma das três alternativas apresentadas, 90,3% assinalaram a opção correta. Sobressai também a percentagem residual de não respostas nesta questão.

Na Tabela 2 apresenta-se a distribuição das justificações apresentadas pelos alunos, bem como a percentagem de alunos que, embora tenham assinalado uma de três alternativas apresentadas, não justificaram a sua opção.

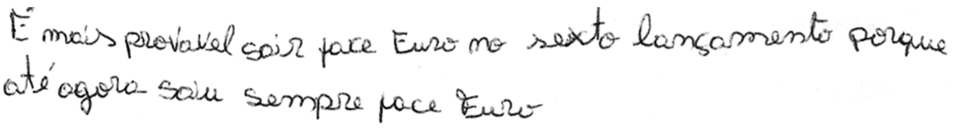
Tabela 2 – Justificações apresentadas pelos alunos na questão 1

Justificações	Frequência	Percentagem
Resposta a)		
Como saiu sempre Euro, é mais provável sair Euro.	15	62,5
Outra	5	20,8
Não justifica	4	16,7
Total	24	100
Resposta b)		
Como saiu sempre Euro, é mais provável sair Nacional.	3	50,0
Outra	1	16,7
Não justifica	2	33,3
Total	6	100
Resposta c)		
Valores da probabilidade dos acontecimentos E e N	63	22,7

É possível sair Euro ou Nacional.	62	22,3
A moeda é equilibrada.	58	20,9
As provas são independentes.	38	13,6
As faces E e N têm a mesma probabilidade de sair.	20	7,2
Uma chance para cada resultado.	10	3,6
Diagrama de árvore.	8	2,9
As faces têm o mesmo tamanho.	1	0,3
Outra justificação	5	1,8
Não justifica	13	4,7
Total	278	100

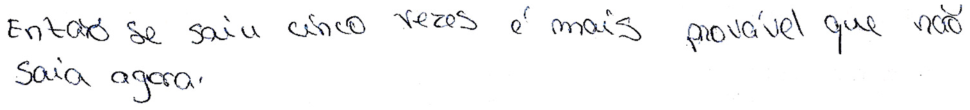
De entre os 24 alunos que optaram pela resposta a), mais de metade (62,5%) utilizou a estratégia efeito recente positivo, evidenciando uma tendência para acreditar que, após a obtenção de cinco vezes consecutivas da face europeia, seria mais provável obter novamente essa face no sexto lançamento. Veja-se, por exemplo, na Figura 1, a justificação do aluno A_{153}:

Figura 1 – Justificação do aluno A_{153}



Já, no que respeita à resposta b), embora pouco escolhida pelos alunos, predominou a utilização da estratégia efeito recente negativo, evidenciando-se uma tendência para acreditar que seria mais provável sair face nacional, uma vez que, nos cinco lançamentos efetuados, saiu sempre a face europeia. Veja-se, na Figura 2, a título de exemplo, a justificação do aluno A_{267}:

Figura 2 – Justificação do aluno A_{267}



Relativamente à resposta c), observa-se na Tabela 2 um predomínio das justificações construídas a partir da moeda (77,0%), nomeadamente: *"valores da probabilidade dos acontecimentos* E *e* N *"*; *"é possível sair a face Europeia ou Nacional"*; *"a moeda é equilibrada"*; *"as faces* E *e* N *têm a mesma probabilidade de sair"*; *"uma chance para cada resultado"*; e *"as faces têm o mesmo tamanho"*, em detrimento das justificações construídas a partir dos resultados das diferentes provas independentes (16,5%), nomeadamente: *"as provas são independentes"* e *"diagrama de árvore"*.

Na análise das justificações apresentadas pelos alunos para a resposta correta, isto é, a opção c), considera-se como justificação completa a que se referir à independência dos resultados associados a cada lançamento da moeda e à probabilidade dos acontecimentos E e N na forma de fração, dízima ou percentagem. Assim, considera-se como justificação completa a seguinte, ou equivalente:

> Os resultados associados aos cinco primeiros lançamentos da moeda não influenciam o resultado do sexto lançamento. No sexto lançamento é igualmente provável sair a face europeia e a face nacional da moeda equilibrada, visto que $P(E)=1/2$ e $P(N)=1/2$, considerando os acontecimentos E: "sair face europeia" e N: "sair face nacional".

Nas justificações baseadas nos *valores da probabilidade dos acontecimentos* E *e* N, que ocorreram em 22,7% dos casos, os alunos justificaram corretamente a equiprobabilidade dos acontecimentos E e N no sexto lançamento de uma moeda equilibrada, apresentando o valor correto das respetivas probabilidades na forma de fração (ver Figura 3), na forma de dízima ou na forma de percentagem.

Figura 3 – Justificação do aluno A_{234}

$$\left.\begin{array}{l} P(FE)=\frac{1}{2} \\ P(FN)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Têm a mesma probabilidade}$$

Em 20,9% dos casos, os alunos atribuíram corretamente a equiprobabilidade dos acontecimentos ao facto de estar envolvida na experiência aleatória uma moeda equilibrada (ver Figura 4).

Figura 4 – Justificação do aluno A_{89}

É uma moeda equilibrada, por isso é igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda.

Em 7,2% dos casos, os alunos limitam-se a apresentar afirmações tautológicas, o que, nesta resposta, corresponde a dizer, por outras palavras, que é igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento (ver Figura 5).

Figura 5 – Justificação do aluno A_{310}

Porque é tão provável sair a face Nacional como sair a face Euro

Cerca de 3,6% dos alunos justificaram a sua opção, referindo a *chance* única de cada um dos resultados E ou N no sexto lançamento, justificando devidamente a equiprobabilidade dos acontecimentos E e N no lançamento de uma moeda equilibrada (ver Figura 6).

Figura 6 – Justificação do aluno A_{78}

É igualmente provável obter qualquer uma das faces porque uma moeda tem 2 faces, Euro e Nacional, por isso, como só tem 1 de cada, é igualmente provável sair uma ou outra.

O aluno A_{147} foi o único a evocar aspetos físicos da moeda, referindo: "Como as faces têm o mesmo tamanho e o mesmo peso, têm a mesma probabilidade".

Nas justificações assentes na ideia de que é possível sair face Europeia ou face Nacional, os alunos admitem que o caráter aleatório dos acontecimentos E e N lhes confere a propriedade de equiprobabilidade. Em 22,3% das justificações, os alunos consideraram que a possibilidade de obter a face E ou a face N em cada lançamento é suficiente para justificar a equiprobabilidade dos acontecimentos E e N.

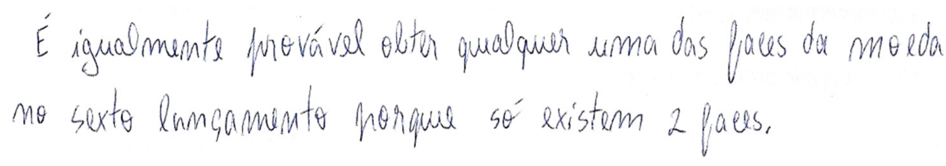
Nesta categoria foram incluídos quatro tipos de justificação. Em 46,8% dessas justificações é revelada uma tendência para admitir que ser possível obter E e N no sexto lançamento é suficiente para concluir que estes resultados são equiprováveis (ver Figura 7), isto é, ser possível corresponde a ser equiprovável.

Figura 7 – Justificação do aluno A_{299}

Porque tem face Euro e a face Nacional por isso tanto pode sair a face Nacional como a Euro.

Em 32,3% dessas justificações, a atenção dos alunos está mais centrada na existência de apenas dois resultados possíveis, como condição suficiente para que estes tenham a mesma probabilidade de ocorrer (ver Figura 8).

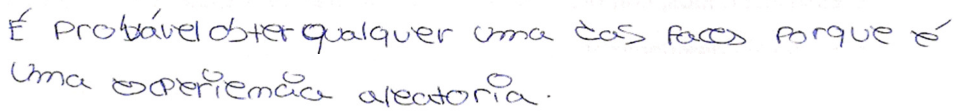
Figura 8 – Justificação do aluno A_{85}



É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento porque só existem 2 faces.

Finalmente, em 20,9% dos casos, as justificações da equiprobabilidade dos acontecimentos E e N assentam na ideia de que "nunca se sabe o que vai acontecer" ou porque se trata de "uma experiência aleatória" (ver Figura 9).

Figura 9 – Justificação do aluno A_{236}

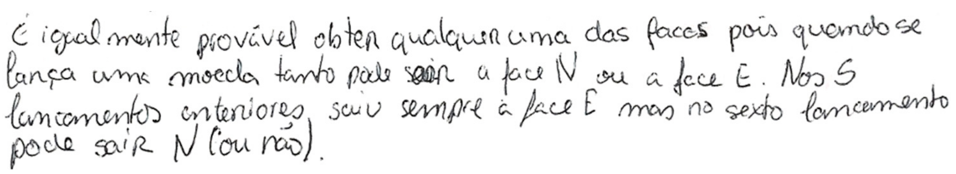


É provável obter qualquer uma das faces porque é uma experiencia aleatoria.

Aproximadamente 16,5% das justificações são construídas a partir dos resultados dos lançamentos da moeda. Os alunos, de alguma forma, admitem que o resultado obtido em cada lançamento é independente dos resultados obtidos nos lançamentos anteriores, sendo que, em 13, 6% das justificações, os alunos apelaram à independência das seis provas efetuadas.

Em 36,8% destes casos, as justificações referem-se à independência das provas repetidas, e a justificação da equiprobabilidade dos acontecimentos E e N reverte para a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade —*se é possível, então é equiprovável* (ver Figura 10).

Figura 10 – Justificação do aluno A_{84}



É igualmente provável obter qualquer uma das faces pois quando se lança uma moeda tanto pode sair a face N ou a face E. Nos 5 lancamentos anteriores saiu sempre a face E mas no sexto lancamento pode sair N (ou não).

Em 28,9% destas justificações, os alunos referem-se à independência, mas não à equiprobabilidade dos acontecimentos E e N, ou, quando o fazem, apresentam razões tautológicas (ver Figura 11).

Figura 11 – Justificação do aluno A_{31}

É igualmente provável obter a face Nacional ou a face Euro, ter saído 5 vezes a mesma face não quer dizer que seja mais provável sair essa mesma face (que neste caso é a face Euro).

Em 21,1% destas justificações, os alunos tanto se referem à independência dos resultados como à equiprobabilidade dos acontecimentos E e N, com a apresentação de probabilidades (ver Figura 12); isto é, apresentam uma justificação completa para a resposta c).

Figura 12 – Justificação do aluno A_{182}

Pois, independentemente dos resultados obtidos anteriormente, a probabilidade continua a ser a mesma, ou seja, 50%.

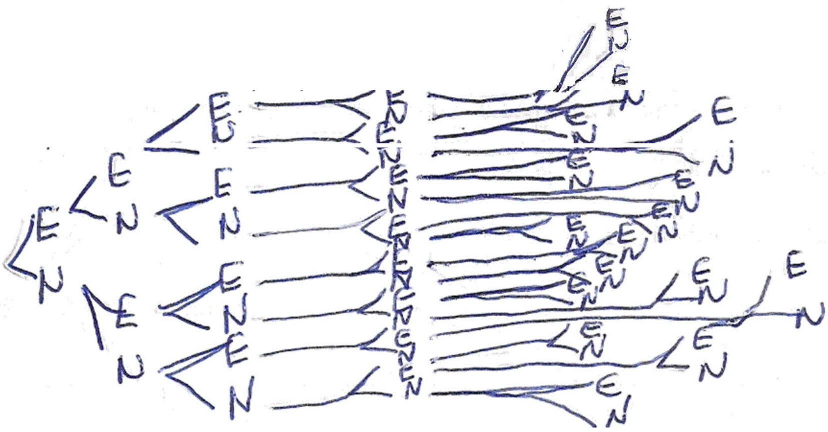
Em 13,2% destes casos, as justificações dos alunos envolvem a ideia de independência, associada ao facto de a moeda não estar viciada (ver Figura 13).

Figura 13 – Justificação do aluno A_{50}

É igualmente provável tanto para a face Euro como para face Nacional, pois é uma moeda equilibrada e o facto de terem saído 5 vezes consecutivas a face Euro isso não é relevante no 6º lançamento.

Ainda a respeito das justificações construídas a partir dos resultados das diferentes provas repetidas, 2,9% das justificações envolvem apenas a construção de um diagrama de árvore sempre correto, mas, umas vezes, completo (ver Figura 14); e, outras vezes, incompleto, porque lhe faltam ramos ou níveis de ramificação.

Figura 14 – Justificação do aluno A_4



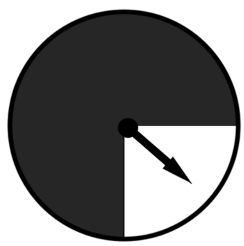
Finalmente, na categoria *outra justificação*, foram incluídas as justificações desprovidas de sentido na situação apresentada. Por exemplo, o aluno A_{306} apresenta a seguinte justificação para a escolha da alternativa de equiprobabilidade: "Porque é qualitativa".

Questão 2

Quando se gira a roleta da Figura, há dois resultados possíveis para o ponteiro, quando a roleta parar: o ponteiro assinala a cor branca (B) ou o ponteiro assinala a cor preta (P). Girou-se cinco vezes a roleta e obteve-se a sequência $B\ P\ P\ B\ P$.

Gira-se novamente a roleta pela sexta vez.
Algum dos seguintes resultados é mais provável?
a) O ponteiro assinala a cor branca quando a roleta para.
b) O ponteiro assinala a cor preta quando a roleta para.
c) É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores, branca ou preta, quando a roleta para.

Justifica a tua resposta.



Fig

A segunda questão envolve a experiência aleatória de girar uma roleta e anotar a cor assinalada pelo ponteiro, quando ela parar. Associado à experiência aleatória, considera-se o espaço amostral $\Omega = \{P_1, P_2, P_3, B\}$, em que P_i, com

$1 \leq i \leq 3$, representa cada um dos três setores circulares pretos congruentes e consecutivos e B representa o único setor circular branco e congruente com cada um dos setores pretos.

A experiência é repetida cinco vezes, obtendo-se a sequência $B\ P\ P\ B\ P$. Atendendo a que a probabilidade dos acontecimentos P: "o ponteiro assinala a cor preta" e B: "o ponteiro assinala a cor branca" não se altera à medida que a experiência é repetida, uma vez que as provas são independentes, na sexta rotação os acontecimentos P e B não são equiprováveis e mantêm as probabilidades de $3/4$ e $1/4$, respetivamente.

Na Tabela 3 apresentam-se as percentagens de alunos, segundo as opções de resposta da questão 2, incluindo a percentagem de alunos que não responderam a esta questão.

Tabela 3 — Distribuição dos alunos (em %), segundo as opções de resposta da questão 2 ($n = 310$)

Respostas	Percentagem
a) O ponteiro assinala a cor branca quando a roleta para.	2,3
b) O ponteiro assinala a cor preta quando a roleta para.*	86,8
c) É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores, branca ou preta, quando a roleta para.	10,6
Não responde	0,3
Total	100

Nota — A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correta.

Da Tabela 3 destaca-se a elevada percentagem de alunos a responderem corretamente à questão 2, sendo que, de entre os alunos que selecionaram uma das três alternativas apresentadas, 87,1% assinalaram a opção correta. Sobressai também a percentagem residual de não respostas nesta questão.

Na Tabela 4 apresenta-se a distribuição das justificações apresentadas pelos alunos, bem como a percentagem de alunos que, embora tenham assinalado uma de três alternativas apresentadas, não justificaram a sua opção.

Tabela 4 – Justificações apresentadas pelos alunos na questão 2

Justificações	Frequência	Percentagem
Resposta a)		
Só saiu duas vezes branco na sequência *BPPBP* .	5	71,4
No início o ponteiro está na região branca.	1	14,3
Outra justificação	1	14,3
Total	7	100
Resposta b)		
A região preta da roleta é maior que a região branca.	129	47,9
Razões de probabilidade	88	32,7
A sequência *BPPBP* tem mais vezes o *P* que o *B* .	21	7,8
É mais provável o ponteiro parar na região preta.	9	3,3
Há mais preto tanto na roleta como na sequência *BPPBP* .	8	3,0
O ponteiro da roleta está viciado.	1	0,4
Outra justificação	1	0,4
Não justifica	12	4,5
Total	269	100
Resposta c)		
É possível parar na região preta ou na região branca.	24	72,7
As provas são independentes.	3	9,1
É igualmente provável o ponteiro parar no *P* e no *B* .	1	3,0
Outra justificação	1	3,0
Não justifica	4	12,2
Total	33	100

De entre as três alternativas apresentadas na questão 2, apenas 2,3% dos alunos optaram pela resposta a). A justificação da maioria dos alunos (cinco alunos) que optou por esta resposta apoia-se na sequência dos cinco primeiros resultados, isto é, $B\ P\ P\ B\ P$. Estes alunos acreditam que a amostra de dimensão seis deveria ter tantas vezes a letra B como a letra P, isto é, uma vez que nas cinco primeiras rotações saiu três vezes a cor preta, ao girar a roleta pela sexta vez, deveria obter-se a cor branca, de forma a equilibrar o número de resultados P e B (ver Figura 15).

Figura 15 – Justificação do aluno A_{112}

Como na sequencia saiu duas vezes a cor preta e girou-se cinco vezes ao girar a sexta vez pode sair a cor branca.

O aluno A_{160} admite mesmo a influência de fatores causais, afirmando: "porque o ponteiro está no branco", isto é, no momento em que a roleta começa a girar, o ponteiro encontra-se no setor circular de cor branca.

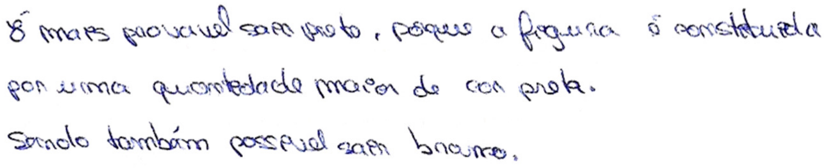
Na análise das justificações apresentadas pelos alunos para a resposta correta, isto é, a opção b), considera-se como justificação completa a que se referir à independência dos resultados associados a cada rotação da roleta e à probabilidade dos acontecimentos P e B na forma de fração, dízima ou percentagem. Assim, considera-se uma justificação completa a seguinte, ou equivalente:

> Os resultados associados às cinco primeiras rotações da roleta não influenciam o resultado da sexta rotação. Quando se gira a roleta pela sexta vez, é mais provável o ponteiro parar na região preta da roleta do que na região branca. Como a região preta corresponde a três setores circulares dos quatro setores circulares congruentes em que está dividida a roleta, e a região branca corresponde a um setor, então $P(P)=3/4$ e $P(B)=1/4$, considerando os acontecimentos P: "o ponteiro assinala a cor preta" e B: "o ponteiro assinala a cor branca".

A maioria dos alunos (86,8%) assinalou a resposta correta b) e, de entre estes, destaca-se a pertinência da maior parte (80,7%) das justificações.

De entre os que justificaram a sua opção, 50,2% apoiaram-se na diferença notória entre as áreas das duas regiões em que está dividida a roleta. A título de exemplo, veja-se a justificação do aluno A_{59} (ver Figura 16).

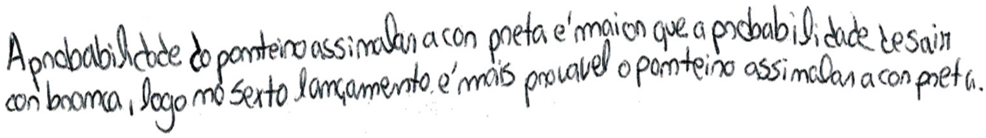
Figura 16 – Justificação do aluno A_{59}


É mais provável sair preto, porque a figura é constituída
por uma quantidade maior de cor preta.
Sendo também possível sair branco.

Já 34,2% dos alunos optaram por determinar razões de probabilidade: em 65,9% destes casos, os alunos calcularam corretamente as probabilidades envolvidas na questão na forma de fração ($P(P)=3/4$ e a $P(B)=1/4$), de dízima ou percentagem; em 31,8% dos casos, os alunos apresentaram apenas uma das probabilidades envolvidas na questão, isto é, ou $P(P)=3/4$ ou $P(B)=1/4$; e, em 2,3% dos casos, os alunos apresentam razões de probabilidade incorretas para $P(P)$ e $P(B)$.

Excetuando o aluno A_4, que apresenta uma justificação sem significado na situação apresentada, e o aluno A_{165}, que dá a justificação "porque o ponteiro da roleta está viciado", as restantes justificações (14,8%) ou são de natureza tautológica (3,5%), como se ilustra na Figura 17, ou enfatizam a sequência dos cinco primeiros resultados (11,3%).

Figura 17 – Justificação do aluno A_{263}


A probabilidade do ponteiro assinalar a cor preta é maior que a probabilidade de sair
cor branca, logo no sexto lançamento é mais provável o ponteiro assinalar a cor preta.

No caso em que as justificações enfatizam a sequência apresentada $B\ P\ P\ B\ P$, elas se revelam fortemente influenciadas pela heurística da representatividade. Em 3,1% dessas situações, as justificações, para além de evocarem motivos relacionados com a roleta, acumulam motivos relacionados com a sequência dos primeiros cinco resultados (ver Figura 18).

Figura 18 – Justificação do aluno A_{35}

É mais provavel parar na cor preta porque a parte preta é maior que a parte branca e porque seguindo a sequência anterior a próxima cor a sair é o preto (BPPBP(P))

Embora estas justificações revelem sensibilidade às probabilidades prévias, particularmente o facto de a probabilidade de o ponteiro parar na região preta ser superior à probabilidade de o ponteiro parar na região branca, mostra também alguma insensibilidade à dimensão da amostra.

A justificação do aluno A_7 acrescenta a influência de fatores causais, referindo especificamente que, "se a força aplicada na roleta for sempre a mesma, a sequência será sempre igual, logo será a cor preta".

Nos restantes 8,2% dos casos, as justificações centram-se exclusivamente na sequência dos cinco primeiros resultados, revelando não só insensibilidade às probabilidades prévias e à dimensão da amostra, mas também concepções erradas do acaso, ao imporem regularidades que não existem e que parecem prevalecer à aleatoriedade (ver Figura 19). Dessas justificações, a maioria (76,2%) apresenta a sequência $B\ P\ P\ B\ P\ P$ como resultado dos seis lançamentos consecutivos.

Figura 19 – Justificação do aluno A_{36}

Nas restantes 23,8%, as justificações exprimem que a probabilidade de o ponteiro parar na região preta é maior, porque também na sequência dos resultados dos cinco lançamentos ocorre mais vezes P do que B (ver Figura 20); ou incluem as razões de probabilidades $3/5$ e $2/5$ para $P(P)$ e $P(B)$, respetivamente. Neste último caso, concluímos que as razões apresentadas resultam de identificar os cinco resultados da sequência apresentada com os cinco casos possíveis, e os três ou dois resultados P ou B, respetivamente, como casos favoráveis.

Figura 20 – Justificação do aluno A_{303}

É provavel sair Preto porque durante os 5 lansamentos saiu 3 vezes a cor Preta.

Embora seja notória a diferença entre as áreas preta e branca, 10,6% dos alunos foram da opinião de que, no sexto lançamento, é igualmente provável o ponteiro assinalar uma das cores, branca ou preta, quando a roleta parar, persistindo, em cerca de 72,7% dessas justificações, a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade *se é possível, então é equiprovável* (ver Figura 21).

Figura 21 – Justificação do aluno A_{43}

É igual, é verdade que a cor preta preenche quase toda a rola mas ainda à lá um espaço branco

Algumas das justificações (9,1%), embora apelem para a independência dos resultados de prova para prova, também revertem para a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade (ver Figura 22).

Figura 22 – Justificação do aluno A_{105}

É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores quando a roleta parar, pois ambas as cores têm probabilidade de sair independentemente de nas cinco vezes que foi girada ter saído a sequência BPPBP.

Conclusão

De uma maneira geral, os alunos revelaram possuir ideias intuitivas corretas sobre o conceito de independência, em contexto de lançamento de uma moeda e de rotação de uma roleta.

Relativamente à resposta correta c) da questão 1, referente ao lançamento consecutivo de uma moeda equilibrada, observou-se uma prevalência das justificações construídas a partir da moeda (77,0%), em relação às justificações construídas a partir dos resultados das diferentes provas independentes (16,5%).

Nesta questão, as justificações de equiprobabilidade foram construídas a partir: dos valores da probabilidade dos acontecimentos E: "sair face europeia" e N: "sair face nacional" (22,7%); de uma estratégia de enviesamento de equiprobabilidade (22,3%); do facto de estar envolvida nas experiências uma moeda equilibrada (20,9%); da independência dos resultados (13,6%); de razões de natureza tautológica (7,2%); da ideia de que cada resultado E ou N tem uma única chance (3,6%); de um diagrama de árvore (2,9%); do tamanho igual das duas faces (0,3%); e de outras justificações desprovidas de sentido na situação apresentada (1,8%).

Relativamente à resposta correta b) da questão 2, referente à rotação de uma roleta dividida em duas regiões não equiprováveis, branca e preta, observou-se um predomínio das justificações construídas a partir da roleta (84,4%), relativamente às justificações construídas a partir da sequência dos primeiros cinco resultados (10,8%).

Nesta questão, as justificações de que é mais provável o ponteiro parar na região preta (constituída por três setores consecutivos com um ângulo de 90º) do que na região branca (constituída por um setor com um ângulo de 90º) foram construídas a partir: da comparação das duas regiões coloridas (47,9%); dos valores da probabilidade dos acontecimentos P: "o ponteiro assinala a cor preta" e B: "o ponteiro assinala a cor branca" (32,7%); da sequência dos resultados das primeiras cinco rotações da roleta (7,8%); de razões de natureza tautológica (3,3%); de uma análise do resultado do acontecimento P tanto na sequência como na roleta (3,0%); de propriedades associadas ao ponteiro da roleta (0,4%); e de outras justificações desprovidas de sentido na situação apresentada (0,4 %).

Embora esses alunos já tivessem aprendido a definição clássica de probabilidade, eles aderiram predominantemente a outras estratégias para justificar a opção correta. A prevalência das intuições diante das aquisições escolares tem sido amplamente verificada, com especial destaque em Probabilidades (Fernandes, 1990; Fischbein; Schnarch, 1997; Kahneman; Tversky, 1982).

Na questão 1 a percentagem de justificações a partir dos *valores da probabilidade dos acontecimentos* E *e* N ocorreu apenas em 22,7% das justificações da resposta correta e, na questão 2, a justificação *razões de probabilidade* serviu a 32,7% das respostas corretas.

Na questão 2, a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade —*se é possível, é equiprovável*— resistiu no contexto de roletas em situação de não equiprobabilidade, embora o número de justificações a fazerem alusão a esta estratégia de resolução tenha diminuído de 62 para 24, da questão 1 para a questão 2. Esse raciocínio, muito primitivo, foi também observado por outros autores, salientando-se Lecoutre e Durand (1988), que verificaram a sua manifestação em diferentes contextos. Já Fernandes (1999) constatou que alunos do 9º ano aderiam mais a esse raciocínio em situações de experiências compostas, parecendo constituir a estratégia mais acessível diante das grandes dificuldades por eles experimentadas nessas situações.

Comparativamente ao que foi observado na questão 1, a independência dos resultados de prova para prova mereceu um menor destaque por parte dos alunos na questão 2, tendo caído de 38 para 3 o número de justificações a fazer alusão a esta ideia. De uma maneira geral, nas justificações associadas à resposta correta, os alunos ignoram este aspeto; contudo, as justificações não são suficientes para concluir se esse ato foi ou não intencional.

Embora com uma ocorrência residual, houve outras justificações: de ordem causal (admitindo a possibilidade de influenciar o resultado); que revelam insensibilidade à dimensão da amostra (retirando conclusões apenas da sequência dos cinco primeiros resultados); que revelam concepções erradas do acaso (impondo regularidades que não existem e que parecem prevalecer à aleatoriedade).

Embora a diferença notória entre a área da região branca e da região preta não tenha sido suficiente para aumentar o número de respostas corretas da questão 1 para a questão 2 (uma vez que a percentagem de respostas corretas baixou de 278 para 269), ela influenciou positivamente a adequabilidade de 129 justificações, das 293 apresentadas para a resposta correta na questão 2.

Da questão 1 para a questão 2, verificou-se um aumento, embora pouco acentuado (de 18 para 26 justificações), de adesão à representatividade (efeito recente positivo e efeito recente negativo) na realização de julgamentos probabilísticos.

Globalmente, os resultados do estudo encorajam a possibilidade de introdução da independência no 9º ano de escolaridade, tal como tem sido defendido em vários estudos (Tarr, 1997; Watson, 1995, 2005). Embora se tenham verificado elevadas percentagens de respostas corretas, as justificações apresentadas pelos alunos enfatizam a necessidade da instrução, na medida em que: as justificações incompletas destacam a necessidade do ensino para aumentar a sua eficácia; as justificações inadequadas destacam a importância do ensino para a sua correção e para a compreensão do erro; e as falsas justificações destacam a importância do ensino para a promoção de argumentos válidos na justificação de julgamentos probabilísticos.

Referências

AHLGREN, A.; GARFIELD, J. Analysis of the Probability Curriculum. In: KAPADIA, R.;BOROVCNIK, M. G. (Ed.). *Chance encounters:* probability in education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 107-134.

BOROVCNIK, M. G.; KAPADIA, R. Research and developments in probability education internationally. In: JOUBERT, M.; ANDREWS, P. (Ed.). *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education*. Disponível em: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4, 2010. p. 41-48. Disponível em <http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf >. Acesso em: 12 fev. 2012.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 239-287.

FALK, R.; FALK, R.; LEVIN, I. A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*,Dordrecht, v. 11, p. 181-204, 1980.

FERNANDES, J. A. *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação (Mestrado em Informática no Ensino) – Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1990.

FERNANDES, J. A. *Intuições e aprendizagem de probabilidades:* uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade. Tese (Doutorado em Metodologia do Ensino da Matemática) – Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.

FISCHBEIN, E. The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: D. Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics,* Dordrecht, v. 22, p. 523-549, 1980.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, v. 28, n. 1, p. 96-105, 1997.

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. In: JONES, G. (Ed.). *Exploring probability in schools:* challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 39-63.

GARFIELD, J.; AHLGREN, A. Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, v. 19, n. 1, p. 44-63, 1988.

GREEN, D. R. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: GREY, D. R.et al. (Ed.). *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, 1983. p. 766-783.

HAWKINS, A.; JOLLIFFE, F.; GLICKMAN, L. *Teaching Statistical Concepts.* Harlow, UK: Longman, 1992.

JONES, G. A. et al. Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*,Reston, v. 30, n. 5, p. 487-519, 1999.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Subjective probability: A judgment of representativeness. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Ed.). *Judgment under uncertainty:* Heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 32-47.

KELLY, I. W.; ZWIERS, F. W. Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. In: DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Ed.). *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* Victoria B.C.: University of Victoria, 1988.

KONOLD, C. et al. Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, VA, v. 24, n. 5, p. 392-414, 1993.

LECOUTRE, M.; DURAND, J. Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics,* Dordrecht, v. 19, n. 3, p. 357-368, 1988.

NCTM. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

PORTUGAL. Ministério da Educação. *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

SHAUGHNESSY, J. M. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 465-494.

STAVY, R.; TIROSH, D. *How studentes (mis-)understand science and mathematics:* intuitive rules. New York: Teachers College Press, 2000.

TARR, J. E. Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International* – University Microfilms International (UMI) / ProQuest, Ann Arbor,n. 49*,* Z5055, 1997.

TARR, J. E.; JONES, G. A. A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, Dordrecht, v. 9, n. 1, p. 39-59, 1997.

TARR, J. E.; LANNIN, J. K. How can teachers build notions of conditional probability and independence? In: JONES, G. A. (Ed.). *Exploring probability in school:* challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 215-238.

WATSON, J. M. Conditional probability: its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, Reston, v. 88, n. 1, p. 12-17, 1995.

WATSON, J. M. The probabilistic reasoning of middle school students. In: JONES, G. A. (Ed.). *Exploring probability in school:* Challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 145-169.

Submetido em 12/11/2012

Aprovado em 11/02/2014