ISSN 2447-6447

HISTÓRIAS DE JOGOS MATEMÁTICOS: o caso do *Metromachia*, para o ensino da Geometria

Anabela Teixeira[1]
Jorge Nuno Silva[2]

RESUMO

Em todo o mundo, encontram-se vestígios de jogos, desde as eras mais distantes até à fase da civilização em que hoje nos encontramos. Neste texto focar-nos-emos nos jogos matemáticos, em particular nos de tabuleiro que envolvem conceitos geométricos. A história mostra-nos como podem ser objetos surpreendentes: as suas regras variadas, os seus diversos propósitos e os seus contextos constituem ricos elementos culturais. As intervenções arqueológicas dão contributos muito importantes para o conhecimento da existência de jogos ou de novas informações sobre estes. Descobrir as suas origens, o desenvolvimento das regras e dos elementos de cada jogo é um longo processo de investigação com avanços e recuos. Daremos alguns exemplos, designadamente de trabalhos desenvolvidos por investigadores portugueses. Por outro lado, muitos dos progressos da Matemática nascem a partir da prática ou da invenção de jogos. No texto são descritos alguns desenvolvimentos e suas personagens. No que se refere ao ensino, as suas potencialidades pedagógicas são há muito exploradas. Por exemplo, no âmbito das reformas que se operavam nas universidades inglesas no séc. XVI, William Fulke elaborou manuais de jogos matemáticos: o *Rithomachia* para auxiliar o ensino da Aritmética, o *Ouronomachia* para o ensino da Astronomia e Astrologia e o *Metromachia* para o ensino da Geometria. Este jogo é original e vamos dar-lhe destaque. Proporcionar o desenvolvimento de capacidades para criar conhecimento relevante e capacidades de adaptação cognitiva a situações novas e imprevisíveis exige, sem dúvida, grande capacidade de inovação. O ubíquo mundo dos jogos está aí, desde há muito, para nos ajudar.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Jogos pedagógicos. Ensino da Geometria. William Fulke. Metromachia.

ABSTRACT

We find game remains worldwide from the most distant ages to the stage of civilization in which we now find ourselves. In this paper we will focus on mathematical games, particularly on games involving geometric concepts. History shows us how these can be amazing: their various rules, their various purposes and their contexts are rich cultural elements. Archaeological interventions provide very important information on the existence of unknown ancient games or new knowledge on the known ones. Discovering the origins, development of rules, and elements of each game is a long process of research, with advances and setbacks. We will give some examples, mainly on work developed by Portuguese researchers. On the other hand, several advances in mathematics came from the practice or the invention of games. Our text describes some developments and their characters. Games teaching capabilities have long been exploited. For example, as part of the reforms that were operating in British universities in the 16th century, William Fulke wrote three

[1] Docente destacada na Associação Ludus; Colaboradora do MUHNAC - Museu de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa e do UIDEF - Instituto da Educação, Universidade de Lisboa. E-mail: ateixeira@museus.ulisboa.pt.
[2] Professor da Universidade Lisboa; Presidente da Associação Ludus; Investigador do CIUHCT – Centro Inter-universitário de História da Ciência e da Tecnologia. E-mail: jnsilva@cal.berkeley.edu.

books on mathematical games: the *Rithomachia* to assist the teaching of arithmetic, the *Ouronomachia* for teaching astronomy and astrology, and *Metromachia* for teaching geometry. The latter is original and we will elaborate on it. The hability to create relevant knowledge and cognitive adaptation capabilities to new and unpredictable situations requires undoubtedly great capacity for innovation. The ubiquitous gaming world is there since long, to help us.

Keywords: Mathematical games. Pedagogical games. Teaching geometry. William Fulke. Metromachia.

INTRODUÇÃO

Em todo o mundo encontram-se vestígios da existência de jogos, desde as eras mais distantes até à fase da civilização em que hoje nos encontramos. Neste texto focar-nos-emos nos jogos matemáticos, em particular nos de tabuleiro que envolvem conceitos geométricos ou foram concebidos para auxiliar o ensino da geometria, como é o caso do Metromachia, que foi inventado por William Fulke no âmbito do currículo académico na Inglaterra do séc. XVI.

> Costumava sentir-me culpado por passar dias inteiros ocupado com jogos, quando era suposto fazer Matemática. Mas depois, quando descobri os números surreais, compreendi que jogar jogos é Matemática.
>
> (John Conway, 1937)[3]

JOGOS MATEMÁTICOS ATRAVÉS DOS TEMPOS

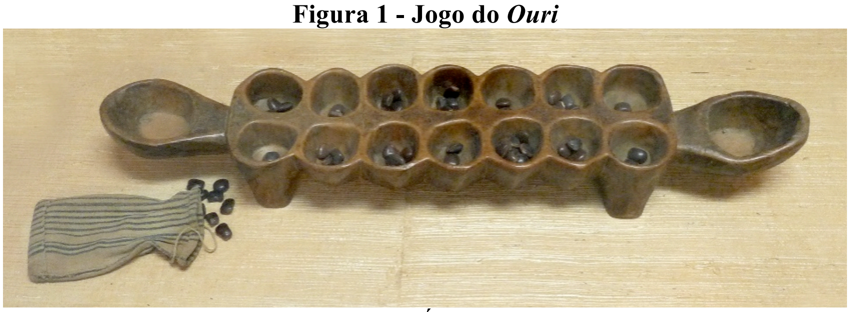
Jogos matemáticos são aqueles que não possuem elementos de sorte nem informação escondida. Sendo também designados por jogos de informação perfeita ou jogos abstratos, podem ser "puzzles, problemas e atividades que vão da simples charada à questão matemática ainda em aberto" (Neto & Silva, 2004, p. 12).

No que respeita aos jogos de tabuleiro, a história mostra-nos como podem ser objetos surpreendentes: as suas regras variadas, os seus diversos propósitos e os seus contextos constituem ricos elementos culturais. Descobrir as suas origens, o desenvolvimento das regras e dos elementos de cada jogo é um longo processo de

[3] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Conway.html.

investigação com avanços e recuos. Muitos jogos não chegaram integralmente até nós e, em muitos casos, os vestígios do passado escondem-se atrás de lendas e mitos. Outros, pelo material mínimo necessário para serem praticados, desapareceram ou não deixaram vestígios arqueológicos. Outros ainda, pela sua natureza, como é o caso dos jogos *Mancala*, necessitam apenas de umas dúzias de sementes ou pedras e um tabuleiro que pode ser construído cavando uns buracos no chão. O *Ouri*, o *Bao*, o *Ayòayò* ou o *Kahala* (este último uma invenção moderna de William Champion e comum nos computadores e telemóveis) são alguns dos mais conhecidos desta família. O *Ouri* (Figura 1) é tradicionalmente jogado na África Ocidental (por exemplo, no Senegal, no Mali ou em Cabo Verde) e em parte das Caraíbas (sendo mais comum nas ilhas de língua inglesa e francesa), por isso pode ser encontrado com outros nomes como *Wari*, *Awari*, *Aware*, *Awele* ou *Oware*. Existem tabuleiros destes jogos escavados em rochas, mas é difícil verificar a antiguidade dos mesmos o que significa que a origem pode ser muito mais antiga e não ter nada a ver com a região onde o jogo adquiriu o nome pelo qual é conhecido atualmente.

Figura 1 - Jogo do *Ouri*



Fonte: Museu Real da África Central, Bélgica.

Os jogos da família *Mancala*, designação usada para referenciar um conjunto de jogos diversos mas de fundamento comum, partilham as seguintes propriedades: as peças, também chamadas de sementes, não têm cor, ou seja, elas são utilizadas pelos jogadores e apenas a posição delas no tabuleiro indica quem as pode apanhar; os turnos são alternados; as jogadas são feitas por sementeira, ou seja, após se escolher uma casa, distribui-se todas as sementes dessa casa pelas seguintes num movimento circular; o objetivo, frequentemente, é capturar o maior número possível de peças (Santos, Neto & Silva, 2011, p. 23). É interessante verificar como estes jogos já possuem uma componente abstrata tão forte, não usando componentes aleatórios, não necessitando de força física, de resistência ou de destreza, características que a maior parte dos jogos tradicionais requer. Embora se

ISSN 2447-6447

disponha de perfeita informação e não existam muitas opções por lance, o facto de uma única jogada poder ter efeito sobre o conteúdo de várias casas do tabuleiro torna difícil prever as consequências dos lances, e ainda menos do resultado final do jogo. Uma propriedade matemática que pode dar uma ideia desta complexidade dos jogos *Mancala* é o número de posições e este é um assunto que tem vindo a ser tema de investigação tanto no domínio da Matemática como no da Inteligência Artificial. Esta família de jogos oferece também oportunidades para a investigação interdisciplinar, no sentido de mostrar como o computador pode ser utilizado para apoiar estudos da Psicologia Cognitiva, ou seja, dos aspetos humanos do jogo (Donkers, Uiterwijk & Voogt, 2007, pp. 69-86).

As intervenções arqueológicas dão contributos muito importantes para o conhecimento da existência de jogos ou de novas informações sobre estes. Vejamos o exemplo do *Jogo Real de Ur* ou *Jogo das Vinte Casas*, como também é conhecido, e que era um mistério para os especialistas.

Figura 2 - *O Jogo Real de Ur*

Fonte: Museu Britânico, Inglaterra.

Em 1922, Leonard Woolley iniciou escavações em Ur, no Sul do Iraque atual. A cidade de Ur é referida na Bíblia como a terra de Abraão e o local do Éden. A sua equipa encontrou diversos Túmulos Reais com muitos objetos valiosos, a maioria datada de aproximadamente 2600 a.C. Junto dos adornos preciosos, Woolley descobriu vários tabuleiros de um jogo, a que passou a chamar *O Jogo Real de Ur*, ou apenas *Jogo de Ur*. No final do século XIX, uma tabuinha de barro do século II a.C., com escrita cuneiforme, foi comprada, como muitas outras, pelo Museu Britânico. O seu conteúdo foi mal interpretado e não suscitou interesse particular. Contudo, o aparecimento de uma outra tabuinha com conteúdo semelhante e o trabalho de vários especialistas em escrita cuneiforme, principalmente de Irving Finkel, permitiu concluir que os conteúdos focavam

ISSN 2447-6447

as regras de duas versões do *Jogo de Ur*, bem como a utilização dos tabuleiros em atividades divinatórias. Um dos tabuleiros encontrados por Woolley encontra-se exposto no Museu Britânico, em Londres (Figura 2), apresenta a configuração de dois grupos de casas, um de doze e outro de seis, unidos por uma ponte de duas casas, 14 peças e 3 dados (tetraédricos!). Trata-se de uma corrida entre dois oponentes, o primeiro a completar o seu percurso será o vencedor. *O Jogo Real do Ur* é assim o jogo mais antigo para o qual se conhecem as regras originais.

Jogos gravados na pedra, de que há tantos exemplos em Portugal, são também objeto de estudo de investigadores portugueses. Na fotografia (Figura 3), da autoria da arqueóloga Lídia Fernandes, a historiadora Fernanda Frazão e o matemático Jorge Nuno Silva jogam o *Alguergue de Doze*, registo realizado no âmbito do projeto *História dos Jogos em Portugal*[4].

Figura 3 - Jogo *Alguergue de Doze* nas escadas da Igreja do Menino de Deus, em Lisboa

Fonte: Fernandes, Frazão & Silva (2012, p. 36).

Uma fonte incontornável para o estudo dos jogos medievais, e que deste projeto resultou uma versão em língua portuguesa, é o *Livro de jogos de Afonso X, o Sábio*[5]. Afonso X, rei de Castela e Leão entre 1252 e 1284, e que ficou conhecido na história pela

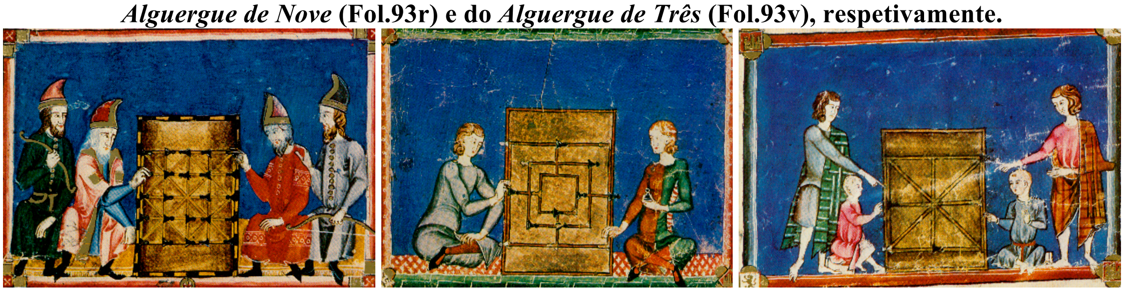
[4] A fotografia foi retirada de (Fernandes, Frazão & Silva, 2012, p. 36). Este livro reúne as comunicações apresentadas durante o encontro final do projeto referido, intitulado *História de Jogos em Portugal* e financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia com a referência PTDC/HCT/70823/2006. Este encontro teve a sua primeira edição em 2012, por iniciativa da Associação Ludus e do Centro Interuniversitário da História da Ciência e Tecnologia da Universidade de Lisboa, e ganhou regularidade anual, aberto a todos os interessados em jogos (matemáticos e tradicionais) e na sua história, filosofia, técnica, componente lúdica e científica, etc. Informações sobre todas as Jornadas encontram-se em http://ludicum.org/ev/jornadas-historia-dos-jogos-em-portugal.

[5] A versão portuguesa, publicada em 2013, é uma tradução comentada por Jorge Nuno Silva, que mantem o estilo da escrita dos tempos medievais e apresenta o tratamento moderno que foi dado aos jogos, remetendo os leitores interessados para uma bibliografia especializada. O livro está dividido em sete capítulos: O Livro do Xadrez, O Livro de Dados, Livro de Jogos das Tábulas, Livro dos Jogos Grandes, Jogos das Quatro Estações, Livro do Alguergue e O Livro dos Jogos de Astronomia.

ISSN 2447-6447

sua elevada cultura, mandou passar a escrito os conhecimentos mais importantes do século XIII, em vários campos do saber, como o Direito, a História, a Mineralogia e a Astronomia. O *Libro de los Juegos del Rey Alfonso X El Sabio* foi terminado em 1283, um ano antes da morte do erudito monarca. O manuscrito, cujo original se encontra na Biblioteca do Escorial (arredores de Madrid), apresenta as regras e algumas variantes de jogos, bem como diversas ilustrações (Figura 4). "A riqueza artística, cultural e simbólica da obra está hoje, tantos séculos depois do seu aparecimento, ainda por estudar completamente" (Silva, 2013, p. 11).

Figura 4 - Ilustrações do *Livro de jogos de Afonso X, o Sábio* do *Alguergue de Doze* (Fol.91v), do *Alguergue de Nove* (Fol.93r) e do *Alguergue de Três* (Fol.93v), respetivamente.



Fonte: Silva (2013).

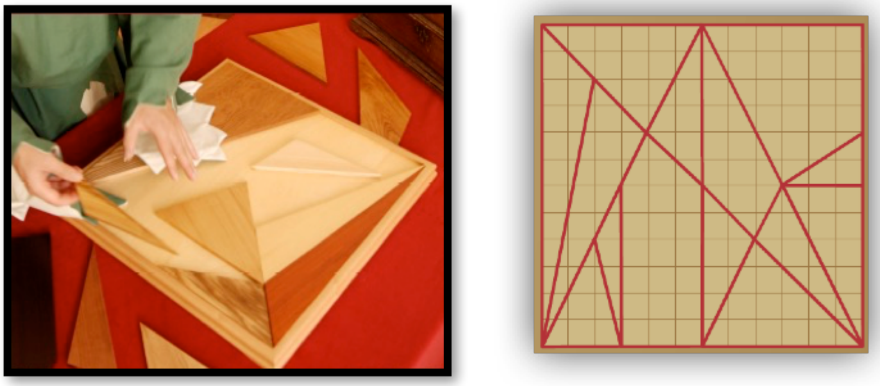
Em relação ao *Alguergue de Doze*, "este jogo que, presumivelmente, migrou para o tabuleiro de xadrez dando origem ao jogo das Damas, não apresenta aqui um conjunto de regras consistente e completo" (Silva, 2013, p. 218). Para obter uma versão jogável é assim necessário introduzir novas regras. Praticava-se num tabuleiro marcado com linhas na pedra, ou mesmo somente nos pontos de interseção destas. As peças colocavam-se nas interseções das linhas.

> Cremos que uma opção possível seria os movimentos serem livres para as casas vizinhas desocupadas, de acordo com as linhas do tabuleiro. As capturas, por pequeno salto, devem ter prioridade sobre os outros lances, mas as capturas múltiplas facultativas. O objetivo é a imobilização do adversário (inclui captura de todas as suas peças). No caso em que se sucedem muitos lances sem capturas o empate deve ser decretado.
> (Silva, 2013, p. 218)

O *Alguergue de Nove* (segunda ilustração da Figura 4) é um jogo de padrão, em que o alinhamento de três peças permite capturar uma adversária. Um exemplar deste jogo encontra-se numa pedra de uma parede lateral do Templo Romano de Évora, que, pela sua posição vertical, que indicia uso lúdico em estaleiro, permite assumir que datará do primeiro século da nossa era. Não se conhecem mais antigas ocorrências destes jogos comprovadamente datadas. O *Alguergue de Três* (terceira ilustração da Figura 4) é um

"Três em linha" muito simples, semelhante ao nosso *Jogo do Galo*, também chamado de *Jogo da Velha*. Na ilustração do livro de Afonso que o acompanha está a ser praticado por duas crianças. Em Portugal, encontram-se gravações de tabuleiros deste jogo um pouco por todo o país.

Figura 5 - Réplica e ilustração do *Stomachion*



Fonte: MUHNAC, Portugal.

Um dos mais antigos puzzles geométricos que se conhece tem uma história surpreendente. Em 1998 foi leiloado, por dois milhões de dólares, a um desconhecido, um manuscrito medieval com o código de venda «Eureka – 9058». Estava chamuscado, com imenso bolor e com um aspeto ilegível. A razão para tal exorbitância residiu no facto de, por baixo das orações cristãs do século XIII, haver palavras provenientes do cérebro do grande matemático Arquimedes de Siracusa. O livro era só o mais antigo manuscrito existente contendo textos com origem em Arquimedes, o Códex C, contendo *Dos Corpos Flutuantes*, *Do Método* e o puzzle *Stomachion*. Por sorte, tesouro de tal maneira precioso caiu em boas mãos, o seu atual dono permitiu e incentivou o seu estudo, foi criado o projeto de investigação "O Códex de Arquimedes" e as modernas técnicas de restauro permitiram recuperar os textos rasurados. Desde há muito que se encontram referências a um jogo da Antiguidade chamado *Stomachion*, por vezes também designado por *Loculus Archimedius* (Caixa de Arquimedes), *Ostomachion* ou *Syntemachion*. Este é composto por 14 peças (11 triângulos, 2 quadriláteros e 1 pentágono) que formam um quadrado (Figura 5). Tal como com o célebre *Tangram*, podem-se construir muitas figuras geométricas (triângulos, quadrados, paralelogramos, trapézios, etc), figuras humanas ou animais, casas, etc.

Uma dúvida se levantou ao estudar o manuscrito: o que despertou no espírito de Arquimedes este puzzle? Depois de traduzir e interpretar o Códex C, o investigador Reviel

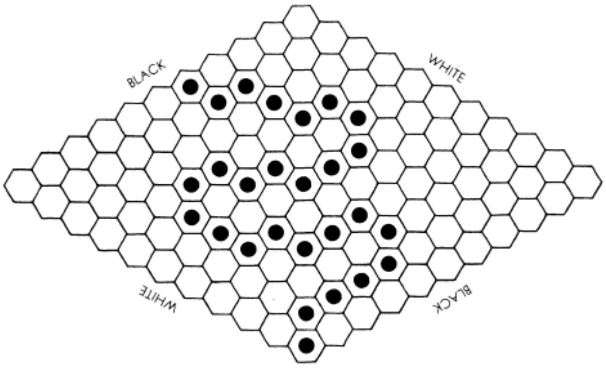
Netz conclui que o que Arquimedes queria não era propriamente compor diferentes figuras, mas sim responder a uma simples pergunta: "quantas maneiras existem de formar um quadrado com as peças dadas?" (Netz & Noel, 2007, p. 268). Em 2003, o matemático americano Bill Cutler, usando um programa informático, descobriu 536 formas diferentes de juntar as 14 peças formando um quadrado, a menos de rotações e reflexões, senão a resposta era 17152 maneiras diferentes! Arquimedes estava assim a fazer um estudo combinatório, sendo o manuscrito a partir de então o mais antigo vestígio deste ramo da Matemática. Todas as soluções partilham uma propriedade interessante: se marcarmos doze linhas horizontais e outras tantas verticais, como na ilustração à direita da figura 5, os vértices das peças estão sempre sobre intersecções destas linhas. Surpreendentemente, pode-se calcular a área exata de cada peça contando simplesmente os pontos no seu interior e na fronteira se atendermos ao Teorema de Pick[6], existem 2 peças de área 3, 4 peças de área 6, 1 peça de área 9, 5 peças de área 12, 1 peça de área 21 e 1 peça de área 24. O *Stomachion* prestava-se a auxiliar a determinação de áreas bem como à exploração de questões de combinatória, para além da procura de outras figuras sugestivas que se possam formar com as suas peças, outros problemas interessantes se podem associar e pode ser que este puzzle nos reserve ainda mais algumas surpresas.

Mais exemplos de jogos que conduziram à criação de alguns ramos da Matemática podiam ser elencados. Os gregos criaram muitos puzzles, entre eles o célebre *Problema do Rebanho* atribuído a Arquimedes, já bem conhecido antes do encontro com o Codex C atrás descrito. Cardano, grande matemático italiano do século XVI, para além de ter escrito uma obra sobre o *Ludus Latrunculorum* (ou *Jogo do Soldado*), hoje desaparecida, escreveu ainda um livro dedicado aos jogos do azar, *De Ludu Aleae*, antecipando-se quase um século à Teoria das Probabilidades de Fermat e Pascal. Euler, o matemático mais prolixo de sempre, dedicou também a sua atenção a algumas atividades lúdicas, por exemplo, ao *Percurso do Cavalo no Tabuleiro de Xadrez* que hoje pertence à Teoria dos Grafos e às *Pontes de Könisberg* que iniciou o estudo da Topologia. Hamilton, em 1857, inventou um jogo, o *Icosiano*, que pode hoje ser entendido como tendo aberto um campo de investigação novo, focado na procura de caminhos hamiltonianos em grafos.

[6] Este teorema foi descoberto em 1899, pelo matemático austríaco Georg Pick, e diz que "a área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma quadrícula regular é igual a metade do número de vértices situados sobre o contorno do polígono mais o número de pontos da quadrícula situados no interior do polígono a que se retira uma unidade". Note-se que o Teorema de Pick só é válido para polígonos simples, isto é, para polígonos cuja fronteira é uma linha poligonal fechada em que os lados não adjacentes não se intersectam.

Edouard Lucas inventou a *Torre de Hanoi* em 1883, um puzzle ainda hoje muito popular e muito estudado, estando relacionado com diversas áreas da matemática.

Figura 6 - Ilustração do *Hex*



Fonte: (Gardner, 1959)[7].

Nos anos 40 do século passado foi criado um jogo, o *Hex* (Figura 6), que originou uma nova família, a dos jogos de conexão. Foi inventado de forma independente por dois matemáticos. Primeiro, pelo dinamarquês Pet Hein em 1942 e depois, em 1948, pelo americano John Nash (imortalizado no filme "Uma mente brilhante"). Pode ser praticado nas casas hexagonais de um tabuleiro em forma de losango ou nas intersecções de um tabuleiro com casas quadrangulares cortadas com uma diagonal. O objetivo consiste em criar um grupo de peças que una dois lados opostos do tabuleiro. Nenhum jogo de *Hex* pode terminar empatado. A prova mais conhecida deste resultado, o Teorema do Hex, é combinatória. Nash demonstrou este resultado por indução matemática (Silva, 2007, pp. 87-94). O seu colega David Gale provou, em 1979[8], que o facto de o *Hex* não ter empates é equivalente a um resultado importante de Análise Funcional. O *Hex* é um daqueles jogos cuja simplicidade das regras acompanha a riqueza e profundidade do jogo.

Este jogo e o *Ouri* já fizeram parte do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, competição dirigida aos estudantes portugueses dos ensinos básico e secundário[9].

[7] Gardner, M. (1959). *The Game of Hex.* Hexaflexagons and other mathematical diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games. New York: Simon and Schuster, 73-83.
[8] Gale, D. (1979). The game of Hex and the Brower fixed-point Theorem. *American Math. Monthly*, 86, 818-827.
[9] Trata-se de uma competição anual que se realiza em Portugal desde 2004, envolvendo 6 jogos, e disputada numa final nacional em quatro categorias, em 2016/2017 serão: 1ª categoria (1º ciclo): Semáforo, Gatos e cães e Rastros; 2ª categoria (2º ciclo): Gatos e cães, Rastros e Avanço; 3ª categoria (3º ciclo): Rastros, Avanço e Produto; 4ªcategoria (secundário): Avanço, Produto e Flume. As escolas podem inscrever somente um aluno por jogo e por categoria. Informações sobre todos os Campeonatos encontram-se em http://ludicum.org/cnjm.

ISSN 2447-6447

É usual classificar famílias de jogos pelo tipo de objetivo que leva à vitória. Existem jogos de captura, de ganho de território, de bloqueio, de posição, de obtenção de padrões e de conexão. Muitas vezes estes jogos podem ser entendidos como grandes famílias, em vez de serem encarados individualmente. Criar uma família de jogos é muito mais difícil do que criar um jogo, "dado ser necessário um conceito completamente novo e, ao mesmo tempo, profícuo, capaz de gerar diferentes jogos originais de qualidade" (Neto & Silva, 2004, p. 23). Jorge Nuno Silva e João Pedro Neto, no seu livro *Jogos Matemáticos, Jogos Abstracto*s, indicam alguns parâmetros para avaliar a qualidade de um jogo abstrato: a *interação* entre os jogadores, a *clareza* com que se podem visualizar jogadas futuras, o *drama* das posições (capacidade de recuperar da desvantagem, por exemplo), o *tempo*, a *ramificação* e a *profundidade*. Por exemplo, o *Jogo do Galo* é um jogo com pouca profundidade, já que há somente duas categorias de jogadores: os que sabem jogar (e nunca perdem) e os estranhos ao jogo. O *Xadrez*, pelo contrário, tem muitas categorias de jogadores: amadores, mestres, grandes mestres, etc. Há jogos aparentemente simples, para os quais se determinam rapidamente as estratégias vencedoras, embora com pouco interesse lúdico, que são matematicamente muito ricos, como é o caso dos jogos *NIM*, que se praticam com um certo número de pilhas de peças, tipicamente feijões. Estes foram os primeiros jogos a serem abordados matematicamente, em 1902, pelo matemático Charles L. Bouton[10], no que constitui o ponto de partida para mais uma área da matemática: a Teoria dos Jogos Combinatórios.

O nome Martin Gardner tem de ser referido, é o modelo e a inspiração de todos os amantes da divulgação matemática. De 1956 a 1981 foi colunista da *Scientific American*, a mais importante intervenção de extensão matemática. Licenciado em Filosofia pela Universidade de Chicago, foi também autor de muitos livros sobre vários temas, da Matemática à Filosofia, passando pela magia, e até de romances. A monumental edição de *Alice no País das Maravilhas* por si comentada foi um dos seus *best sellers*. O grande público tomou conhecimento de muitas criações matemáticas importantes, antigas e modernas, através de Gardner. Os jogos de tabuleiro receberam também a sua atenção, a matemática em que se baseiam foi sempre realçada e bem explicitada no seu estilo claro e entusiasta. Os seus textos surpreendiam até os próprios matemáticos, por tratarem amiúde resultados na fronteira do conhecimento dos investigadores profissionais. Por exemplo, no

[10] Bouton, C. L. (1902). Nim, a game with complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 2(3), 35-39.

número de outubro de 1970 da revista[11], Gardner descreveu um jogo singular, *O Jogo da Vida*, um jogo para zero pessoas (!), que lhe tinha sido mostrado meses antes pelo seu criador, o eminente John Conway[12]. Sob uma aparência fundamentalmente lúdica, este jogo desenvolve-se à volta de conceitos matemáticos muito profundos, os Autómatos Celulares. Foi compreendido e tornou-se rapidamente famoso através do talento de Gardner para explicar de forma simples ideias avançadas, em muitos casos ao alcance de pessoas sem preparação. Como homenagem ao homem e à sua obra, realizam-se congressos regulares que reúnem matemáticos e mágicos, entre outros. Este movimento, iniciado nos EUA em 1993 (G4G-Gathering for Gardner[13]) tem, desde 2009, uma vertente deste lado do Atlântico, em Portugal (RMC-Recreational Mathematics Colloquia[14]). Para além destes encontros bianuais de entusiastas, celebra-se a vida de Martin Gardner todos os anos pelo mundo por volta de 21 de outubro, data do seu desaparecimento, promovendo-se uma grande variedade de eventos cujo ponto comum é a qualidade típica de Gardner: promoverem o prazer de pensar. Este movimento, *Celebration of Mind*[15], também faz parte do G4G.

Para além do seu valor próprio, os jogos matemáticos são também um tema recorrente nas teorias do ensino da Matemática, nomeadamente nas mais recentes. No século XI foi inventado um jogo pedagógico na Alemanha, o *Rithmomachia*, também conhecido por *Ludus Philosophorum* ou *Jogo dos Filósofos* (Figura 7). O seu nome significa batalha de números e foi especialmente concebido para auxiliar o ensino da Aritmética. O jogo desenrola-se num tabuleiro retangular com 8x16 casas. As peças têm diversas formas e números associados. Os movimentos das peças dependiam das respectivas formas, as capturas dependiam dos números associados às peças atacantes e às

[11] Gardner, M. (1970). The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game “Life”. *Scientific American,* 223, 120-123.

[12] O *Jogo da Vida* desenvolve-se num tabuleiro de *Xadrez* que se pode considerar indefinidamente grande. Cada célula (isto é, cada casa do tabuleiro) pode estar viva ou morta. As gerações sucedem-se segundo a regra: uma célula nasce se tiver três vizinhas vivas, sobrevive se tiver duas ou três e morre nos restantes casos. Somente a configuração inicial depende do jogador, tudo o que se segue é automático. Conway, com quem iniciámos este artigo e um dos matemáticos mais criativos de sempre, inventou e desenvolveu muitos estudos sobre jogos matemáticos. Um jogo geométrico que lhe também está associado é o *Couves*, que inventou com Michael Paterson. Trata-se de um jogo que se inicia com um conjunto de pontos no papel e cada jogada consiste em unir dois desses pontos (ou um ponto a si mesmo) por uma linha curva que não passe por nenhum outro ponto. Para além disso, é obrigatório marcar um novo ponto sobre a curva. Por fim, cada ponto só pode pertencer, no máximo, a três curvas. Perde quem não dispuser de nenhuma jogada legal. Este jogo revela uma grande complexidade, apesar de se tratar de um simples jogo de lápis e papel.

[13] http://gathering4gardner.org.

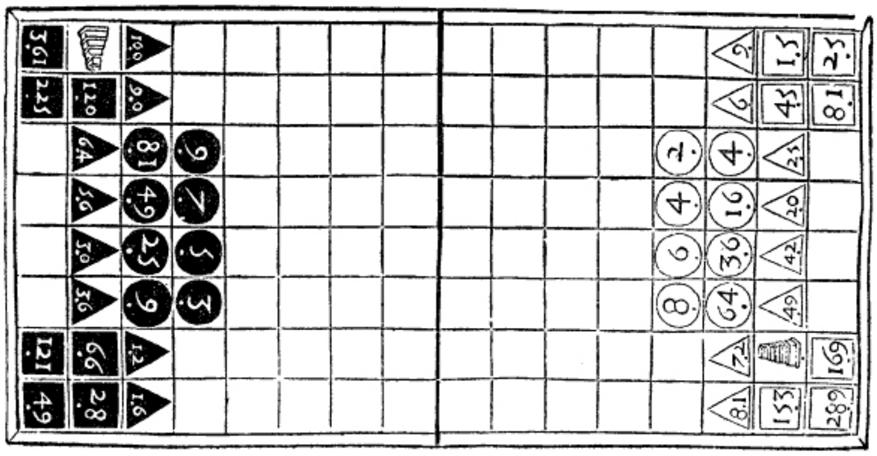
[14] http://ludicum.org/ev/rm.

[15] www.celebrationofmind.org.

ISSN 2447-6447

vítimas. Numa versão das regras, os discos movem-se uma casa ortogonal ou diagonalmente, os triângulos duas casas diagonalmente e os quadrados ortogonal ou diagonalmente três casas. A vitória consistia em colocar peças no campo inimigo formando progressões – aritmética, geométrica e harmónica. O *Rithmomachia* serviu sempre como instrumento didático da Aritmética, na tradição de Boécio (século V-VI). Os seus praticantes eram, principalmente, os estudantes do *Quadrivium* - Aritmética, Música, Geometria e Astronomia -, primeiro nos mosteiros e nas igrejas, nas universidades mais tarde. Somente no século XVI o *Rithmomachia* começou a perder fulgor, vítima dos novos ventos que se fizeram sentir na Matemática: o surgimento e desenvolvimento do que hoje chamamos Álgebra e Cálculo Infinitesimal retiraram função pedagógica ao jogo. Este, fora da sala de aula, não sobreviveu, porque as suas qualidades estritamente lúdicas a tal não ajudaram.

Figura 7 - Ilustração do *Ritmomachia*



Fonte: Fulke (1563)[16].

O primeiro manual em inglês de *Rithmomachia* é da autoria de William Fulke e Ralph Lever e data de 1563. Os autores eram religiosos e académicos de relevo, empenhados nas reformas que se operavam nas universidades inglesas. Este manual incluía outras variantes do jogo, o que leva a crer que estavam a relatar a prática do *Rithmomachia*, não se tratando apenas de especulações teóricas. As variantes abordadas relacionam-se com as novas tendências da Matemática, nomeadamente com a Álgebra. O jogo tentou, mas não conseguiu adaptar-se a um contexto em que o universo não era

[16] Lever, R. & Fulke, W. (1563). *The most noble, auncient, and learned playe, called the Phiosophers game inuented for the honest rereation of students, and other sober persons, in passing the tediousnes of tyme, to the release of their labours, and the exercise of their wittes.* Set forth with such playne precepts, rules and tables, that all men with ease may vnderstand it, and most men with pleasure practise it. by Rafe Leuer and augmented by W.F.. London.

ISSN 2447-6447

composto somente por números inteiros positivos. Apareceram as incógnitas e suas potências...

Figura 8 - Réplica do *Ouronomachia*

Fonte: (MUHNAC, Portugal).

No mesmo âmbito Fulke publicou, nos anos 70, descrições de dois outros jogos, o *Ouronomachia* (Figura 8), que se baseia no antigo *Ludus Astronomorum*, já descrito por Afonso X, e o *Metromachia*, um jogo original, vocacionado para complementar o ensino da Geometria, de que falaremos na próxima secção.

METROMACHIA: para ensinar Geometria

Na introdução do *Metromachia*, Fulke defende a sua ideia de que se deve captar estudantes para a Matemática por intermédio dos jogos e outras atividades lúdicas, como a música. O manual foi publicado em 1578[17], sendo este a sua obra-prima, uma vez que os dois anteriores eram baseados em jogos que já existentes. Este jogo foi objeto de estudo da dissertação de Isabel Catarino, que nos guia nesta secção (Catarino, 2007, pp. 53-68).

[17] Fulke, W. (1578). *Metromaxia sive Ludus Geometricus*. London.

ISSN 2447-6447

Figura 9 - Páginas 26 e 27 do livro de *Metromachia* de Fulke

26 METROMACHIA.

Explicatis iam omnibus militum ordinibus ſequuntur duces,& primo loco imperator ipſe Globus,cuius diameter 42. area maximi circuli 1386.tota ſphæræ capacitas

Tetraedron,cuius latus 12 baſis 62 $\frac{44}{125}$ altitudo 9 $\frac{15}{19}$ capacitas,203 $\frac{1103}{2375}$

Hexaedron ſiue cubus, cuius latus 15.baſis 225.ſolidum

Octaedron, cuius latus 6. baſis 15 $\frac{18}{31}$ capacitas, 91 $\frac{63}{155}$

Dodecaedron,cuius baſis eſt fermè 38. capacitas verò

METROMACHIA. 27

Icoſaedron,cuius baſis vna 15 $\frac{18}{31}$ altitudo ferè 10.capacitas,519 $\frac{11}{31}$

DE ORDINANDO EXERCITV.

Machinæ diſponantur ſuis locis ante exercitum. Nempe ſpacio a foſſa ſexto, à dextro campi latere nono, collocetur machina,quam quintæ appellatione inſigniuimus.Eodem à foſſa ſpacio à latere ſeptimo, alterius generis machina ponatur, quæ vigeſima dicitur. Huic interpoſito ſpacio vnico adhæreat prioris generis vigeſima.Altero verò interpoſito ſpacio adiungatur poſterioris formæ triceſima quinta. Eodem ordine ad læuum cornu diſponantur machinæ,decima,viceſima quinta,decima quinta,trigeſima, ſpacio videlicet à foſſa ſexto à latere ſiniſtro nono,ſeptimo,quinto,tertio.

Simili ratione peditum agmen quinta à foſſa ſtatione ordinetur. Sic vt triangulus Iſopleuros occupet decimum à dextro latere ſpacium.

D ij

Fonte: Fulke, W. (1578).

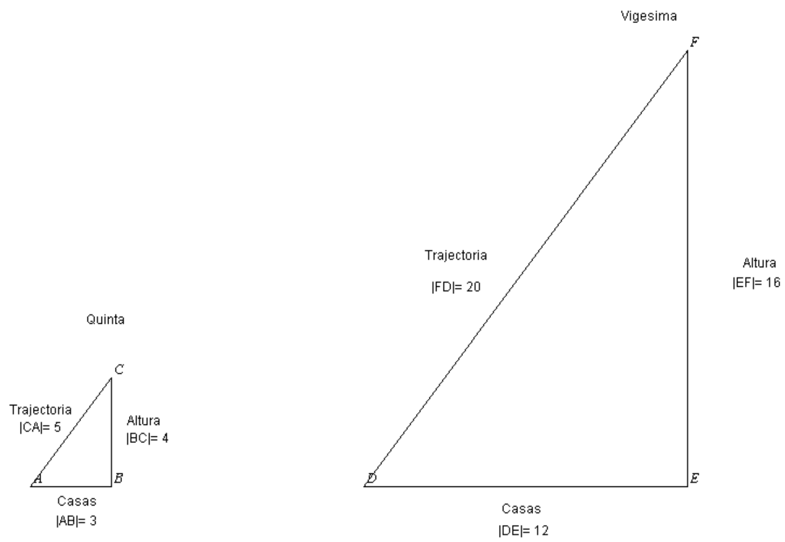
O *Metromachia* é um jogo de tabuleiro onde entram em confronto dois exércitos e a hierarquia militar depende das características geométricas de cada peça interveniente. A movimentação é baseada, tal como no *Rithomachia*, em regras matemáticas. A batalha decorre num tabuleiro composto por três zonas quadriculadas, dois acampamentos situados nos extremos do tabuleiro e ao centro a zona da batalha, com o total de 52x33 casas. Entre cada acampamento e a zona da batalha existe um fosso. No centro de cada acampamento há um castelo constituído por três muralhas, torres de vigia e uma torre de menagem. As muralhas e as torres têm diferentes alturas por ordem crescente, desde a muralha exterior à muralha mais interior. Começamos por uma muralha de altura 4, seguimos para uma de 8 e a terceira tem 12, no centro temos a Torre de Menagem com 16 de altura. Cada exército é composto por infantaria, cavalaria, oficiais e comandante, bem como viaturas de combate e materiais transportáveis.

As peças do jogo são todas geométricas sendo a infantaria representada por 20 figuras planas, que poderão ser formadas só por linhas rectas (sete triângulos, quatro quadriláteros e cinco polígonos com cinco ou mais lados), só por linhas curvas (Círculo e "Oval") ou por linhas mistas (Semicírculo e Segmento). A cavalaria é formada por sólidos geométricos: poliedros e não poliedros, num total de 26. Os oficiais são os cinco sólidos platónicos e o comandante é a Esfera. As viaturas de combate, também chamados bombardeiros são 8 pirâmides quadrangulares truncadas, distinguindo-se duas categorias: as de linha avançada e que se denominam 5ª, 10ª, 15ª e 20ª e as de linha de retaguarda que são a 20ª, 25ª, 30ª e 35ª. Os materiais a transportar podem ser: 8 vigas que permitem atravessar o fosso, 4 escadas de diferentes alturas para subir as muralhas e 4 barris de comida para ajudar a resistir a um possível cerco.

Os exércitos posicionam-se na zona de batalha ao longo de 6 filas, ficando as viaturas na mais avançada e o comandante no centro do exército. O movimento das peças faz-se de acordo com as suas formas, por exemplo, as que têm bases triangulares movimentam-se em diagonal, as que têm bases quadradas para a frente ou para o lado, as que têm bases curvas em todas as direções. A infantaria avança uma casa no ataque e duas na fuga enquanto a cavalaria avança duas casas no ataque e três na fuga. Os oficiais movimentam-se três casas em qualquer direção e o comandante quatro. As viaturas só se podem movimentar uma casa e os materiais transportáveis têm os movimentos das peças que os transportam.

Começando o combate, as peças só podem ser destruídas ou capturadas por um de quatro processos: Fogo de Viaturas, Captura de Semelhantes, Bloqueio por Cerco ou Captura por Dimensão.

Figura 10 - Exemplo de ataque por Fogo de Viaturas

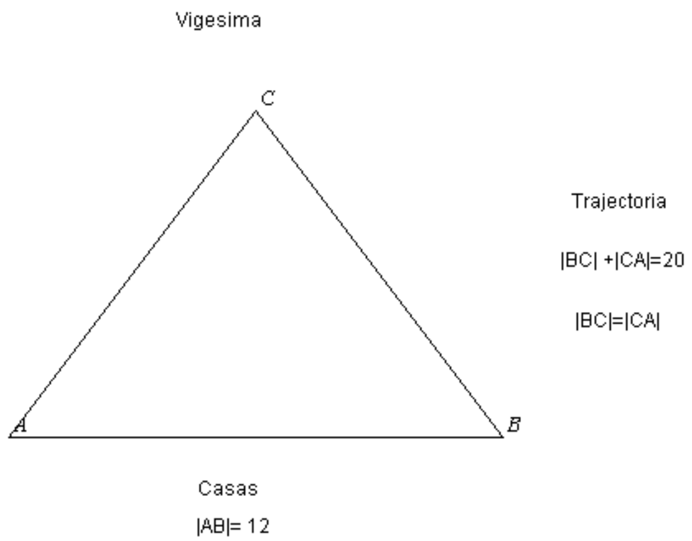


Fonte: Elaborada pelos autores

O primeiro processo é pelo Fogo de Viaturas e para tal será necessário recorrer ao triângulo retângulo aplicando o Teorema de Pitágoras ou ao triângulo isósceles e estabelecer uma relação entre a soma dos dois lados iguais e o outro lado. Neste ataque, se os "canhões" dispararem e a bola de fogo descrever uma trajetória ascendente até atingir o alvo, sendo isso apenas feito pelas máquinas de linha avançada, estamos perante uma aplicação do Teorema de Pitágoras em que são colocados nos catetos a altura do objeto a destruir e a distância da viatura a esse objeto, ficando o espaço percorrido pela bola na hipotenusa e que corresponde ao nome da viatura de guerra (Figura 10).

Estas viaturas de guerra são usadas se pretendemos destruir as muralhas e as torres. Se o canhão for de linha de retaguarda o projétil descreve uma trajetória ascendente até uma altura máxima e depois desce até atingir o alvo. Fulke usa nestes bombardeiros cálculos relativos ao triângulo isósceles. Assim, eles destroem tudo o que se encontra a uma distância correspondente ao lado diferente de um triângulo isósceles em que as trajetórias ascendente e descendente das bolas de fogo correspondem aos dois lados iguais. Por exemplo, a vigésima atinge o alvo a 12 casas de distância (Figura 11) e a trigésima quinta abate os inimigos posicionados a 21.

Figura 11 - Exemplo de trajetória de um bombardeiro



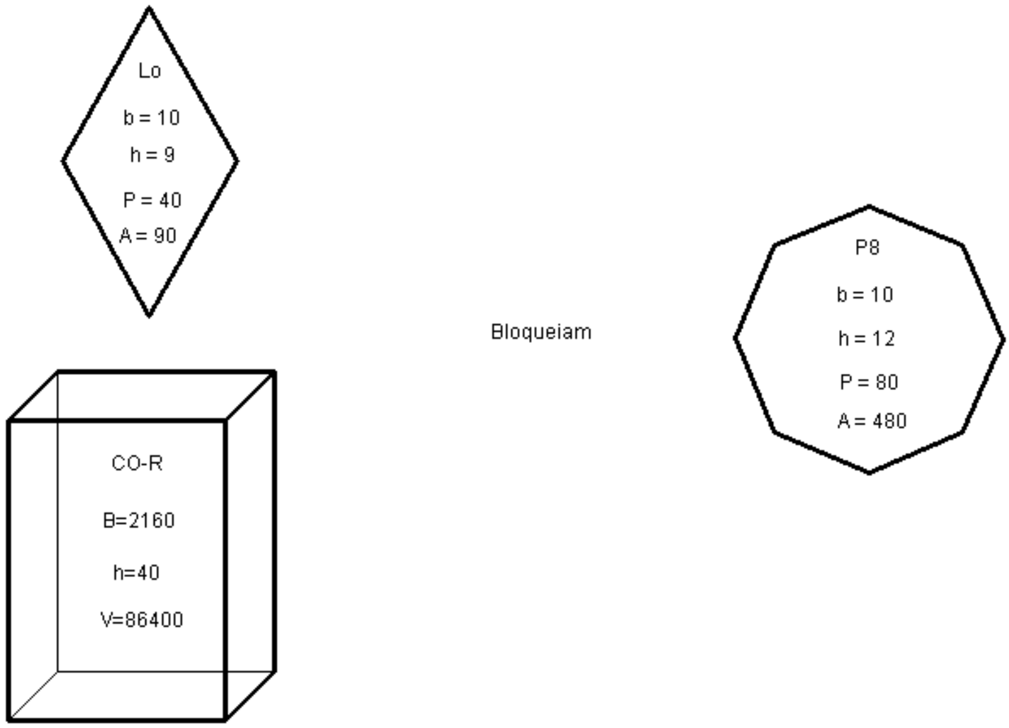
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para destruir as máquinas há que determinar o seu volume, tarefa um pouco complicada, e depois eliminá-las por Captura por Dimensão (o quarto processo, que descrevemos mais à frente).

Pelo segundo processo, Captura de Semelhantes, as peças capturam-se quando têm as mesmas características. Assim, o Triângulo Retângulo captura o Triângulo Retângulo, o Triângulo Equilátero captura o Triângulo Equilátero, o Losango captura o Losango, a Pirâmide do Paralelogramo captura a Pirâmide do Paralelogramo, a Coluna Octogonal captura a Coluna Octogonal, o Cubo captura o Cubo, etc.

O terceiro processo é o Bloqueio por Cerco e são necessárias duas peças adversárias para bloquear. No caso dos soldados o produto ou a soma das medidas das peças utilizadas terá que produzir o seu perímetro. Neste processo existem algumas condicionantes: se usarmos a soma, as parcelas terão que ter o mesmo valor, por isso, se quisermos bloquear um Octógono cujo perímetro é 80 usamos o Losango em que uma das medidas é 40 e a Coluna do Retângulo cuja altura também é 40 (Figura 12).

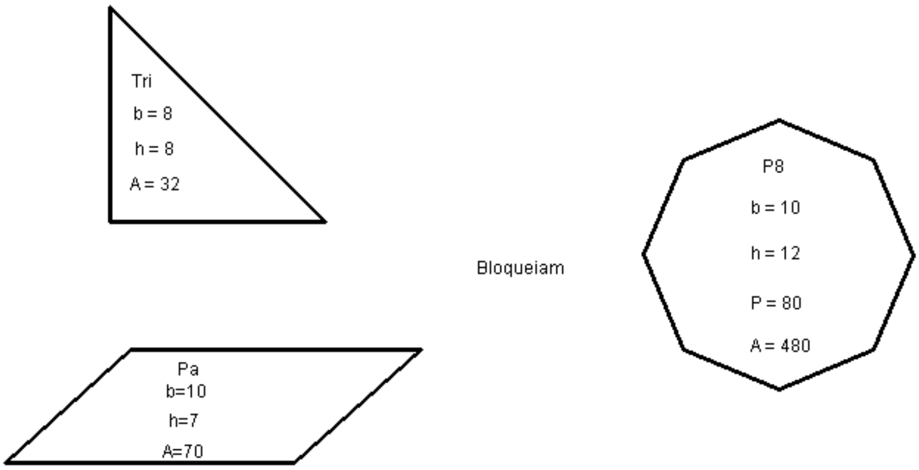
Figura 12 - Exemplo de Bloqueio por Cerco utilizando uma soma



Fonte: Elaborada pelos autores.

As restrições na soma não se aplicam no produto e podemos usar quaisquer duas peças desde que o produto das suas medidas produza o perímetro do soldado que se pretende bloquear. Podemos, por exemplo, usar o produto da base 8 do Triângulo Retângulo Isósceles pela base do Paralelogramo, obtendo 80 que corresponde ao perímetro do Octógono (Figura 13).

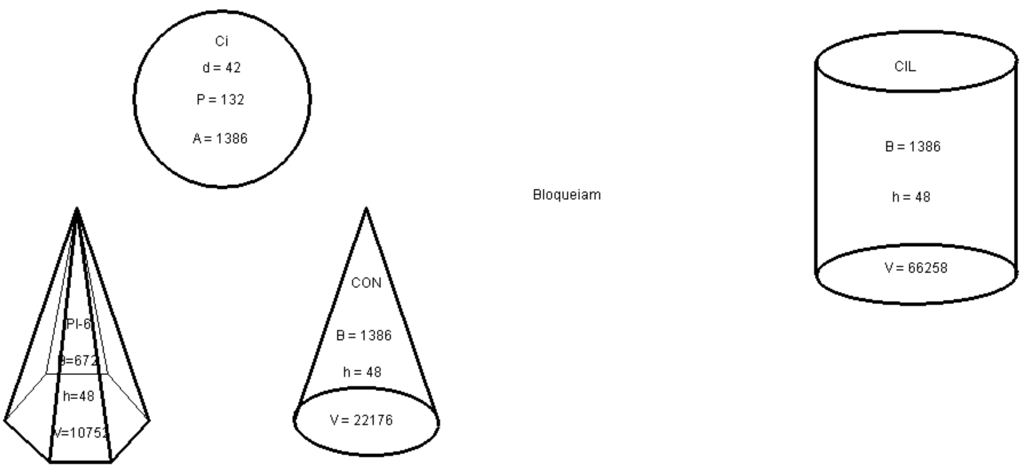
Figura 13 - Exemplo de Bloqueio por Cerco utilizando um produto



Fonte: Elaborada pelos autores.

Se, em vez de bloquear a infantaria, pretendermos bloquear cavaleiros, precisamos de utilizar peças que produzam a sua área, tornando-se necessário recorrer a três peças, como no caso do bloqueio do Cilindro. Os militares que são usados terão que ser: um com a medida igual à circunferência do Cilindro, perímetro da base, outro com a medida da sua altura e um terceiro com a área da base. Assim, usamos o Círculo, a Pirâmide Hexagonal e o Cone. Do Círculo usamos o perímetro que, ao ser multiplicado pela altura da Pirâmide Hexagonal, produz a área lateral e ao somarmos a base do Cone, que é igual à base do Cilindro, obtemos a área total (Figura 14). Esta área não é exatamente a área total, pois só foi considerada uma base, no entanto, parece que é a única maneira de se ultrapassar a falta de medidas que possam produzir os valores necessários.

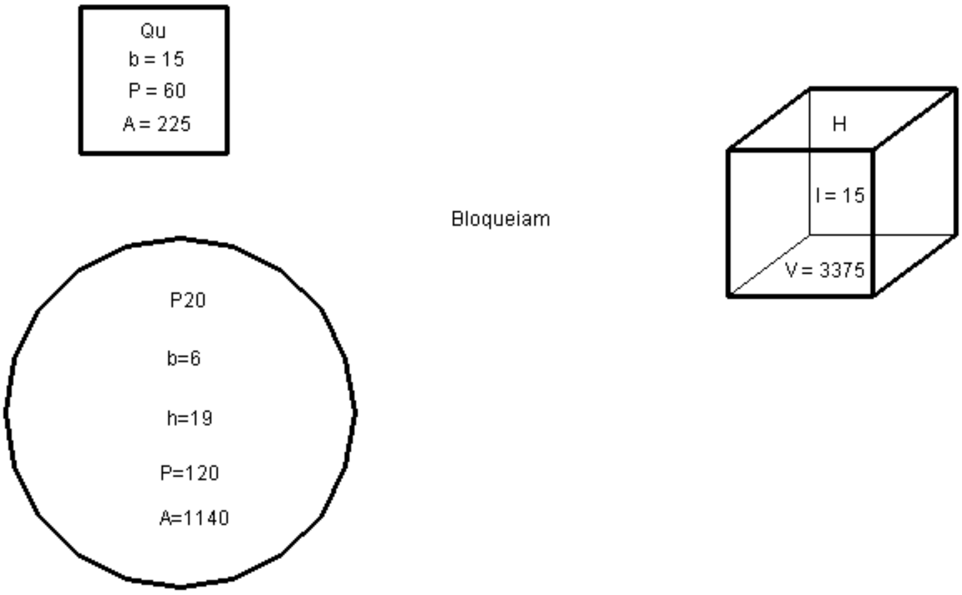
Figura 14 - Exemplo de bloqueio do Cilindro



Fonte: Elaborada pelos autores.

Bloquear os oficiais, isto é, os sólidos platónicos, é muito mais fácil do que os militares de cavalaria. Para capturar o Cubo podemos usar, por exemplo, o Quadrado de lado 15 que dará área 225 e o Icoságono, pois este tem medida 6 e a área do Cubo é exatamente seis vezes a área do Quadrado correspondente às suas faces (Figura 15).

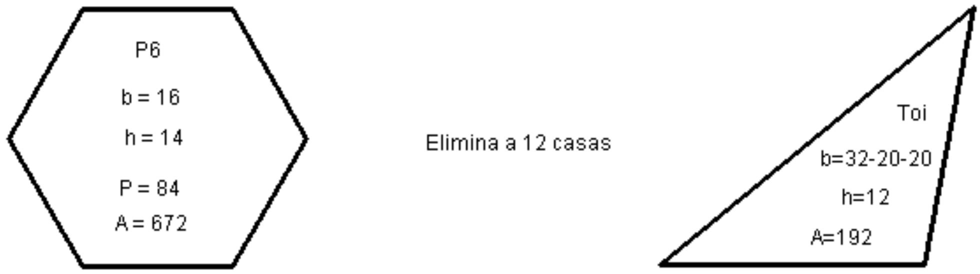
Figura 15 - Exemplo de bloqueio de um sólido platónico



Fonte: Elaborada pelos autores.

O último processo é o mais complicado, a Captura por Dimensão é tão engenhosa que é difícil definir regras. Neste processo relacionam-se as dimensões das peças com a distância à peça atacada, tendo que se produzir a área para a infantaria ou o volume para a cavalaria e para os oficiais. Na infantaria precisamos só de uma peça com exceção do Triângulo Equilátero, que devido à irracionalidade da sua área é usado o seu quadrado. Assim, para o Triângulo Equilátero, precisamos de 36x6x18 = 3888 (36 da área da Coluna Octogonal, 6 do lado do Octaedro e 18 casas de distância). Nas restantes peças só é necessário um militar. Os triângulos têm como combinação a medida da base por metade da altura ou metade da base pela altura. O Triângulo Obtusângulo Isósceles, por exemplo (Figura 16), precisa de A=192= 16x12 casas (16 da base do Hexágono e 12 casas de distância).

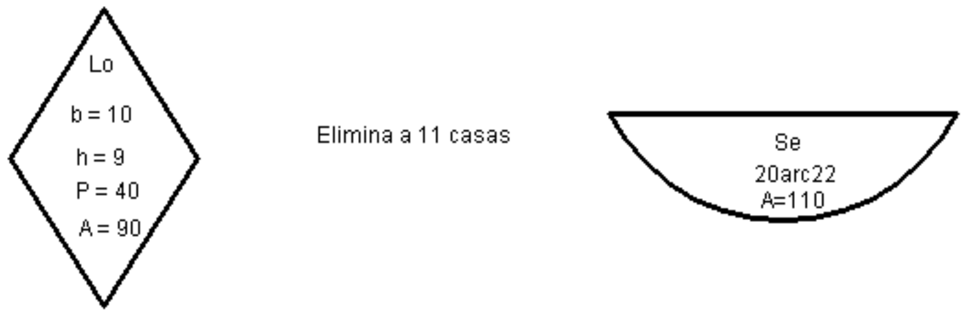
Figura 16 - Exemplo de captura do Triângulo Obtusângulo Isósceles



Fonte: Elaborada pelos autores.

Os quadriláteros terão uma ou duas combinações. Se considerarmos o Retângulo, teremos A=2160=60x36 casas (60 da altura da coluna icosagonal e 36 casas de distância). Os polígonos com mais de cinco lados só têm uma hipótese, o semi-perímetro pelo apótema. As figuras com linhas curvas também só têm uma combinação possível. Por exemplo, o Segmento em que a área é A=110=10x11casas (10 da altura do Losango e 11 casas de distância) (Figura 17).

Figura 17 - Exemplo de captura do Segmento

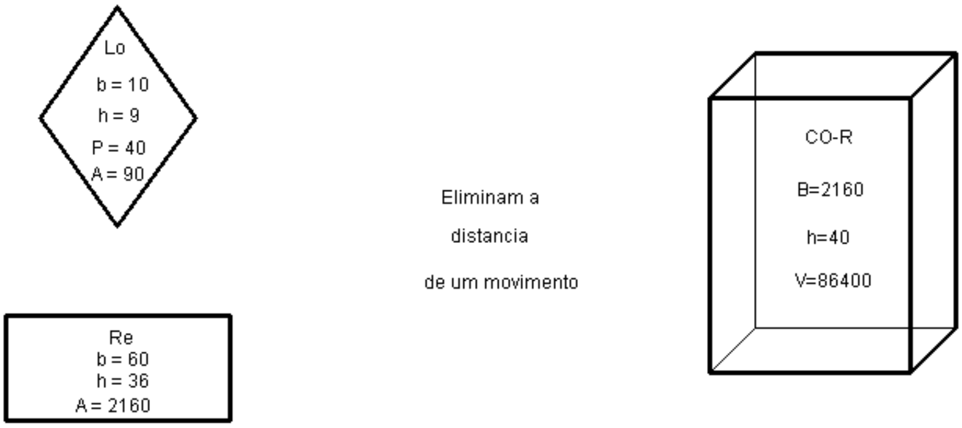


Fonte: Elaborada pelos autores.

O Pentágono não pode ser capturado por este processo devido à sua dimensão fracionária.

Para capturar a cavalaria é necessário produzir o volume. Assim sendo, a Coluna do Retângulo de volume V=86400=2160x40 (2160 da área do Retângulo e 40 do perímetro do Losango) é capturada quando os atacantes se encontram à distância de um movimento (Figura 18).

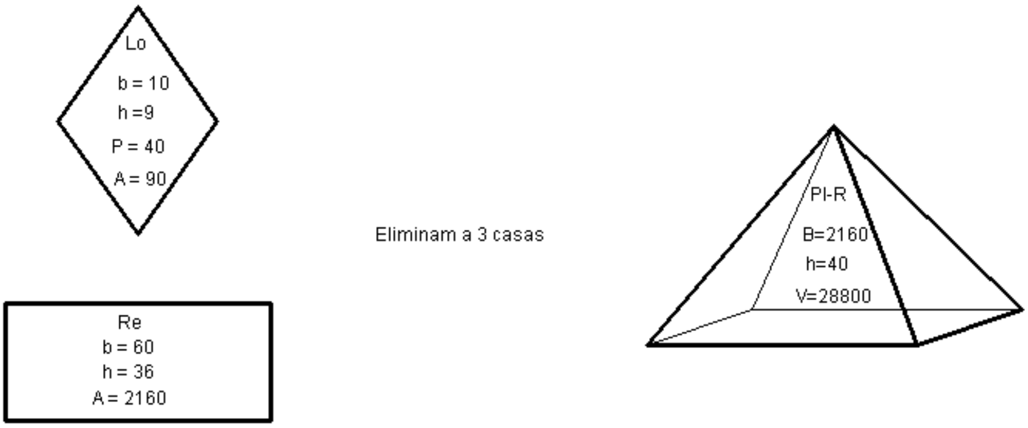
Figura 18 - Exemplo de captura da Coluna do Retângulo



Fonte: Elaborada pelos autores.

Em relação à Pirâmide do Retângulo, usamos os mesmos valores que utilizamos para a coluna ou prisma da mesma altura, mas agora a 3 casas de distância, devido à relação de terça parte do volume (Figura 19).

Figura 19 - Exemplo de captura da Pirâmide do Retângulo



Fonte: Elaborada pelos autores.

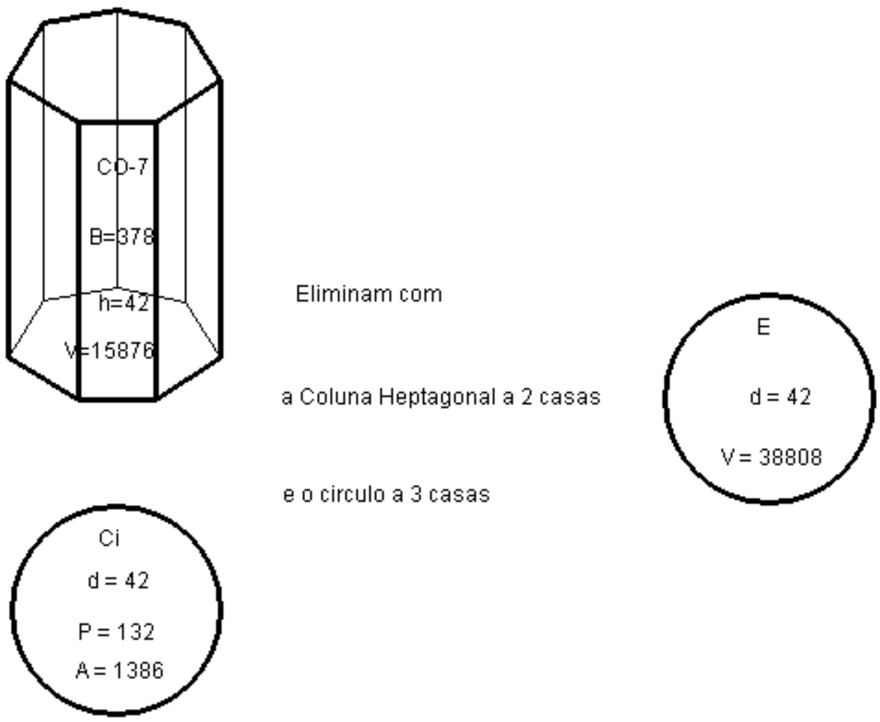
O Ovalóide poderá ser capturado pelo Cilindro mais Cone à distância de um movimento V=88704=66258+22176 (66258 do volume do Cilindro e 22176 do volume do Cone), ou pelo Cone à distância de 4 casas pois o seu volume é 4 vezes o do Cone (V=88704=22176x4 casas).

Relativamente aos oficiais do exército temos, por exemplo, o Dodecaedro que é formado por 12 pirâmides pentagonais e por isso será utilizado o volume da Pirâmide Pentagonal e o Triângulo Acutângulo Equilátero colocados à distância de um movimento, V=760=63(1/3)x12.

ISSN 2447-6447

No caso do comandante, isto é, a Esfera, será capturado por uma dimensão 42 correspondente ao diâmetro da Esfera (Coluna Heptagonal) colocada a 2 casas e por 1 com a área do círculo máximo da Esfera (1386) colocada a 3 casas (Figura 20). As posições 2 e 3 casas referem-se ao facto do volume da Esfera ser dois terços do produto da área do Círculo pelo diâmetro.

Figura 20 - Exemplo de captura da Esfera



Fonte: Elaborada pelos autores.

As viaturas só podem ser capturadas por este processo, mas para tal temos que determinar uma base única em virtude das viaturas serem pirâmides truncadas e terem bases diferentes. Assim, colocamos a 2 casas três figuras que terão de ter 4 = 12–8 (diferença das bases), 10=12–2 (diferença entre a base maior e metade do valor anterior) e a terceira 9=Media (8,10) (média entre o valor da segunda peça e a base menor). Encontrado este valor usamos uma peça com a medida 9 e outra com a medida 16 posicionada a 2 casas. O volume das viaturas de combate é 144=16x9. Também podemos usar outras medidas que produzam 144 até pela soma (132+12).

Os materiais transportáveis são capturados conjuntamente com o militar que os transportam exceto os barris, para os quais será necessário um processo semelhante ao das viaturas. Para a sua captura posicionamos três peças a 3 casas: peça 16=32-16 (diferença

ISSN 2447-6447

dos círculos máximo e mínimo), peça 8=(32–16)/2 (semi-diferença anterior) e a última peça 40=(32–16)/2 +32 (soma do cálculo anterior com a base maior). Encontrado este valor utilizamos a sua metade. O volume será então a metade de 40 pela altura 20, que dá 400. Utilizamos assim duas peças que produzam 400. Os barris só poderão ser capturados ou destruídos após o comandante ser capturado.

Finalmente, a captura do acampamento é feita por destruição das torres e invasão do castelo, assalto pelas escadas ou pela fome.

Figura 21 - Réplica do *Metromachia*

Fonte: MUHNAC, Portugal.

O jogo termina quando um dos exércitos atinge a Torre de Menagem do adversário e conquista as insígnias. Durante a batalha os reacendimentos são infinitos, ainda não se sabe se algum exército consegue ganhar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos dos progressos da Matemática e dos seus ramos, nomeadamente da Geometria, nasceram de atividades lúdicas. Alguns problemas tornaram-se populares por terem enunciados suficientemente simples para se transmitirem e alimentarem a imaginação de muitos amadores. No entanto, o trabalho a que deram origem é muitas vezes compreendido por poucos. O Último Teorema de Fermat é um exemplo exuberante deste fenómeno. Escolhemos os jogos, pelo apelo misterioso que exercem, para ilustrar esta característica da rainha das ciências.

ISSN 2447-6447

Os jogos matemáticos são um tema recorrente da divulgação matemática e das novas teorias de ensino. Contudo, uma análise mesmo superficial dos respetivos conteúdos mostra que o tema é, o mais das vezes, tratado de forma previsível e estereotipada. O problema reside no facto de os jogos matemáticos constituírem um campo demasiado vasto para uma abordagem breve. A sua relevância pedagógica e cultural é reconhecida, mas os especialistas escasseiam, e as atividades que lhe são dedicadas mostram só, e sempre, a mesma ponta do iceberg.

No que se refere ao ensino, as suas potencialidades pedagógicas são incontestáveis e podem ser exploradas de diferentes formas. O Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais de 2001 aconselha enfaticamente o recurso a estes artefactos lúdicos no processo educativo. Este documento oficial de referência para as práticas letivas da disciplina de Matemática no ensino básico em Portugal, quando em vigência, apontava o jogo como um tipo de experiência de aprendizagem a ser vivida pelos alunos, pois "é um tipo de atividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica" (Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica, 2001, p. 68) e contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento cognitivo e relacional dos alunos. A aprendizagem através do jogo pode também ser implementada de forma mais direcionada, adaptando e criando atividades a partir dos conteúdos programáticos. Obviamente que o ensino não se pode reduzir apenas a jogos, mas estes podem dar vida à Matemática escolar e despertar curiosidades. Proporcionar o desenvolvimento de capacidades para criar conhecimento relevante e capacidades de adaptação cognitiva a situações novas e imprevisíveis exige, sem dúvida, grande capacidade de inovação. Felizmente, o ubíquo mundo dos jogos está aí, desde há muito, para nos ajudar.

REFERÊNCIAS

Catarino, I. (2007). O Metromachia, um jogo geométrico. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Número Especial Janeiro de 2007, 53-68.

Donkers, J., Uiterwijk, J. & Voogt, A. (2007). Jogos Mancala – Tópicos sobre Matemática e Inteligência Artificial. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Número Especial Janeiro de 2007, 69-86.

Fernandes, L., Frazão, F. & Silva, J. N. (2012). *1.as Jornadas de História dos Jogos em Portugal*. Lisboa: Apenas Livros.

Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico*: Competências Essenciais – Matemática. Lisboa: Ministério da Educação.

Neto, J. P. & Silva, J. N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*. Lisboa: Gradiva.

Netz, R. & Noel, W. (2007). *O Codex Arquimedes*. Lisboa: Edições 70.

Santos, C., Neto, J. & Silva, J. (2011). *Jogos de Tabuleiro Tradicionais*. Lisboa: Associação Ludus.

Silva, J. N. (2007). Hex. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Número Especial de Janeiro de 2007, 87-94.

Silva, J. N. (2013). *O Livro de Jogos de Afonso X, o Sábio*. Lisboa: Apenas Livros.