HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática
Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISBN 2447-6447

LA GEOMETRÍA ANALÍTICO-DESCRIPTIVA DE MARIANO ZORRAQUÍN

Isabel Sánchez[1]
Mª Teresa González[2]

RESUMEN

Poco se sabe de la vida de Mariano de Zorraquín (¿, 1823), simplemente que fue un militar de prestigio y profesor de la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares. Sin embargo, su obra Geometría analítica-descriptiva (1819), escrita en principio para servir de texto en dicha academia, será una de las más utilizadas en el estudio de esta rama de las matemáticas a lo largo de todo el siglo. En este trabajo, que forma parte de uno más amplio sobre el estudio de la Geometría Analítica en España en el s. XIX (Sánchez, 2015), se caracteriza cómo se aborda esta parte de las matemáticas en esta obra. En él mostramos una Geometría Analítica, propia del siglo XIX en España, que conserva aún reminiscencias de la Geometría de Descartes, pero que por otra parte incorpora el uso de los sistemas de coordenadas, tal y como lo hacemos en la actualidad.

Palabras-clave: Geometría Analítica. Libros de texto. Historia de la educación.

ABSTRACT

Few is known about Mariano Zorraquín's life (¿, 1823). He was a military with a high status and professor at the Academy of Engineering at Alcala de Henares. However, his work *Analytical and Descriptive Geometry* (1819) written, in principle, to be a text in the Academy, will be one of the most used in the study of this branch of mathematics during the century. In this work, that is part of broader study about analytical geometry in Spain during the XIXth century (Sanchez, 2015), it is characterized how this branch of mathematics is addressed in this book. We showed an analytical geometry that is typical of the nineteenth century in Spain, which retains reminiscences of the geometry by Descartes, but on the other hand includes the use of the coordinate systems, as we do today.

Keywords: Analytical geometry. Textbooks. History of education.

INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica nace en el siglo XVII de la mano de René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665). Sin embargo, será Descartes quién pase a la historia como el padre de la misma gracias a su *Geometría* (1637), apéndice del *Discurso*

[1] Docente IES Vía de la Plata (Guijuelo) Salamanca. E-mail: isamss@yahoo.com
[2] Docente da Universidad de Salamanca – USAL, Facultad de Educación. E-mail: maite@usal.es

del método, y ello a pesar de que la geometría que describe en esta obra se parece poco a lo que hoy solemos considerar como Geometría Analítica. Más similar a la concepción actual es la que Fermat desarrolla en su libro *Ad locos planos et solidos isagoge* (1679), obra que fue publicada póstumamente, aunque fue escrita antes de la aparición de *La Geometría*, por lo que en la actualidad se le reconoce igual mérito que a Descartes.

En la obra de Zorraquín, y en general en todas las obras de Geometría Analítica utilizadas en España en la primera mitad del siglo XIX, encontramos una Geometría Analítica muy próxima a los métodos de Descartes, por lo que analizaremos brevemente estos antes de llevar a cabo el análisis del libro que nos ocupa.

La notación utilizada por Descartes en su *Geometría* es muy similar a la actual, pero existe una diferencia muy importante entre ambas: mientras nosotros consideramos a los parámetros y a las incógnitas como números, Descartes las considera como segmentos (Boyer, 1987). Esto crea un problema y es que, mientras con las letras pueden realizarse operaciones aritméticas en número ilimitado obteniéndose nuevas combinaciones de letras, con los segmentos tales combinaciones quedan limitadas al caso en que la *dimensión* del resultado es uno, dos o tres, pues en los otros casos ese resultado deja de ser expresable en términos de figuras geométricas. Por otra parte las ecuaciones obtenidas deben ser homogéneas, pues no tiene sentido sumar un "área" (x^2), con un "volumen" (x^3), por ejemplo. Para superar tal limitación Descartes recurre a la idea del segmento unitario: un segmento arbitrario adoptado como unidad y que, operando convenientemente, reduce toda combinación de segmentos, cualquiera que sea su *dimensión*, a un segmento único. Por otra parte esa unidad irá *sobrentendida* y, de hecho, ni ella ni sus operaciones serán explícitas. Así, para operar con segmentos simplemente es necesario indicar con una letra cada uno de los datos, y el resultado como la combinación respectiva de esas letras de acuerdo con las reglas del álgebra. Además, Descartes, muestra cómo se interpretan geométricamente las operaciones algebraicas y aplica todo ello a la resolución de problemas geométricos. Para ello traduce el problema al lenguaje algebraico utilizando la equivalencia entre segmentos y letras que acabamos de describir, resuelve algebraicamente la ecuación obtenida y finalmente construye con regla y compás la expresión algebraica correspondiente a la solución (Smith y Latham, 1952). Otro problema que surge con esta manera de aplicar el Álgebra a la Geometría es la de las soluciones negativas, que representan segmentos, y que Descartes desecha por falsas.

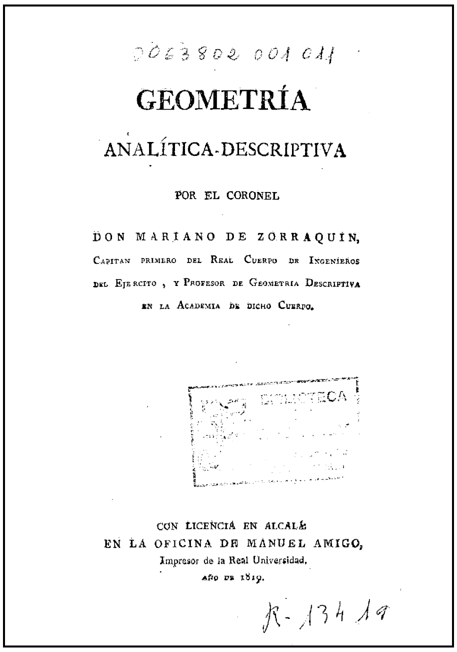
Como hemos dicho anteriormente, encontraremos una manera análoga de hacer Geometría Analítica en el tratado de Zorraquín.

EL AUTOR Y LA OBRA

Los datos existentes sobre Mariano Zorraquín son pocos y confusos, entre ellos la fecha de nacimiento, que se desconoce; se sabe sin embargo que fue un prestigioso militar, profesor de la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares y Diputado a las Cortes por Madrid (Escribano, 2000).

Zorraquín estudió en la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares e ingresó en el Real Cuerpo de Ingenieros en 1805. Participó como oficial de ingenieros en el segundo sitio de Zaragoza y fue ascendido a coronel en 1809. Comprometido con la causa liberal fue condenado a prisión al restablecerse el absolutismo y deportado a Francia. A su regreso fue destinado a la recién reabierta Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares como profesor, donde recibió el encargo de reformar el plan de estudios (Escribano, 2000; Ausejo, n.d.c). En 1819 publicó su *Geometría analítica-descriptiva*, con el objeto de servir de texto en dicha academia, puesto que los textos de Vallejo, utilizados hasta entonces no abarcaban la totalidad del temario del nuevo plan de estudios (prólogo de la obra).Ese mismo año es ascendido a brigadier y al iniciarse el Trienio Liberal fue elegido Diputado a Cortes por Madrid. El 19 de abril de 1823 es nombrado Ministro de la Guerra, pero no llega a tomar posesión pues fallece en la campaña de Cataluña contra los absolutistas, el 27 de abril de 1823, a resultas de las heridas recibidas en el asalto a la plaza de Vich del día anterior. A su muerte era teniente coronel del Real Cuerpo y Mariscal de Campo del ejército (Escribano, 2000; Ausejo, n.d.c).

Ilustración 1 – Carátula del libro *Geometría analítica-descriptiva*, 1819



GEOMETRÍA

ANALÍTICA-DESCRIPTIVA

POR EL CORONEL

DON MARIANO DE ZORRAQUÍN,

CAPITAN PRIMERO DEL REAL CUERPO DE INGENIEROS DEL EJERCITO, Y PROFESOR DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA EN LA ACADEMIA DE DICHO CUERPO.

CON LICENCIA EN ALCALÁ

EN LA OFICINA DE MANUEL AMIGO,

Impresor de la Real Universidad.

AÑO DE 1819.

Fonte: Zorraquín, 1819, capa.

La importancia de la obra de Zorraquín estriba en que no solamente fue utilizada como texto en la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares, para la que fue escrita, sino que fue recomendada como texto para el estudio de la Geometría Analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde 1847 a 1867, apareciendo en las listas de libros de texto aprobados por el gobierno a lo largo de esos 20 años.

El libro analizado corresponde a la única edición de la *Geometría Analítica-Descriptiva* de Mariano de Zorraquín, impresa en Alcalá en 1819.

La obra consta de un solo tomo de 487 páginas dedicadas a la Geometría, divididas en cinco capítulos, organizados a su vez en dos secciones: la primera dedicada a la *Análisis determinada* y la segunda a la *Análisis indeterminada.* El primer capítulo corresponde íntegramente a la primera sección, el segundo trata de la recta en el plano y el espacio, e introduce la *Geometría Descriptiva*; en los tres siguientes capítulos trata de las ecuaciones de 1er grado entre tres variables, las ecuaciones de 2º grado entre dos variables y las ecuaciones de 2º grado entre tres variables, respectivamente.

En este artículo trataremos algunos aspectos estudiados en los dos primeros capítulos.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA- DESCRIPTIVA DE ZORRAQUÍN

En este texto encontramos dos maneras muy diferentes de hacer Geometría Analítica, que el autor divide en sendas secciones, como ya hemos comentado: Análisis determinada y Análisis indeterminada. En la primera Zorraquín muestra una manera de hacer Geometría Analítica más próxima a la Geometría de Descartes que a la actual, en la que el Álgebra se aplica a la Geometría de manera similar a como se hace con la Aritmética, con la diferencia de que los números y las letras de las ecuaciones representan segmentos y no números. Esto conlleva, como comentamos en la introducción, dos limitaciones importantes: en primer lugar que las ecuaciones deben ser homogéneas y en segundo lugar el problema de la interpretación de las soluciones negativas, al que Zorraquín dedica un amplio estudio.

Por otra parte, al igual que Descartes, una vez obtenida la solución algebraica, se construye con regla y compás, por lo que el autor explica cómo se construyen las principales expresiones algebraicas que pueden surgir como solución de una ecuación de primer o segundo grado.

La segunda manera de hacer Geometría Analítica, que es estudiada bajo el nombre de Análisis indeterminada, es similar a la actual, basada en el concepto de lugar geométrico y utilizando sistemas de coordenadas para determinar un punto en un plano.

Veremos todo esto a continuación con más detalle e incluyendo problemas resueltos por el autor para ilustrar la teoría.

Zorraquín da las definiciones de Álgebra y Geometría, de sus aplicaciones y de la manera de relacionarlas en una introducción al comienzo de la obra:

> [...] En la primera (el Álgebra) nos dirigimos á encontrar una ecuación ó expresión analítica que contenga cierto número de relaciones entre la cantidad desconocida y los datos del Problema. Una vez hallada, el calculador puede seguir maquinalmente el camino trazado para obtener los valores de la incógnita sin necesidad de esfuerzo mental, ni de atender al objeto primario que pierde de vista durante el trabajo mecánico de efectuar las Operaciones Aritméticas. En la Geometría al contrario, no se llega al resultado sino marchando de consecuencia en consecuencia que es preciso deducir por una serie no interrumpida de razonamientos de la combinación de varios axiomas ó principios admitidos. Este método que puede llamarse directo, y en el que de ningún modo se hace uso del lenguage algebraico es sin duda alguna el mas claro, pues que en efecto en la distancia que separa los primeros axiomas de las últimas consecuencias no se da paso sin que el entendimiento quede plenamente convencido de la verdad de lo que antecede. [...]. Pero apenas abandonamos los elementos para remontarnos á otras mas difíciles los razonamientos se aumentan y complican hasta tal punto que para

> formarlos y seguirlos son indispensables esfuerzos extraordinarios de atención y de memoria, [...].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 2)

Comenta que estos problemas se tienen de igual manera en las cuestiones numéricas y se resuelven con ayuda del Álgebra, y se plantea si es posible aplicar lo mismo en la Geometría. Para ello comienza haciendo la siguiente observación:

> Recordaremos á este fin que las magnitudes lineales en tanto tienen existencia en cuanto se las refiere á una unidad de medida; esta no es una consideración arbitraria, pues sin ella nada significaría el producto de dos líneas, el cuadrado de una &.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 2)

Y teniendo en cuenta esto, es fácil convertir un problema geométrico en otro algebraico:

> Si pues siempre que entren en los cálculos, substituimos por ellas los números que expresan sus relaciones con la unidad las cuestiones geométricas podrán considerarse como numéricas, y resolverse por el Álgebra empleando sus caracteres generales para representar dichas magnitudes.(...) De lo dicho resulta que si después de averiguar las relaciones que existen entre las magnitudes dadas y las que se buscan las ciframos en una ecuación, resolviéndola llegaremos al resultado sin el trabajo que de otro modo sería indispensable.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 3)

Y da la definición de *Aplicación del Álgebra a la Geometría:*

> Esto es lo que se entiende por *Aplicación del Algebra á la Geometría*. Hermanadas de esta suerte sé prestan auxilios mutuos, aquella facilita y simplifica las investigaciones, da á las cuestiones y á sus resultados la generalidad que la caracteriza, y conservando á la segunda la claridad que perdería, queda allanado el camino para discutir aún las materias mas elevadas.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 3)

Y añade que no solo debe servir el Álgebra para facilitar los problemas de la Geometría, sino que ésta también debe dar auxilio a la primera:

> Continuando la misma convención es evidente que en toda expresión analítica debemos ver una construcción geométrica pues que sus caracteres representarán cantidades geométricas.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 3)

Y concluye:

> Dos son pues los objetos de la Geometría analítica; resolver las cuestiones geométricas por el análisis é interpretar geométricamente ó construir las fórmulas analíticas.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 4)

Es importante destacar el nombre utilizado -Geometría Analítica- que engloba tanto "la Análisis determinada" como "la indeterminada", aunque en la primera no se haga uso de sistemas de coordenadas. No todos los autores de la época utilizan este término para denominar ambas formas de aplicar el Álgebra a la Geometría, y actualmente solo consideramos la segunda como Geometría Analítica.

Veremos el primero de los problemas que se incluyen en la obra, y que muestra cómo se lleva a cabo esta primera aplicación:

> I. Propongámonos hallar la magnitud de la perpendicular bajada desde el ángulo recto sobre la base de un triángulo rectángulo, cuyos tres lados son conocidos.
>
> Llamemos *a, b, c* los lados, y *x* la perpendicular; de los triángulos semejantes *ABC, ACD*, resulta *a:b::c:x* luego $x = \frac{bc}{a}$ es 4ª proporcional á los tres lados, propiedad conocida. Para tener su valor, substituiríamos en la formula los de *a, b* y *c*, expresados en números […].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 15)

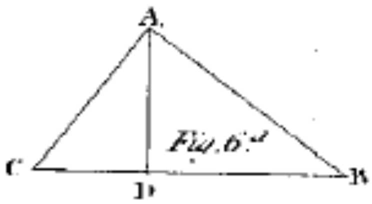


Ilustración 2 – Figura 6ª. Lámina 1

Vemos que solo calcula el valor de la incógnita, pero no la construye, puesto que el problema consiste en calcular "la magnitud" de la altura.

Comenta que la resolución del problema no ha presentado dificultad por la sencillez de la figura y por la del razonamiento para sacar la ecuación, pero dice que el método es general y lo expone:

> Se supone resuelta la cuestión, y después de representar por letras todas las partes del sistema, se examina que relaciones tienen entre sí, se averiguan las propiedades que de ellas resultan, y comparadas con las de otras figuras conocidas, se traducen al lenguaje algebraico; las ecuaciones en que estén cifradas, resueltas por las reglas generales del Álgebra conducirán á los valores de las incógnitas, que sino estuvieren expresados directamente en números, será preciso para determinarlos emplear alguna de las construcciones explicadas.[...].
>
> Tres son pues las cosas á que hay qué atender, plantear las ecuaciones, resolverlas, y construir los resultados.

(Zorraquín, 1819, p. 15)

Continúa diciendo que de las tres la primera es la más difícil porque "solo depende de la sagacidad del calculador, y de su destreza y tino adquiridos con la práctica el escoger aquellas combinaciones que con más facilidad conducen al resultado y dan fórmulas más generales y sencillas (sic)" (p. 16). Para mostrar esto resuelve el mismo problema utilizando los teoremas de la altura y Pitágoras.

ECUACIONES HOMOGÉNEAS Y SEGMENTO UNIDAD

Como hemos señalado en la introducción, uno de los principales problemas a la hora de aplicar el Álgebra a la Geometría es el hecho de que las ecuaciones que se utilizan no pueden ser heterogéneas.

Zorraquín explica por qué las expresiones algebraicas de la Geometría deben ser homogéneas y de grado tres como máximo, y cómo se utiliza la unidad para conseguir esa homogeneidad.

> Toda expresión analítica, referida a la Geometría no puede pasar de tres dimensiones. Debe ademas ser homogénea ó nada significa, asi *a + bc + d3* seria la suma de una línea, una superficie y un volumen, cosa imposible […].
> Quando se obtenga por resultado de un Problema no absurdo una expresión de esta ú otra forma semejante, será fácil darla significación, haciéndola homogénea.
> Para lo cual observaremos que la falta de factores en los dos primeros términos debe provenir de haberse suprimido en ellos los que eran iguales á la unidad tomada por medida, y asi llamándola *r* seria *a + bc + d3 = ar2 + bcr + d3* suma de tres volúmenes.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 5)

Muestra esto mediante un ejemplo de la trigonometría:

> De esto tenemos una prueba en la Trigonometría en la que decimos que $\text{tang.} = \dfrac{sen}{\cos}, \sec = \dfrac{1}{\cos}$ & debiendo ser, $\text{tang.} = \dfrac{R{\cdot}sen}{\cos}, \sec = \dfrac{R^2}{\cos}$ &
>
> (Zorraquín, 1819, p. 6)

Además en varios casos muestra cómo trabajar con ecuaciones que no son homogéneas, introduciendo de forma explícita la unidad en algunos de ellos, como cuando trabaja con radicales:

> $x = \sqrt{n}$ equivaleá $x^2 = n = rn$; luego x es media proporcional entre n , y la unidad r.
>
> $x = \sqrt{abc}$ es lo mismo que $rx^2 = abc, x^2 = \frac{abc}{r}$, $x = \sqrt{\frac{abc}{r}}$.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 12)

O cuando resuelve la ecuación de segundo grado:

> 14. La ecuación mas general de segundo grado es $x^2 \pm px = \pm q$; haremos para la homogeneidad $q = ar = m^2$.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 13)

CONSTRUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS

Otro de los elementos que caracteriza esta forma de hacer Geometría es que una vez resuelto el problema por métodos algebraicos se construye la solución, como ya hemos señalado en la introducción. Antes de resolver cualquier problema Zorraquín explica de forma teórica cómo se construyen las expresiones algebraicas que resultan de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, comenzando por los cocientes. Pone gran número de ejemplos, algunos muy complejos como $x = \frac{abcd + bq^3 + m^2pq}{q^2y - klq + mcd}$, pero siempre reduciéndolos a los casos más sencillos, que se construyen mediante cuartas proporcionales:

> 2. Las expresiones monomias de una dimensión son de esta forma $a, \frac{ab}{c}, \frac{abc}{de}$ & ; todas se construyen por 4as proporcionales.
>
> En quanto á $x = \frac{ab}{c}$ no hay dificultad. Para $x = \frac{abc}{de}$, se buscará una línea $m = \frac{ab}{d}$ y otra $x = \frac{mc}{e}$.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 6)

De forma análoga construye la expresión $x = \frac{abcd}{efg}$, y saca una conclusión general: "De los ejemplos anteriores se deduce que siempre son necesarias tantas 4as proporcionales como dimensiones tiene el denominador"(Zorraquín, 1819, p. 7).

También incluye la construcción de diferentes tipos de radicales. Explica que cualquier expresión radical se puede reducir a dos tipos: $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, que "se construyen la 1ª por una media proporcional entre *a* y *b*; la 2ª por el triángulo rectángulo; $\sqrt{a^2 + b^2}$ es la hypotenusa, y $\sqrt{a^2 - b^2}$ un cateto" (Zorraquín, 1819, p. 9).

Como en el caso de los cocientes pone varios ejemplos como $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}}$, que reduce a $\sqrt{ay}$, haciendo $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$ "de donde $y = \frac{b^2}{b+c} + \frac{cd^2}{a(b+c)}$" (Zorraquín, 1819, p. 9).

También aborda el caso del radical $x = \sqrt{ac + bd - ef - gb}$ del que dice que se puede construir haciendo $ac + bd - ef - gb = ay$; o bien *ac=y2, bd=z2, ef=t2, gb=u2*, quedando por tanto $x = \sqrt{y^2 + z^2 - t^2 - u^2}$ del que da la construcción:

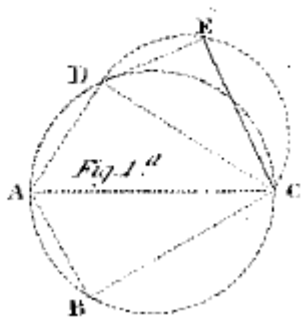


Ilustración 3 – Figura 1ª. Lámina 1

[…] esta última expresión se construye formando con *AB = y; BC = z*, como catetos el triángulo rectángulo *ABC* sobre su hypotenusa *AC* , $b^2 = y^2 + z^2$ se describe el semicírculo *ADC*, se coloca *AD= t*, y $DC^2 = l^2 = b^2 - t^2$ convierte la primitiva en $x = \sqrt{l^2 - u^2}$ que se concluye como indica la figura.

(Zorraquín, 1819, p. 10)

Otro ejemplo de construcción es la de $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots}$, que se construye disponiendo *a* y *b* en ángulo recto y levantando perpendicularmente sobre la hipotenusa, *BC*, el segmento *BD=c,* y así sucesivamente como se indica en la figura 2. (ZORRAQUÍN, 1819, p. 10).

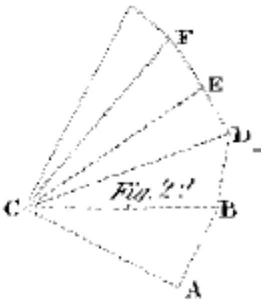


Ilustración 4 – Figura 2ª Lámina 1

También añade algunos ejemplos en que "se logran construcciones más sencillas separándose de las reglas generales" (Zorraquín, 1819, p. 11), como es el caso de $x = \sqrt{ac + bd}$, que transforma en $x = \sqrt{a(c + y)}$ haciendo *bd=ay;* $x = \sqrt{ab + bc} = \sqrt{b(a + c)}$,que se construye mediante medias proporcionales, y $x = \sqrt{a^2 - f^2 \times \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}}$, que transforma en $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ haciendo $y^2 = f^2 \times \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$, y $c^2 + d^2 = m^2, ab + cd = n^2, y = \frac{fm}{n}$, para calcular *y* (Zorraquín, 1819, p. 11).

Otra de las construcciones que explica son las de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 \pm px = \pm q$. Como hemos visto anteriormente utiliza la unidad para convertirla en homogénea. En primer lugar resuelve la ecuación $x^2 - px = -m^2$ Donde *p* y *m* son cantidades positivas. Si los coeficientes son negativos le añade el signo, con lo cual resuelve de forma independiente cada una de las ecuaciones que surgen al combinar los signos. Esto es señal de los problemas que tenían aún en este siglo al trabajar con las cantidades negativas.

Al contrario que en otros problemas, Zorraquín no resuelve la ecuación algebraicamente y construye su solución, sino que de la ecuación misma obtiene la solución por razonamientos geométricos, la construye y comprueba que coincide con la solución algebraica:

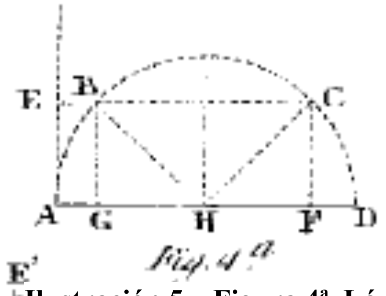


Ilustración 5 – Figura 4ª. Lámina 1

1º. $x^2 - px = -m^2$ ó $x(p - x) = m^2$; *m* es media proporcional entre *x* y *p-x;* luego describiendo sobre *AD=p* como diámetro un semicírculo y en su extremo *A* levantando la perpendicular *AE* = *m*, la *EC* paralela á*AD* dará los puntos *B, C* tal que las perpendiculares *BG, CF* serán las medias proporcionales buscadas, las raíces de la ecuación son *AG, AF* , porque en efecto

$$AF = AH + HF = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2};$$

$AG = AH - GH = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2}$; las dos son positivas, pues $\frac{1}{2}p > \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2}$.

(Zorraquín, 1819, p. 14)

En el caso de $x^2 + px = -m^2$ dice que para resolverla basta con sustituir *x* por *-x*, obteniendo la ecuación resuelta anteriormente por lo que tendrá las mismas raíces que esta "pero con signos contrarios; a saber, negativos" (ZORRAQUÍN, 1819, p. 14).

En el tercer caso, $x^2 - px = m^2$ o $x(x-p) = m^2$, en que *m* es media proporcional entre *x* y *x-p*, da la siguiente construcción:

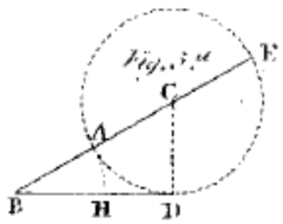


Ilustración 6 – Figura 3ª. Lámina 1

[...] se construye describiendo un semicírculo cuyo radio sea $DC = \frac{1}{2}p$ y tirando la tangente *DB=m;* la secante *BE* dará

$$x' = BE = CE + BC = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2},$$

$$x'' = -BA = EC - BC = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}.$$

(Zorraquín, 1819, p. 14)

En el cuarto caso, $x^2 + px = m^2$, dice que las soluciones son las mismas que las de la ecuación anterior cambiadas de signo, ya que, de nuevo, cambiando *x* por *–x* en esta se obtiene la anterior (Zorraquín, 1819, p.14).

En estas construcciones no da ninguna explicación de las soluciones negativas, sin embargo, este es un tema que Zorraquín desarrollará extensamente, dedicándole un capítulo.

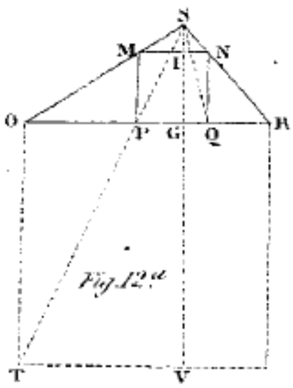
Por último, también incluye la construcción de fórmulas de dos o tres dimensiones, que desde el punto de vista geométrico representan áreas y volúmenes:

12. Las formulas de dos dimensiones están comprendidas en las que anteceden: para construirlas se las reduce á dos factores *m, n,* de los que

> uno representa la base y otro la altura del rectángulo, cuya superficie tiene por valor la expresión dada: por ej. $x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)}$, haciendo $a^2 - b^2 = m^2, cd = n^2$, será $x = mn$, en la que m y n son conocidas. Si hacemos la superficie $x = p^2$, resultará $\sqrt{mn} = p$ lado de un cuadrado igual en superficie al rectángulo anterior. Mas si se le quiere convertir en un paralelogramo ó triángulo, será preciso recurrir a alguna otra condición del Problema para que no sea indeterminado, puesto que con una misma base y altura puede haber una infinidad de dichas figuras iguales en valor, pero diferentes en su forma.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 12-13)

De forma análoga explica que las de tres dimensiones deben reducirse a la forma *x=mnp*, que se puede reducir al cálculo del volumen de un cubo (Zorraquín, 1819, p. 13).

Para ilustrar toda esta teoría Zorraquín resuelve una serie de problemas en los que utiliza las diferentes construcciones estudiadas anteriormente. Veremos uno de ellos, en el que se muestra la construcción de un cociente:



> *VI. Inscribir un cuadrado en el triángulo SOR.*
>
> Comienza suponiendo el problema resuelto y plantea el problema geométricamente:
>
> Sea MNPQ el cuadrado; se verificará que el lado MN cortará á la altura SG del triángulo en un punto I tal que IG=MN.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 23)

Ilustración 7 – Figura 12ª. Lámina 1

De este planteamiento obtiene la ecuación, que resuelve obteniendo la solución algebraica del problema:

> Para expresar analíticamente esta relación, compararemos los triángulos semejantes SMN, SOR, y haciendo SG=*a*, OR=*b*, MN=IG=*x*, se tendrá $\frac{a}{b} = \frac{a-x}{x}$, y $x = \frac{ab}{a+b}$.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 23)

Tras esto construye la solución geométricamente.

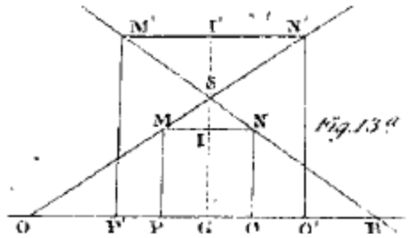


Ilustración 8 – Figura 13ª. Lámina 1

> Sobre *OR* fórmese el cuadrado *TR*, y tírese la *ST*; por el punto *P* en que corta á *OR* levantese la perpendicular PM que será el lado del cuadrado pedido, porque los triángulos semejantes *SMP, STO*, y *SPG, STV* dan *TO:PM::ST:SP::SV:SG* y
>
> $$PM = \frac{SG \times TO}{SV} = \frac{ab}{a+b} .$$
>
> (Zorraquín, 1819, p. 24)

Por último, dice que el problema se puede enunciar de forma más general como *construir un cuadrado que tenga sus cuatro ángulos sobre tres rectas que se cortan de dos en dos.* Problema que admite dos soluciones, el cuadrado que se acaba de hallar y el *P'N'* que se obtiene mediante los triángulos semejantes *SM'N'* y *SOR* (Zorraquín, 1819, p. 24).

SOLUCIONES NEGATIVAS

Si el problema de la interpretación de las soluciones negativas de una ecuación en un entorno geométrico es tratada por todos los autores de libros de matemáticas en los tres primeros cuartos del siglo XIX (Sánchez, 2015), este tratamiento es especialmente extenso en la obra que nos ocupa. Zorraquín desarrolla toda una teoría en la que introduce una serie de conceptos -como *sistemas correlativos* o *cantidades en orden directo o inverso*- que no se usan actualmente, al menos en el sentido que se le da en la obra. Esta teoría no es original de este autor, sino que lo que es propia de Carnot, como él mismo indica:

> 16. Carnot en su interesante Geometría de posición se ha dedicado á fijar la idea que debe formarse de las expresiones llamadas impropiamente cantidades negativas que resultan como soluciones de los Problemas de Geometría. Para la mas fácil inteligencia expondremos su teoría, aplicándola á un ej. particular, sin que por eso deje de tener toda la generalidad necesaria.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 26)

La idea que desarrolla Zorraquín es la de plantear un problema con los datos que se tienen, resolverlo y a partir de ese obtener las soluciones de todos los problemas posibles que se pueden plantear con los mismos datos, que nos darían lo que él llama los *sistemas correlativos* al inicial. El ejemplo que él pone es con un triángulo. Plantea el problema inicialmente con un triángulo acutángulo, pero considera después la opción de que el triángulo sea obtusángulo obteniendo un sistema correlativo. En este nuevo sistema algunas cantidades aparecen con signo opuesto con respecto al anterior, son las que denomina *cantidades en orden inverso*. Las soluciones del nuevo problema las halla cambiando el signo de estas cantidades en la ecuación de partida, obteniendo la que nos da las soluciones del nuevo problema sin necesidad de tener que plantearlo desde cero como un problema distinto. Pero concluye al final que no será necesario resolver las ecuaciones de todos los sistemas correlativos, pues la de partida nos dará todas las soluciones posibles, sin más que cambiar de signo a las cantidades inversas en la solución, y no en la ecuación.

Veamos esto con detalle: "X. Propongámonos hallar el segmento *DC* formado por la perpendicular *AD* bajada sobre la base *BC* de un triángulo desde el ángulo opuesto" (Zorraquín, 1819, p. 26).

Para resolverlo considera un triángulo *ABC*, acutángulo. Toma como incógnita el segmento *DC=x* y aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos *ABD, ADC* obtiene la ecuación $a^2+b^2-2ax=c^2$... (I), de la que saca el valor de *x*. Debemos tener en cuenta que al tomar *DC=x* como incógnita, queda *BD=a-x,* siendo el triángulo acutángulo como es. Pero si en vez de ser acutángulo fuera obtusángulo, tendríamos *BD=a+x.* Zorraquín hace al respecto la siguiente reflexión:

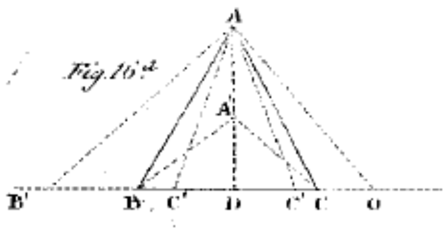


Ilustración 9 – Figura 16ª. Lámina 1

> Pero si el punto *C* pasa á *C",* siendo *ABC"* el triángulo propuesto, no se podrá decir como en el caso anterior *BD=BC"-C"D,* sino = *BC" +C"D=a + x*, asi pues la fórmula (I) se convertirá en $a^2+b^2+2ax=c^2$.... (2).
>
> La diferencia entre las dos proviene solo de los signos que preceden á los segmentos *DC, DC",* ó lo que es lo mismo de la diferente posición que en ambos casos tiene la base respecto de la perpendicular.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 26)

Basándose en esto da una serie de definiciones, la primera de ellas la de sistemas correlativos:

> 17. Esto supuesto, tómese como por *término de comparación* la figura ABC, que llamaremos sistema primitivo.

> Todas las demás $AB'C$, ABC''.... que á ella se refieren (Fig. 16ª) y son como los diversos estados por donde esta pasa al variar de cualquier modo las partes que la componen, se llaman *sistemas correlativos.*
>
> (Zorraquín, 1819, p. 27)

Tras esto hace diferencias entre sistemas directamente e inversamente correlativos:

> Si dos de éstos son tales que les conviene exactamente el mismo razonamiento, ó una serie de razonamientos de todo punto semejantes, en términos que la ecuación $X=0$ hallada para el uno sirve para el otro con solo substituir los valores correspondientes, pero sin otra modificación ni cambio de signos, se dice que son *directamente correlativos*; y cuando esta circunstancia no se verifica, que lo son indirectamente.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 27)

Tras esto define cuándo ciertas cantidades están en orden directo o inverso, y cómo son sus diferencias.

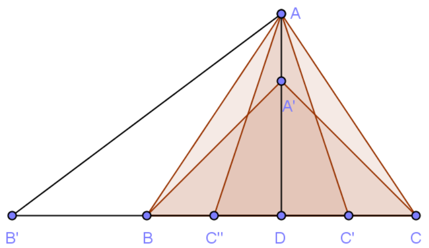


Ilustración 10 – Reproducción de la Figura 16ª Elaboración propia.

> Por último compararemos las dos cantidades BC, BD del sistema ABC con sus homologas $B'C'$, $B'D$ del $AB'C'$: observamos que en el 1º$BC > BD$, y que en el 2º subsiste la misma relación, á saber $B'C > B'D$; en este caso diremos que dichas cantidades están en *orden directo*; mas si por el contrario la que era mayor en el sistema primitivo pasa á ser menor en el 2º estarán en *orden inverso*. La diferencia de dos cantidades *es directa ó inversa*, según estas estén en orden directo o inverso; asi $DC=BC-BD$, y $DC=B'C-B'D$ son directas; $DC=BC-BD$, y $DC''=BD-BC''$ son inversas.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 27)

Tras esto explica cómo transformar una ecuación válida en un sistema en otra válida en otro inversamente correlativo al primero. En primer lugar pone un ejemplo en el que explica que si para un sistema primitivo tenemos una cantidad $BD=a+x$, que pasa a uno correlativo como $BD=a-x$, las cantidades a y BD estarán en orden inverso, y su diferencia $x=BD-a$, $x=a-BD$, es una cantidad inversa. Por tanto si se tiene una ecuación $X=0$, válida para el primer sistema "substituyendo en $X=0$; a-x por $a+x$ hallaremos otra fórmula $Y=0$ diferente de aquella, que solo servirá para el sistema correlativo" (Zorraquín, 1819, p. 28).

Y de ello concluye una regla general:

> [...] y pues vemos que solo se diferencian en que la cantidad *x* entra encada una con signo contrario concluiremos por regla general:
> *Que dada una formula X=0 correspondiente á un sistema primitivo, para hacerla aplicable á otro que le sea indirectamente correlativo, ó bien para deducir de aquella la Y=0 que pertenece al 2º deben mudarse en la Iª los signos de las cantidades inversas.*
>
> (Zorraquín, 1819, p. 28)

Y recíprocamente, si al comparar las ecuaciones de dos sistemas correlativos vemos que el signo de alguna cantidad ha cambiado, eso significa que es inversa: "Recíprocamente si al hacer uso de *X=0*, para un sistema correlativo hallamos que algunas cantidades han mudado de signo, que llamaremos de correlación, y dan otra fórmula *Y=0*, será prueba de que son inversas" (Zorraquín, 1819, p. 28).

Termina diciendo que en la práctica no se resolverán diferentes ecuaciones para los diferentes sistemas correlativos sino que se resuelve la obtenida con el que hemos utilizado para hacer el razonamiento "con tal que en los resultados de las aplicaciones se cambie el signo de las cantidades inversas" (p.28). Es decir, solo es necesario cambiar los signos de las incógnitas, ya que si "se toma por incógnita sin mudarla el signo como debiera ser, es claro que con el mismo aparecerá en el resultado; el cálculo dará para ella el verdadero valor, pero con signo negativo, que por lo tanto deberá hacerse positivo" (p.29). Por tanto las soluciones negativas no son más que las soluciones positivas de un sistema inversamente correlativo al que se ha tomado para resolver el problema.

Da así la interpretación de las soluciones negativas, en primer lugar en el caso de que aparezcan aisladas:

> 20. De lo dicho se infiere que una solución negativa aislada prueba, ó contradicción en las condiciones del Problema que por esta razón no puede resolverse sin modificarlas; ó la existencia de una cantidad inversa que por conservar su signo en el cálculo ha sido causa de que las ecuaciones y los razonamientos que éstas expresan, se refieran á un sistema que tiene con el verdadero una correlación indirecta. Que en esté 2º caso para rectificar las ecuaciones y hallar la figura á que pertenece el Problema si admite solución, debe mudarse en ellas y en el resultado el signo de la incógnita, y dedicarse á conocer el nuevo sistema á que son aplicables éste y aquellas, pues solo á él y á las ecuaciones rectificadas puede pertenecer el valor que dé una verdadera solución.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 30)

Y explica cómo proceder en el caso de obtener una solución negativa aislada, que consiste en volver a la ecuación primitiva y examinarla para averiguar "la contradicción que encierran los datos y la modificación que exigen" (p. 31). Si no existe tal contradicción estamos en el caso en que se ha introducido una *cantidad inversa* y explica cómo proceder para averiguar si una magnitud lo es, para poder aplicar las transformaciones explicadas anteriormente.

> Con este objeto observemos que si en un sistema se tiene $a+x=b$ y en otro $a-x=b$, para el 1º será $x=b-a$ y para el 2º $x=a-b$ y puesto que siendo $b>a$ ha pasado á ser $b<a$, y además la variación se ha verificado por continuidad, habrá habido un caso en que $a=b$ y $x=0$. Del mismo modo quando $x=\dfrac{1}{b-a}$ se convierte en $x=\dfrac{1}{a-b}$, resulta para x el valor intermedio $\dfrac{1}{0}=\infty$. Concluiremos pues que *una cantidad inversa no puede hacerse directa por el movimiento continuo de las partes del sistema á que pertenece sin pasar por 0 ó ℕ.*
>
> (ZORRAQUÍN, 1819, p. 31)

Vemos aquí la idea que explicábamos anteriormente, Zorraquín no considera cada problema como único o aislado, sino como un conjunto de problemas que se pueden resolver a la vez y que no sólo están relacionados, sino que se puede pasar de unos a otros de forma continua a través de las cantidades directas e inversas. Esta continuidad obliga a que estas cantidades sean en un caso concreto cero o ℕ. De nuevo esta idea proviene de Carnot, ya que:

> In 1801[3], Carnot even sees a relation between his approaches for the *analyse infinitesimal* and the *quantités directes et inverses*: they show "much analogy." In the former case, for an invariant system of quantities, one observes a second comparison system whose quantities transform into the quantities of the initial system through a continuous approximation to the limit. In the latter case, one likewise compares the quantities of two systems, and these are the absolute values in both systems that are equal to each other at the limit.
>
> (Schubring, 2005, p. 357)

En lo explicado por Zorraquín en el párrafo anterior vemos reflejada esa idea de las cantidades que se hacen iguales en el límite. Pero añade que el recíproco no es cierto ya que aunque x sea una cantidad inversa, x^2 no lo es, a pesar de haber sido 0 o ℕ a la vez que

[3] Año de publicación de su obra *Correlación de las figuras geométricas.*

x. Por tanto este método es insuficiente para averiguar cuando una cantidad es inversa, y por ello propone:

> Luego siendo insuficiente el carácter que acabamos de manifestar para distinguir las cantidades inversas, se hará, girar el sistema para conocer las que pueden llegar á ser nulas ó infinitas, y conoceremos las que entre estas son inversas examinando la forma de la figura, y las relaciones que existen entre sus partes.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 31)

En el siguiente problema, que ilustra todo lo expuesto, vemos cómo hace un cambio en las condiciones del enunciado para que la solución negativa sea también cierta, convirtiéndolo en otro más general.

> IX. Dividir la recta DB en media y extrema razón.

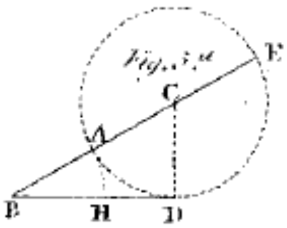


Ilustración 11 – Figura 5ª. Lámina 1

Toma $DB=p$ y $BH=x$. En su resolución aparece la ecuación de segundo grado $x^2 = p(p - x)$ de soluciones $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + p^2\right)}$ que indica que se construyen igual que uno de los casos explicados en el apartado correspondiente.

> Añade que la solución positiva, *BH,* es la de la ecuación planteada, de la negativa nos dice:

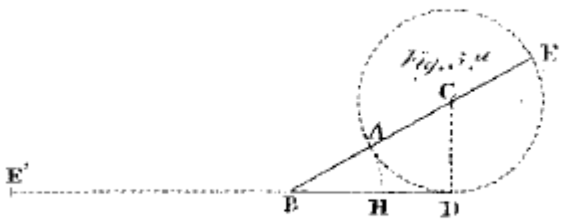


Ilustración 12 – Figura 5ª. Lámina 1

> […] se tiene por 2ª raíz $x''=-BE$; mudando en la ecuación primitiva el signo de x será $x^2 = p(p + x)$, y $x=$ *BE* media proporcional entre *BD*, y *BD* + *BE*; luego si añadimos á *DB* la *BE* como en *BE'* quedará la *DE'* dividida en media y extrema razón en *B,* problema indicado por la raiz negativa.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 45)

Y amplía el problema:

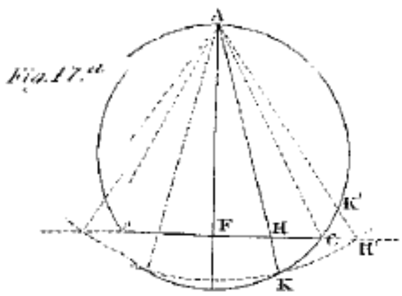
> Supongamos que dada la *DE'* se pide situar sobre ella dos puntos *B,* y *H* tales que su distancia *BH* sea media proporcional entre las *BD, HD* de los puntos que se buscan al origen D; haciendo *BH=x*, *BD=y* resultará $x^2 = y(y-x)$ que anuncia una cuestión indeterminada, y dará las dos soluciones dichas, cuando hagamos *x=BH* ó*=BE', y=BD* ó*=DE'* cantidades conocidas. Tenemos pues en una sola fórmula la solución de varias cuestiones que consideradas de otro modo hubieran necesitado una fórmula particular cada una.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 45)

En el siguiente problema muestra un ejemplo de cómo "girar" el sistema para buscar las magnitudes que se hacen inversas y así interpretar las soluciones negativas: "XI. Dada una cuerda *BC*, y el diámetro *FA* qué es perpendicular á ella, tirar desde el punto *A* otra cuerda, de modo que la parte *HK* interceptada entre la Iª y la circunferencia sea de una longitud dada" (Zorraquín, 1819, p. 32).

Comienza, como siempre, suponiendo el problema resuelto y hace el planteamiento geométrico del que saca la ecuación a resolver. Utiliza una propiedad de las cuerdas que dice que si dos cuerdas se interceptan en el interior de una circunferencia, el producto de los segmentos determinados en una es igual al producto de los segmentos determinados en la otra.

Considera, en este caso las cuerdas *AK* y *BC* que se cortan en *H,* y toma como incógnita *AH=z.*

Ilustración 13 – Figura 17ª. Lámina 1



Sean *AH=z, BC=*[4]*a, HK=b, AF=c.* Sabemos que

$$AH \times HK = BH \times HC = (BF+FH)(BF-FH)$$

---

4 Obsérvese que el punto *B* no está en el dibujo.

ó $bz = \frac{1}{4}a^2 - FH^2$; pero $FH^2 = z^2 - c^2$, luego $bz = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2$....

(I) $z = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}$.

La 1ª solución es positiva; se comprende y construye sin dificultad. La 2ª es negativa y prescindiendo del signo se tiene $z = \frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}$.

Como ya hemos dicho, para obtener la magnitud que se hace inversa "gira" el sistema observando qué diferencia se hace cero, tal como explica en la teoría:

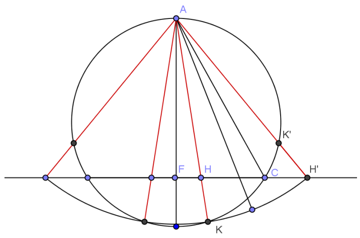


Ilustración 14 – Reproducción Figura 17ª Elaboración propia

> Para descubrir el nuevo sistema que puede darla, hagamos girar AH hacia H'; los puntos H, K se van acercando uno á otro hasta el C en que coinciden y HK=0, lo que no sucede con a, c, z, es decir, que solo b puede ser inversa; […].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 32)

Y comprueba que en efecto lo es:

> [...] y nos convenceremos de que en efecto lo es, atendiendo á que en el sistema primitivo era *AK=z+ b*, y en el transformado debe ser *AK'=z-b*, Luego en la ecuación fundamental (I) cambiaremos el signo de *b*, ó el de *z* que es lo mismo, y es claro queasi rectificada da con signo positivo el 2º valor de *z*
>
> (Zorraquín, 1819, p. 32)

El autor no hace el cambio que dice, pero en efecto si cambiamos *b* por *-b* en la ecuación (I) obtenemos $-bz = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2$, cuyas soluciones son $z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}$, la positiva es, en valor absoluto, igual a la negativa de la ecuación (I).

Obsérvese la belleza del razonamiento, que por otra parte nos da una solución geométrica que a priori no habríamos considerado al encontrarse el punto H, en que queda dividida la cuerda tal como se pide, fuera de la circunferencia.

Seguidamente da la interpretación geométrica de esta nueva solución.

> Este debe ser *AH' =AK*, porque según su expresión analítica excede al 1° que es *AH* en la cantidad b, y ademas las condiciones del Problema no precisan á tomarla dentro del círculo; por la misma razón será *K' H' =b*.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 33)

Termina diciendo que si a la izquierda se hace la misma construcción se obtienen otras dos soluciones válidas, por lo que busca la ecuación que de las cuatro. Para ello hace *FH=y*, de donde $y^2 = z^2 - c^2$, y obtiene $y = \pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}\right)^2 - c^2}$, que contiene las cuatro soluciones (p. 33).

Por último añade que lo que acaba de explicar sirve también en el supuesto de que haya raíces positivas y negativas, en cuyo caso la interpretación es la siguiente:

> [...] el caso en que la incógnita tenga varios valores unos positivos, y otros negativos. Los I^{os} podrán satisfacer realmente á la cuestión propuesta; los 2os ó indicarán lo que acabamos de manifestar ó pueden provenir de que las transformaciones algebraicas han introducido algunas raices insignificantes con las positivas, las solas que pueden dar una solución completa y directa.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 30)

Pone como ejemplo el problema II (*Averiguar la relación que tienen los tres lados a, b, c, de un triángulo con el radio r del círculo circunscrito*) en el que el radio se obtiene de una ecuación de segundo grado de la que solo considera la solución positiva ya que "la raíz negativa nada significa, pues un círculo ni puede tener dos radios, ni uno negativo" (Zorraquín, 1819, p. 30).

Continúa estudiando un nuevo tipo de problemas, que son aquellos en que lo que hay que determinar es "la distancia de un punto desconocido al origen", en los que las soluciones se encuentran sobre una recta. Explica en primer lugar cómo construir las soluciones negativas en este caso, valiéndose de nuevo de un problema: *Se pide determinar sobre la recta AB un punto C con ciertas condiciones.*

Comienza fijando un punto de referencia, "el origen":

> Supongamos que después de haber escogido un punto fijo *D* que llamaremos *origen,* y de haber tomado por incógnita la distancia del que se pide al origen contada hacia B, resulte una solución negativa, cuyo significado se busca.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 42)

Tras esto explica cómo construirla y por qué, así:

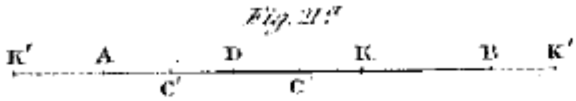


Ilustración 15 – Figura 21ª. Lámina 1

No sabiéndose de antemano si *C* debe caer á la derecha óá la izquierda de *D* como en *C'*, en este caso *DC'* será dada por una solución negativa, porque el sistema *DB* sobre que se ha establecido el razonamiento es indirectamente correlativo con el verdadero *DA*; en efecto en aquel es *DC=AC-DA*, y en este *DC'=DA-AC'* (Fig. 21ª), y en la ecuación *X=0* habrá una cantidad inversa, que dará al resultado el signo negativo: luego obtendremos la solución efectiva tomando la cantidad absoluta hallada para la incógnita en sentido opuesto al de la hipótesis. Lo mismo sucede cuando hay raices negativas acompañadas de positivas; estas dan directamente las distancias y las otras al lado opuesto, [...].

(Zorraquín, 1819, p. 42)

Y concluye de manera general:

Luego por regla general, *siempre que el objeto de un Problema sea determinar la distancia de un punto desconocido al origen, debe suprimirse el signo de las soluciones negativas, y tomar las cantidades absolutas en sentido contrario al supuesto en la ecuación primitiva*.

(Zorraquín, 1819, p. 42)

Podemos ver un ejemplo de cómo un cambio en el origen convierte a todas las soluciones en positivas en el problema X, -que sirvió para introducir las cantidades directas e indirectas-, que resuelve de nuevo.

En este caso toma como origen un punto *O* sobre *BC*, exterior a cualquier triángulo, *x=DO* y *CO=d;* obteniendo la ecuación $c^2-(a+d-x)^2=b^2-(x-d)^2$... (I') y como solución $x=d+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ que siempre es positiva, sea como sea el triángulo considerado, e independientemente de que la altura caiga fuera o dentro del mismo. Y explica el porqué de la diferencia entre la nueva ecuación (I') y la obtenida con anterioridad $a^2+b^2-2ax=c^2$... (I), que no es más que la elección de la incógnita, que en un caso representa una cantidad inversa y en el otro no (Zorraquín, 1819, p. 46).

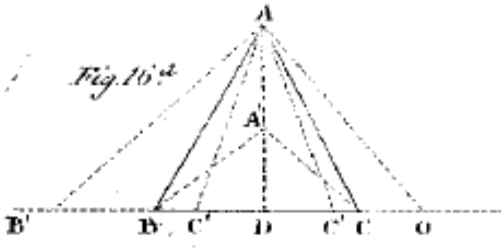


Ilustración 16 – Figura 16ª. Lámina 1

> La diferencia entre la fórmula (I') y la (I) está en que en la (I') se ha tomado por incógnita una cantidad constante que por lo tanto no puede mudar de signo y en la (I) *x* representa una cantidad inversa, que aun cuándo existe también en la (I') pero va precedida de *d* cuyo signo será él del resultado; [...].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 46)

Termina el tema, y con él la sección dedicada a la *Análisis Determinada,* con un problema en el que las soluciones son números complejos (ZORRAQUÍN, 1819, p. 48).

> XVII. Dada una recta *AB* hallar en que punto de ella se verifica que el producto de sus distancias á los *A, B* es igual á una cantidad dada m^2.
> Sea *K* el punto pedido, *AB=a, AK= x, BK=a-x;*

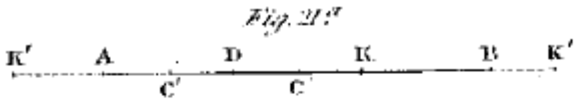


Ilustración 17 – Figura 21ª. Lámina 1

> la condición es $x(a - x) = m^2$.... (I) y $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$: si $m > \frac{1}{2}a$, las raíces son imaginarias [...].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 47)

Una vez que ha obtenido las raíces imaginarias, las interpreta geométricamente y busca una nueva ecuación que las dé reales:

> y el punto no puede estar entré A y B; (...) supongámosle en *K'*,
> y será $x(x - a) = m^2$.... (2) ; $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$; [...].
>
> (Zorraquín, 1819, p. 47)

En este caso ya las raíces salen reales y explica por qué antes habíamos obtenido que el problema no tenía solución en ciertos casos diciendo que "el absurdo de la (I) provenía de la contradicción entre la hipótesis del razonamiento y las condiciones del Problema" (p. 47). Obsérvese que esto es cierto si suponemos que utiliza el término recta *AB* en el sentido de segmento. Termina el problema, como siempre, explicando cómo se construyen las soluciones:

> [...] los valores de x en la (2) se construyen como los de (3, n. 14)[5]; el uno da el punto K' y el otro el K'' tal que $AK''=-BK'$: mientras x represente las distancias del punto á A los dos serán de signo contrario pues que deberán caer á uno y otro lado.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 47)

Y por último explica la diferencia entre las soluciones negativas y las complejas:

> Esté ej. hace evidente la diferencia qué hay entre las raíces negativas é imaginarias; para que éstas resuelvan la cuestión no basta mudar sencillamente el signo de la incógnita de + en -, es menester ademas reemplazarle por otro imaginario, ómas bien, no es solo el signo de la incógnita el que hay que mudar, sino el de una potencia ó función suya masó menos complicada: así poniendo en el valor de x deducido de la (I) ó por mejor decir en esta misma -(a -x) por +(a- x) hemos hallado la (2), y transformada de este modo hemos buscado su significación.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 48)

ANÁLISIS INDETERMINADA

Como señalamos en la introducción podemos encontrar en la *Geometría Analítica* de Zorraquín también una geometría similar a la actual, basada en el concepto de lugar geométrico y en la que se utilizan sistemas de coordenadas.

Considera tanto las coordenadas cartesianas como como las polares:

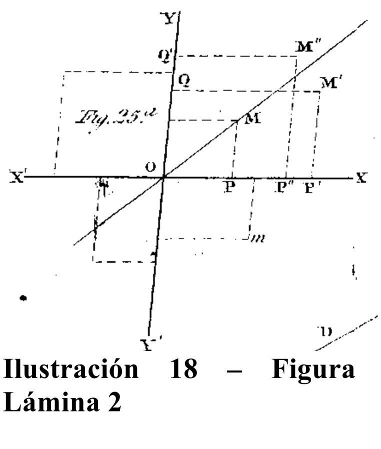


Ilustración 18 – Figura 25ª. Lámina 2

> Sean *XX', YY'* dos rectas prolongadas indefinidamente llamadas *ejes coordenados*, ó de *las coordenadas*: la 1ª el de las *abscisas*, y la 2ª el de las *ordenadas*, que se cortan en el origen O. Si se sabe que un punto *M* situado en su plano dista del eje *OX* la cantidad *MP* tomada paralelamente á*OY*, y de éste a *MQ* contada del mismo modo respecto del *OX*, no hay duda en que haciendo *OQ=MP* ,*OP=MQ*, y tirando las paralelas *PM, QM* á las *OY, OX*, quedará determinada la posición de dicho punto, pues estará en su intersección.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 50)

5 Referencia insertada en el texto, se refiere a uno de los ejemplos desarrollados cuando explica teóricamente la construcción de las fórmulas.

Como vemos no hace distinción si las coordenadas son rectangulares u oblicuas, pero más adelante, cuando explica como sitúa un punto en el plano y da los signos de la abscisa y la ordenada en cada cuadrante dice: "El ángulo de los ejes es regularmente recto, y como tal lo consideraremos en lo sucesivo". Aun así más adelante dará las ecuaciones para hacer un cambio de ejes rectangulares a oblicuos, y viceversa. Esto nos indica que, a pesar de que los ejes más utilizados son los primeros, aún no se había perdido el uso de coordenadas oblicuas.

Continúa dando las coordenadas de un punto cualquiera, que él llama "ecuaciones del punto", pues las da como $x=a$, $y=b$, y no como un par ordenado entre paréntesis como en la actualidad.

Como hemos dicho añade además la posición de un punto en coordenadas polares:

> 40. Para definirle puede también servir su distancia á otro *O* conocido de posición, que se llama *Polo*, y el ángulo que aquella forma con una recta dada en el plano de los ejes, como la *OX* ; asi
>
> $$r = c,\ \circlearrowleft = A^{\circ}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
>
> determinan el punto *M*, designando por *r* la longitud *OM*, por *c* su valor, y por A^{o} el número de grados del ángulo $\circlearrowleft$; á *r* se da el nombre de *radio vector*.
>
> (Zorraquín, 1819, p. 53)

Y como hemos comentado dará los cambios de coordenadas, tanto entre sistemas de coordenadas cartesianas, como de cartesianas a polares (Zorraquín, 1819, p. 74-80).

ECUACIONES DE LA RECTA

Zorraquín dedica un capítulo al estudio de la ecuación de primer grado. Comienza dando las formas más generales de esta ecuación: "42. La ecuación mas general de esta clase es $Ay+ Bx+ C=0$; resuelta respecto de y será (...) $y =ax + b$" (Zorraquín, 1819, p. 54).

Y tras interpretar el significado de a y b concluye que "la ecuación de primer grado entre dos variables representa una línea recta" (p.55). También da la interpretación de la pendiente de la recta en caso de que el "sistema sea rectangular"- tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje *OX*- y en el caso en que sea oblicuo, en el que $a$es la razón de los senos de los ángulos de la recta con los ejes coordenados (Zorraquín, 1819, p. 55).

En la obra podemos encontrar también la ecuación punto-pendiente, (a la que él no da nombre), $y - y' = a(x - x')$, y la ecuación de una recta conocidos dos puntos *(x', y'), (x'', y'')* de la que da dos versiones: $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$; $y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}$. (Zorraquín, 1819, p. 57-58).

Sin embargo no aparece el estudio contrario, es decir, dada una recta cualquiera, obtener su ecuación en relación a un sistema de coordenadas, estudio que sí aparece en otras obras de la época, como la de Lacroix, por ejemplo (Sánchez, 2015).

Sí se incluyen otras cuestiones relacionadas con la recta y el punto como son el cálculo del punto de corte de dos rectas, el ángulo que forman, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y la distancia entre dos puntos.

Además resuelve una serie de problemas utilizando este otro tipo de Geometría Analítica. El método es muy similar al utilizado en la actualidad, como veremos en el ejemplo que incluimos a continuación: "IV. Hallar el punto de intersección de las rectas *OM, CM', BM''* tiradas desde los vértices de un triángulo al medio de los lados opuestos" (Zorraquín, 1819, p. 67).

Obsérvese que lo que hay que calcular es el baricentro, punto de corte de las medianas de un triángulo. Considera como origen de coordenadas uno de los vértices del triángulo, calcula las ecuaciones de las medianas y las corta, tal como haríamos actualmente.

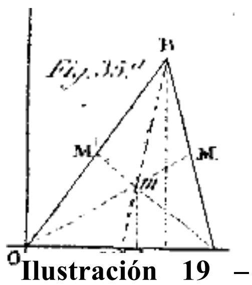


Ilustración 19 – Figura 35ª. Lámina 2

Sean *x', y'* las coordenadas de *B*; las de *M* son $\frac{b + x'}{2}, \frac{y'}{2}$ y las de *M'*, $\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}$; la ecuación de

OM sera $y = \frac{y'}{b + x'}x$ ... (*a*),

la de *CM'* $\quad y = \frac{y'}{2b - x'}(x - b)$...(*b*),

para la *BM''* que pasa por medio de *OC* es

$$y = \frac{2y'}{2x' - b}\left(x - \frac{b}{2}\right) .... (c)$$

Combinando las (*b* y *c*) con la (*a*) se halla el mismo valor de $x = \frac{b + x'}{3} = Oo$ que introducido en la (*a*) da $y = \frac{y'}{3} = mo$. Asi pues la intersección *m* se verifica á los $\frac{2}{3}$ de cada lado contados desde los vértices.

(Zorraquín, 1819, p. 68)

CONCLUSIONES

Como hemos visto Zorraquín nos presenta dos maneras diferentes de aplicar el Álgebra a la Geometría, o lo que es lo mismo dos tipos de Geometría Analítica, como él mismo denomina. La expuesta en segundo lugar, en la que utiliza sistemas de coordenadas, es similar en conceptos y metodología a la que se desarrolla actualmente, al menos en su nivel elemental.

La primera sin embargo utiliza conceptos y una metodología perdida en nuestros tiempos, con un gran componente geométrico y mezclando los métodos analíticos con los sintéticos. Zorraquín desarrolla este tipo de aplicación del Álgebra a la Geometría, especialmente la parte dedicada a las soluciones negativas, con rigor, definiendo todos los conceptos de manera formal. Para él éstas indican la existencia de un problema más general, cuyas soluciones se hallan sin más que cambiar el signo de la incógnita para obtener directamente la ecuación que lo resuelve. Esta concepción de las cantidades negativas, como el mismo autor señala es propia de Carnot, que tuvo gran influencia en la obra de Zorraquín.

De ahí la importancia de esta obra, junto con la de ser la primera que unificó las Geometrías Analítica y Descriptiva, punto que se hace efectivo en el estudio de la Geometría del espacio por lo que no queda patente en nuestro trabajo. Es muy razonable, por tanto, que se utilizara como texto en los estudios de Geometría Analítica, tanto en secundaria como en la Universidad, durante gran parte del siglo XIX.

BIBLIOGRAFÍA

Ausejo, E. (n.d.c) Zorraquín, Mariano. En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española.* Recuperado en junio de 2014 de <http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3427%3Azorraqu-mariano--1823&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67&showall=1>.

Boyer, C. B. (1987). *Historia de la Matemática.* Madrid. Alianza Editorial. S.A.

Descartes, R. (1637). *La Geometría*. Traducido por Pedro Rossell. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.

Escribano, J. J. (2000). Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española. Tesis doctoral. Universidad de la Rioja.

Sánchez, I. (2015). La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo XIX. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Smith, D. E; Latham, M. L. (1952). *The Geometry of René Descartes: Translated from de French and Latin, with a facsimil of the first edition, 1637.* Illinois: Open Court.

Zorraquín, M. (1819). *Geometría analítica-descriptiva*. En la oficina de Manuel Amigo.