

## O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO REVELADO AO LONGO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

**Eurivalda Santana**<sup>1</sup>

Universidade Estadual de Santa Cruz

**Tamiles Oliveira**<sup>2</sup>

Universidade Estadual de Santa Cruz

### RESUMO

Neste artigo temos como objetivo principal identificar e classificar os raciocínios revelados por estudantes, de final de ciclo do Ensino Fundamental (3<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup> e 9<sup>o</sup> anos) e do 2<sup>o</sup> ano do Ensino Médio, ao resolverem situações-problema que envolvam conceitos de Análise Combinatória. O estudo está embasado na Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente nas Estruturas Multiplicativas e considera resultados dos estudos de Piaget e Inhelder. A pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa de investigação, e o trabalho de campo desenvolveu-se com 577 estudantes de três escolas públicas. Para a coleta de dados foi utilizado um instrumento composto de situações-problema que envolvem conceitos de Análise Combinatória e, uma entrevista semiestruturada. A análise dos dados aponta a classificação de três níveis de raciocínio combinatório, a saber: Ausência de raciocínio; Indício de raciocínio; Presença de raciocínio.

**Palavras-chave:** Análise Combinatória. Raciocínio Combinatório. Educação Básica. Estruturas Multiplicativas.

### ABSTRACT

In this article we have as main objective to identify and classify the reasoning revealed by students, in the final of cycle elementary school (3<sup>rd</sup>, 5<sup>th</sup>, 7<sup>th</sup> and 9<sup>th</sup> grades) and the 2<sup>nd</sup> year of high school, to solve problem-situations involving concepts of Combinatorial Analysis. The study is based on the Theory of Conceptual Fields, mainly in

---

<sup>1</sup> [eurivalda@hotmail.com](mailto:eurivalda@hotmail.com)

<sup>2</sup> [tamilesos@hotmail.com](mailto:tamilesos@hotmail.com)

Multiplicative Structures and considers results of Piaget's and Inhelder's studies. The research is characterized by a qualitative approach of research and fieldwork developed with 577 students from three public schools. For data collection, an instrument with problem-situations involving concepts of Combinatorial Analysis was used and a semi-structured interview. The data analysis shows the classification of three levels of combinatorial reasoning, namely: lack of reasoning; evidence reasoning; presence of reasoning.

**Keywords:** Combinatorial Analysis. Combinatorial Reasoning. Basic Education. Structures Multiplicative.

## INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos de contagem de elementos de conjuntos. Pessoa e Borba (2009) salientam que

os métodos podem ser aplicados em diversas áreas, como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria da informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc. (PESSOA; BORBA, 2009, p.2)

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no que se refere à Análise Combinatória, orienta que este conteúdo seja apresentado com maior rigor, no 2º ano do Ensino Médio, ou seja, com a utilização de fórmulas, e com uma apresentação mais detalhada dos conceitos que a envolvem, no entanto ainda no Ensino Fundamental é possível “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolva combinações, arranjos, permutações e especialmente o princípio multiplicativo” (BRASIL, 1997, p.57).

Dentro deste contexto de orientações dadas pelo PCN, desenvolvemos um estudo que buscou investigar sobre o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo da Educação Básica<sup>i</sup>, no intuito de compreender como se revela esse raciocínio nos estudantes ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Este estudo teve como objetivo principal identificar e classificar os raciocínios que estudantes, de final de ciclo do Ensino Fundamental (3º, 5º, 7º e 9º anos) e do 2º ano do Ensino Médio, revelam ao resolverem situações-problema que envolvam conceitos de Análise Combinatória. Para dar suporte a este objetivo elencamos como questão de pesquisa: Quais são os raciocínios revelados por estudantes de final de ciclo do Ensino Fundamental (3º, 5º, 7º e 9º anos) e do 2º ano do Ensino Médio ao resolverem situações-problema que envolvam conceitos de Análise Combinatória?

## RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

De maneira ampla, podemos afirmar que Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas relacionadas a conjuntos finitos.

No Brasil a Análise Combinatória é estudada durante a Educação Básica no âmbito dos conceitos de permutação, arranjo e combinação. Contudo, não podemos deixar de considerar que vários outros tipos de conceitos, como o princípio das gavetas de Dirichlet, são conceitos de Análise Combinatória, mas em geral, não são abordados nesse nível de ensino.

Para resolver as situações-problema de combinatória é preciso que se tenha compreensão plena da situação apresentada e, nesta perspectiva, não é possível apenas focar o uso de fórmulas de forma mecânica sem envolver o estudante numa análise detalhada da situação de modo a trabalhar o raciocínio combinatório. Mas, o que entendemos como raciocínio combinatório?

Como o raciocínio pode ser concebido como um modo de se fazer encadeamento de juízos ou pensamentos, ao nos referirmos ao raciocínio combinatório estamos nos circunscrevendo ao encadeamento de pensamentos que nos possibilitam analisar estruturas e relações discretas relacionadas a conjuntos finitos. Neste artigo, buscamos identificar o encadeamento de pensamentos combinatórios ao observarmos as resoluções de situações-problema que são construídas pelos estudantes.

Algumas pesquisas, como as de Meneghetti e Dutra (2012), Pessoa e Silva (2012) enfatizam a importância de explorar o raciocínio combinatório dos estudantes. Nesta mesma linha Pessoa e Borba (2010, p. 2) assume o raciocínio combinatório como “um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto”.

Na mesma perspectiva podemos apontar os estudos de Piaget e Inhelder (1951, p.294) que mostram três fases de desenvolvimento da ideia de acaso peculiar das crianças: ausência de operações propriamente ditas; construção dos agrupamentos operatórios utilizando um plano concreto; o pensamento formal nascente que permite a descoberta de alguns sistemas combinatórios completos por um pequeno número de elementos. Para estes autores:

[...] seria preciso considerar o acaso como parte complementar da composição lógica, não podendo ser, por conseguinte, compreendido senão depois de constituídas as operações reversíveis e por comparação a elas. E neste caso, a probabilidade constituiria, [...] uma assimilação do acaso às operações combinatórias: é a própria mistura e seu conjunto, por não mais poder deduzir sem cada interferência, que o mecanismo operatório reconstruiria desde a redução depois de casos reais, à totalidade das combinações possíveis. (PIAGET; INHELDER, 1951, p.14)

Os estudos de Piaget e Inhelder (1951) indicam que para chegar à fase na qual a criança inicia a descoberta de sistemas combinatórios completo, ou seja, para que ocorra a evolução do raciocínio combinatório, é necessária a compreensão das operações reversíveis e a comparação entre elas, desvelando-se na constituição da probabilidade como a assimilação do acaso como operações combinatórias. Matematicamente essas operações estão imbuídas do raciocínio multiplicativo.

A análise combinatória está diretamente ligada ao raciocínio multiplicativo. Dessa forma, a combinatória refere-se a contar subconjuntos, sem necessariamente contar um a um, mas utilizando métodos de contagem. Esses subconjuntos podem ser formados, a partir de um ou mais conjuntos. Quando se trata de um conjunto, a situação-problema pode envolver os conceitos de combinação, arranjo ou permutação. Se trabalharmos com mais de um conjunto, estaremos falando do conceito de produto cartesiano.

Duro (2012) em sua dissertação de mestrado estudou como se dá a construção do pensamento combinatório em alunos do Ensino Médio, e chegou a constar a existência de três níveis de pensamento:

Sujeitos do Nível I não sistematizam seu pensamento. Derrapam em contradições e permanecem indiferentes a elas. Constroem combinações aleatórias, tornando impossível a construção dos possíveis mesmo que em concretude. Pequenas sistematizações sobre o real aparecem como estrutura de pensamento dos sujeitos do Nível II. A combinação dos elementos foi construída, mas não estendida a uma lei geral. No momento em que os sujeitos passam a utilizar-se dessa nova organização sistemática, em busca de uma formalização que leve a solucionar qualquer problema semelhante, os consideramos pertencentes ao Nível III. (DURO, 2012, p.100).

Os estudos de Piaget e Inhelder (1951) foram realizados com crianças de até 12 anos de idade, e os estudos de Duro (2012) foram realizados com adultos. Mesmo com diferentes faixas etárias é possível observar três níveis básicos de construção do

raciocínio combinatório que vai desde a ausência de indícios desse raciocínio, passando por um nível intermediário no qual se constata alguns indícios desse raciocínio, chegando ao último nível que se configura na existência desse raciocínio. Outro fator que precisamos destacar é que de um nível para outro existem vários subníveis que vão tornando possível a passagem para o nível seguinte.

Nesta pesquisa, buscamos construir situações nas quais fosse possível identificar a construção do raciocínio combinatório, por meio dos esquemas apresentados pelos estudantes em sua resolução. Além disso, que estas situações dessem conta do conceito a ser trabalhado, dos invariantes operatórios inerentes ao conceito, bem como das representações que podem ser utilizadas na resolução, para isso nos aportamos na Teoria dos Campos Conceituais.

## **A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CONHECIMENTO IMPLÍCITO E EXPLÍCITO**

Pesquisas em Educação Matemática como as de Pessoa e Borba (2009), Miguel e Magina (2003) e Moro e Soares (2006) têm utilizado a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Essa teoria traz a ideia de que o conhecimento está dividido em Campos Conceituais, e que só é possível adquiri-lo através do domínio destes Campos. A definição de um Campo Conceitual que estamos adotando é a de:

[...]Um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 2012, p.8. Tradução nossa).

O domínio de um Campo Conceitual necessita de um longo período de tempo para que seja completo e, para isso, é necessário confrontar o estudante com situações que envolvam esses conceitos. A situação por sua vez é qualquer tarefa designada pelo professor, a saber: lista de exercícios, um jogo, situações-problema, entre outras atividades que podem ser propostas. Em um Campo Conceitual existem diversos tipos de situações, e uma única situação envolve diferentes conceitos.

Um conceito é formado por um conjunto de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas. Os invariantes operatórios são as relações, operações e propriedades referentes ao conceito e, que podem ser mobilizados pelos estudantes para encontrar a solução de uma dada situação. As representações simbólicas são usadas para registrar os invariantes operatórios, por exemplo, gráficos, sentenças matemáticas, diagramas, dentre outros.

Podemos nos referir a diferentes Campos Conceituais, mas o foco desta pesquisa é o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, pois abordamos situações que envolvem conceitos de análise combinatória que envolve o raciocínio multiplicativo.

O Campo Conceitual Multiplicativo, ou simplesmente Estrutura Multiplicativa pode ser definido como um conjunto de situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos, representações e registros simbólicos, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros e interligados durante o período de aquisição. Entre os conceitos podemos destacar: as funções lineares e não lineares, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e a divisão.

Magina, Santos e Merlini (2010, 2012) baseados na TCC e a partir dos resultados de pesquisa realizada por eles, apresentam uma abordagem detalhada para conceitos envolvidos no Campo Multiplicativo, identificando a razão, 4ª proporcional, combinação, relação um para muitos, divisão como partição, divisão como cota, entre outros, considerando que eles podem ser trabalhados dentro de situações de proporcionalidade simples, comparação multiplicativa, produto cartesiano, e pode, ainda, haver misturas entre essas situações, gerando situações-problema como as de proporção múltiplas. Tendo em vista a grande variedade de conceitos envolvidos nesse Campo Conceitual, ele faz parte de um conhecimento que o estudante adquirirá a médio e longo prazo, devendo, por isso, ser trabalhado ao longo de todos os anos do Ensino Fundamental, adentrando pelo Ensino Médio e Superior.

Na TCC o esquema apresentado pelos estudantes é “[...] toda organização invariante da conduta para uma dada classe de situações” (VERGNAUD, 1990 *apud* SANTANA, 2012, p.34). Partindo dessa afirmação, podemos dizer que um esquema

envolve certa manipulação de conceitos e, dessa forma, o sujeito passa a ter domínio e compreensão, para solucionar determinada classe de situações. Além disso, nos esquemas podemos encontrar os invariantes operatórios, bem como os registros simbólicos referentes a um determinado conceito, essas manipulações quando realizadas de maneira correta conduzem a aprendizagem.

Quando abordamos a aprendizagem, aportada na TCC, se faz necessário falar em relação à aprendizagem de crianças e à aprendizagem de adultos. Nas crianças e nos adolescentes, a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo acontecem de forma conjunta, podemos dizer que lado a lado. E quando se analisa a aprendizagem de adultos, é preciso levar em consideração que as rupturas são vistas de uma forma que envolve os hábitos e as tendências do pensamento, e não apenas a ordem do desenvolvimento do aparelho psíquico.

Em relação ao conhecimento, Vergnaud (1996) o entende tanto como o saber fazer quanto como os saberes envolvidos. Segundo o autor, quando confrontamos os estudantes com novas situações, eles utilizam os conhecimentos adquiridos em suas experiências passadas, quando estavam com situações mais simples e mais familiares, e tentam adaptá-las às novas situações (VERGNAUD, 1988a, p.141).

Para este autor, o conhecimento pode ser apresentado de maneira explícita ou de maneira implícita.

O conhecimento dos estudantes pode ser explícito, no sentido que eles podem expressá-lo de forma simbólica (língua natural, esquemas e diagramas, sentenças formais, etc.). Seu conhecimento pode ser implícito, no sentido que eles podem usá-lo na ação, escolhendo as operações adequadas, sem serem capazes de expressar as razões para esta adequação (VERGNAUD, 1988a, p.141. Tradução nossa).

É possível reconhecer, por exemplo, a forma explícita através da linguagem natural ou do uso de diagramas, dentre outras formas. A forma implícita é mais difícil de ser detectada, pois está contida na ação do estudante e nas relações de pensamento estabelecidas por ele.

Na Figura 1 podemos observar o esquema de resolução apresentado por um estudante do 2º ano do Ensino Médio:



**Figura 1:** Resolução dada pelo estudante E1 na situação-problema 3

**Problema 3.** Márcia pode formar 20 conjuntos diferentes combinando blusa e calça. Sabemos que ela tem 5 blusas diferentes, quantas calças diferentes ela tem?

Resolução

$$b \times c = 20$$

$$5 \times c = 20$$

$$20 \div 5 = 4$$

$$c = 4$$

Resposta   4  

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Analisando o registro apresentado na Figura 1, intuímos que o estudante conheça o conceito e propriedades operatórias inerentes à equação do 1º grau. Podemos identificar, por exemplo, a existência de conhecimentos explícitos, quando o estudante monta a equação corretamente colocando  $b \times c = 20$ , nessa organização fica evidente a compreensão do estudante sobre a multiplicação da quantidade de blusas pela quantidade de calças que tem vinte como produto, ou seja, a quantidade de conjuntos é igual a quantidade de blusas vezes a quantidade de calças, além disso, como é apresentada na situação a quantidade de blusas, a troca de  $b$  pelo valor numérico 5 é realizada imediatamente. Essa organização traz a ideia de que o estudante conheça os mecanismos que lhe permitem montar e solucionar a situação de maneira correta. Observe que o estudante coloca de maneira explícita: o conhecimento de regras do algoritmo da equação de 1º grau que estão relacionadas com as propriedades de igualdade; e, o conhecimento do algoritmo das operações de multiplicação e de divisão com números naturais. Fica explícita a existência de conhecimentos que o levaram a manipular esses dispositivos algorítmicos de maneira correta.

Todavia, quando nos referimos aos conhecimentos implícitos que podemos identificar nesse esquema, os parâmetros de análise se tornam mais subjetivos, pois não é possível nos apoiar em evidências registradas no esquema do estudante para elencar tais conhecimentos. Por exemplo, observe que não podemos afirmar quais

conhecimentos foram mobilizados pelo estudante para fazer a escolha da equação de 1º grau para a resolução da situação. Além disso, ao entrevistar o estudante, indagamos sobre os motivos que o levaram a escolher a equação do 1º grau para resolver a situação, mas ele não conseguiu explicitar que conhecimentos o conduziram a referida escolha.

O exemplo apresentado na Figura 1 evidencia a presença de conhecimentos explícitos e implícitos num mesmo esquema de resolução.

## **METODOLOGIA**

Este estudo tem caráter descritivo, no qual se está “interessado em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los” (RUDIO, 1992, p.56). Estas ideias podem ser complementadas com as colocações de Gil (2002) quando enfatiza que tal método “tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis”. Gil (2002, p.42). Isto implica em dizer que não há interferência do pesquisador no que tange a promover a aprendizagem dos estudantes sobre o conteúdo estudado.

Para tanto, realizamos duas fases de estudo, ambas de caráter descritivo, por meio do qual classificamos os tipos de raciocínios que estudantes do 3º, 5º, 7º e 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio apresentam ao resolverem situações-problema que envolvam conceitos de Análise Combinatória.

O campo de pesquisa foram três escolas públicas, localizadas no Sul da Bahia, nas cidades de Itabuna e São José da Vitória. O público alvo foram estudantes do Ensino Fundamental I (3º e 5º ano), Ensino Fundamental II (7º e 9º ano) e Ensino Médio (2º ano), totalizando 577 estudantes. Estas escolas foram escolhidas por atender os níveis escolares, e principalmente por ter fácil acesso e permissão da direção para a realização da pesquisa.

Como foi supracitado o nosso estudo foi dividido em duas fases:

- Fase 1: compreendeu a elaboração e aplicação do instrumento diagnóstico.

Esta Fase foi composta por três momentos distintos: elaboração do instrumento diagnóstico; aplicação do instrumento; e, correção dos protocolos de pesquisa (instrumentos respondidos).

No primeiro momento, baseados na Teoria dos Campos Conceituais, elaboramos um instrumento diagnóstico, no âmbito do grupo de pesquisa que desenvolvia o estudo. O instrumento era composto por cinco situações-problema, cada uma envolvendo um conceito específico de Análise Combinatória, a saber, duas de produto cartesiano, uma de combinação, uma de arranjo e uma de permutação. O Quadro 1 abaixo apresenta as situações-problema do instrumento diagnóstico.

**Quadro 1** - Instrumento diagnóstico

Situação-Problema	Conceito de Análise Combinatória
1 – Na competição de natação do Clube dos Amigos, Ana, Carol, Francisco, Joana e Léo disputam o 1º, 2º e 3º lugar do pódio. De quantas maneiras diferentes esse pódio pode ser formado?	Arranjo
2 – Ciro comprou 4 balas de sabores diferentes: uma de limão, uma de menta, uma de uva e uma de coco. Ele pediu para que sua amiga Isa escolhesse e pegasse duas dessas balas. De quantas maneiras diferentes ela poderia escolher essas duas balas?	Combinação
3 – Márcia pode formar 20 conjuntos diferentes combinando blusa e calça. Sabemos que ela tem 5 blusas diferentes, quantas calças diferentes ela tem?	Produto Cartesiano buscando uma das partes
4 – Lucas precisa criar uma senha para acessar um jogo na internet, porém a senha só pode ter as letras A, B, C e o número 1. De quantas maneiras diferentes ele pode criar sua senha com as 3 letras e o número, sem que haja repetições?	Permutação
5 – Um parque de diversão tem 3 entradas e 6 saídas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do parque?	Produto Cartesiano buscando o todo

No segundo momento o instrumento foi aplicado com os estudantes das três escolas, utilizamos o mesmo procedimento em ambas as instituições. O instrumento foi aplicado com 25 turmas no total.

No momento de aplicação foi feita a leitura de cada situação-problema em voz alta, sem fazer entonação de voz, que desse margem a interpretação da mesma. Em seguida, estabelecemos o tempo máximo de uma hora, para que pudessem responder as situações.

De posse dos protocolos de pesquisa, iniciamos o terceiro momento da Fase1, corrigindo os instrumentos e criando categorias para os tipos de raciocínios identificados, fizemos uma análise quantitativa e qualitativa desses dados. Por fim, selecionamos 10% dos protocolos para uma entrevista. Com os seguintes critérios de seleção, protocolos que: apresentassem esquemas de resolução, nos quais não estava evidente o tipo de raciocínio utilizado; e, que exemplificavam as categorias elencadas pelos pesquisadores. Estes critérios foram elencados buscando a validação das descrições dos tipos de raciocínio feitas pelos pesquisadores.

- Fase 2: compreendeu a entrevista e sua análise.

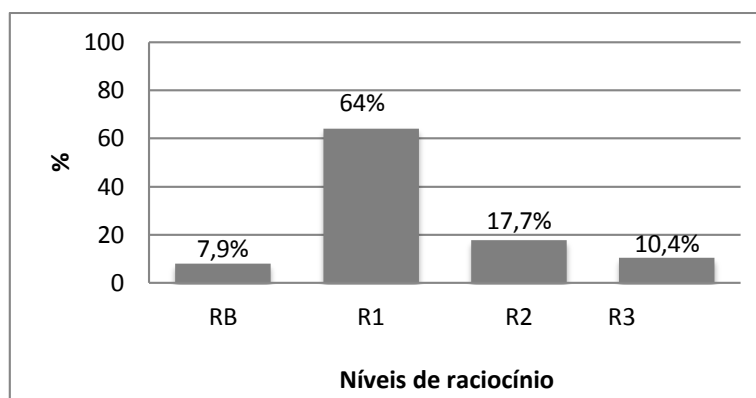
Esta fase foi composta por dois momentos: entrevista semiestruturada e análise da entrevista. O principal objetivo da entrevista semiestruturada foi de elucidar as ações utilizadas pelos estudantes no desenvolvimento de seus esquemas de resolução e, identificar evidências para validação dos tipos de raciocínios identificados pelos pesquisadores.

De posse dos 10% protocolos, a entrevista foi realizada por dois pesquisadores, sendo que os estudantes foram entrevistados individualmente, no dia e horário agendado por cada escola. Na sequência as entrevistas foram transcritas e analisadas no âmbito do grupo de pesquisa.

## **ANALISANDO E DISCUTINDO OS DADOS**

Analisando os esquemas apresentados pelos 577 estudantes, ao resolverem as situações-problema propostas, foi possível classificar três níveis de raciocínio combinatório, a saber: Ausência de raciocínio (R1); Indício de raciocínio (R2); Presença de raciocínio (R3). Além dos três níveis, classificamos a falta da resolução e resposta como Resposta em Branco (RB), pois essa falta impossibilitou inferir sobre qual foi o tipo de raciocínio utilizado pelo estudante para deixar sem resposta.

A Figura 2 exibe o percentual de cada nível de raciocínio classificado a partir dos esquemas apresentados pelos estudantes.

**Figura 2:** Percentual dos níveis de raciocínio apresentado pelos estudantes

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Conforme a Figura, os resultados apresentam 64% dos esquemas utilizados pelos estudantes indicando a Ausência de Raciocínio Combinatório – (R1): neste nível foram classificados os raciocínios, que para nós pesquisadoras, não apresentavam relação com o raciocínio combinatório. Foram os esquemas em que: o estudante adicionava ou subtraía os dados contidos na situação; repetiam os dados da situação como resposta final; desenhavam as informações contidas nas situações sem realizar uma sistematização com essas informações representadas; apresentavam desenhos que não conseguimos identificar uma relação com a situação proposta.

A Figura 3 apresenta um exemplo dos esquemas que foram classificados no nível Ausência de Raciocínio Combinatório. A resolução foi registrada pelo estudante E2 que estava cursando o 9º ano do Ensino Fundamental.

A situação tem foco no conceito de arranjo e usa como contexto a formação de um pódio disputado por cinco competidores. Observando na Figura 3, o esquema registrado pelo estudante E2, destaca-se o desenho de um pódio com cinco lugares ocupados com o nome dos competidores apresentados na situação e, acima do pódio a indicação que Ana ficou em primeiro lugar e Joana no segundo, deixando como resposta: 40 pontos.

**Figura 3:** Resolução dada pelo estudante E1 na situação-problema 1

**Problema 1.** Na competição de natação do Clube dos Amigos, Ana, Carol, Francisco, Joana e Léo disputam o 1º, 2º e 3º lugar do pódio. De quantas maneiras diferentes esse pódio pode ser formado?

**Resolução**

As ganhadeiras em números foi Ana  
em segundo lugar foi Carol  
em terceiro lugar foi Francisco

na primeira etapa Ana fez 5 e 10 pontos,  
na segunda etapa Carol 8 e 2 pontos,  
na terceira etapa foi Francisco, 5 e 2 pontos,  
e em 4 e 5 lugar ficou Joana e Léo, 4 pontos

Resposta 40 maneiras

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A princípio compreendemos que representou com desenho a situação dada e não sistematizou a resolução. Ao entrevistar ficou evidente a Ausência de Raciocínio Combinatório, segue a transcrição da entrevista:

No início da entrevista a pesquisadora mostrou o instrumento respondido por, fez a leitura da situação-problema 1 e perguntou ao estudante:

Pii: Você se lembra desta atividade que fizemos?

E2: Hummmm. Lembro.

P: Bom, essa é a primeira situação. Lembra como pensou para responder?

E2: É para eu explicar como respondi?

P: você quer ler para lembrar?

E2: eu li aqui que primeiro e segundo e terceiro lugar, e daí eu fiz isso aqui. (Indicando o desenho feito na primeira situação).

P: Como foi que você chegou a isso aqui? (Indicando o desenho feito na primeira situação).

E2: eu fui dando ponto. E daí fui fazendo a somatória...aí coloquei cada um em uma escadinha, cada pessoa, cada nome, coloquei primeiro, segundo e terceiro lugar.

P: como foi que você foi dando ponto a cada um deles? Você lembra?

E2: eu imaginei que eles estavam fazendo uma maratona.

P: hum.

E2: aí eu coloquei assim. No dia a mulher falou para nós respondermos do jeito que sabíamos... daí coloquei o que veio na mente.

P: como foi que veio?

E2: o raciocínio?

P: sim.

E2: eu ia fazer outra coisa, assisto muito essas coisas que passa na televisão de futebol. Fui desenvolvendo assim no papel. Coloquei o pódio com todos os vencedores e depois os pontos.

P: como foi que você selecionou os vencedores? Quais são os vencedores para você?

E2: Ana em primeiro, porque é o nome de minha mãe, daí coloquei em primeiro, Carol e Francisco, fui colocando os outros, o quarto e quinto.

P: você imaginou uma competição com duas etapas, não foi isso?

E2: sim.

Nas colocações feitas por E2 é possível identificar a Ausência de Raciocínio Combinatório – (R1), principalmente quando o próprio E2 se refere ao raciocínio como a ideia que veio à mente dele e afirma que, o mesmo, é oriundo de suas experiências como telespectador de programas esportivos. Além disso, utiliza a coincidência do nome de sua mãe, que se configura num contexto particular de seu cotidiano, para distribuir os nomes no pódio. E2 faz uma distribuição não sistemática.

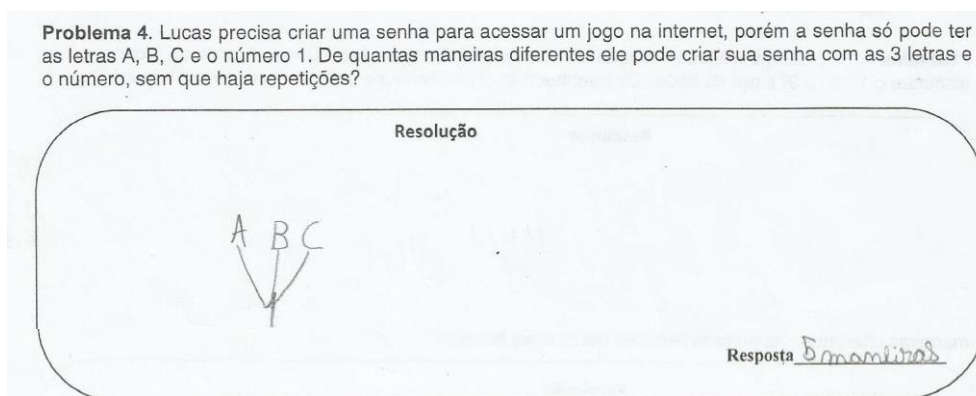
Nos estudos de Piaget e Inhelder (1951, p. 275) encontramos resultados semelhantes, contudo com crianças na faixa etária de sete a oito anos, quando o autor investiga a respeito das operações de arranjo e considera que as crianças do primeiro estágio “[...] procedem por simples tentativa, sem suspeitar da existência de um sistema”. Para Piaget e Inhelder (1951, p. 271) em relação às operações de arranjo é “[...] por volta dos 11-12 anos em média, as operações são efetuadas sistematicamente e os arranjos fortuitos concebidos [...]”. Comparando o raciocínio apresentado por E2 com os resultados apresentados pelo autor é possível constatar a ausência de um raciocínio que permita E2 compreender as operações de arranjo necessárias para a sistematização e consequente formação do pódio, outro fato é a distância da faixa etária, pois E2 tinha 13 anos, idade que se refere ao terceiro estágio estabelecido por Piaget e Inhelder. Dentro deste contexto, inferimos que E2 encontra-se no primeiro estágio definido por Piaget e Inhelder, e, em nossa classificação no nível R1 que configura a Ausência de Raciocínio Combinatório.

Observando os resultados apresentados na Figura 2, o segundo nível de raciocínio apresentado pelos estudantes foi o Indício de Raciocínio Combinatório – (R2) com 17,7% dos esquemas dos estudantes apresentando este raciocínio. Neste

nível foram classificados os raciocínios que apresentavam as possibilidades de um determinado evento acontecer, sendo que alguns sem conseguir esgotá-los. Eram listadas algumas possibilidades, mas não eram concluídas as possibilidades em seu total. Houve estudantes que listaram as possibilidades corretamente e outros que listaram incorretamente.

A Figura 4 exemplifica R2 com a resolução dada pelo estudante que estava cursando o 5º ano do Ensino Fundamental.

**Figura 4:** Registro da resolução do estudante E3na situação-problema 4



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Figura 4 apresenta uma situação que envolve o conceito de permutação. Observa-se que registra uma representação que nos remete a um diagrama de árvore, mas apenas inicia esse registro e não chega a esgotar as possibilidades para a determinação das senhas. Apresenta como resposta 5 maneiras, contudo não nos deixa evidente como chegou a esse quantitativo. Este esquema nos conduziu a buscar compreender a existência ou não de Raciocínio Combinatório a partir do registro feito.

A entrevista feita com o estudante possibilitou compreender melhor o esquema mobilizado por ele, na resolução. Segue a transcrição da entrevista.

A pesquisadora mostra o instrumento respondido pelo estudante E3, lê a situação-problema e pergunta:

P: Você respondeu 5 maneiras, como pensou para encontrar essas maneiras?

E3: Ah, são 3 tipos de letras, né?

P: isso mesmo.



E3: Aí fica CAB1, 1BAC, BAC1, 1CAB. Eu falei 1ABC?

P: Vamos anotar no papel as maneiras que você está falando.

(Então, fala novamente e a pesquisadora faz as anotações.)

E3: ABC1, CAB1, ABC1, ACB1, BCA1. A outra eu não me lembro. Parece que é BAC1.

P: E essas são todas as maneiras?

E3: Deixa eu ver. (para e pensa.)

P: Tem mais alguma maneira?

E3: Eu acho que tem. Eu vou tentar fazer mais uma. (O estudante analisa as possibilidades que ele listou e diz:)

E3: Tem mais uma possibilidade: BC1A.

P: E você acha que tem outra maneira?

E3: Tem várias maneiras de fazer.

P: E você saberia dizer quantas maneiras?

E3: Se for contar com essas que eu já fiz, vai dar muito mesmo. Eu só fiz essas porque ia demorar muito para fazer todas.

P: Ah, é? Então tem mais?

E3: Tem. Era pra eu ter colocado as letras etc e etc.

Ao ser questionado sobre como pensou para determinar as cinco maneiras, evidencia uma listagem de cinco permutações (CAB1, 1BAC, BAC1, 1CAB e 1ABC), em seguida a pesquisadora convida a anotar essa listagem, mas faz uma listagem inserindo três novas permutações (ABC1, ACB1 e BCA1) e deixa de listar três das colocadas anteriormente (1BAC, 1CAB e 1ABC). Nesse contexto, apresentou algumas possibilidades para a construção das senhas. Quando questionado sobre a existência de outras possibilidades para a construção da senha, confirmou que existem várias maneiras, mas que não fez todas porque demoraria muito. Apesar de reconhecer a possibilidade de ter outras possibilidades de construção das permutações, o estudante não consegue lista-las e sistematizar a construção das mesmas. Estas afirmativas nos permitiram concluir que não conseguia esgotar as possibilidades para a construção da senha. Esquemas como os feitos por nós possibilitou inferir sobre a existência no nível intermediário, no qual existe Indício de Raciocínio Combinatório – (R2).

Estes resultados corroboram com os encontrados em estudos como os de Piaget e Inhelder (1951) que pesquisou apenas com crianças na faixa etária de 4 a 12 anos e, os estudos de Duro (2012) que pesquisou adultos que estavam cursando o

Ensino Médio e que estavam na faixa etária entre 14 e 47 anos. Ambos os estudos confirmam a existência do nível intermediário do raciocínio combinatório, aqui nesta pesquisa que envolveu estudantes da faixa etária dos 8 aos 17 anos, classificamos como Índice de Raciocínio Combinatório.

O terceiro maior percentual, dos níveis de raciocínio, apresentado pelos estudantes foi de 10,4% (ver na Figura 2) e, este representa os esquemas dos estudantes que expõem o nível de Presença de raciocínio combinatório – (R3). Foram classificados neste nível os raciocínios que apresentavam a resposta correta da situação proposta; os esquemas que explicitavam todas as possibilidades de um determinado evento acontecer; os esquemas que apresentavam algum tipo de operação, mas especificamente multiplicação e divisão.

Ressaltamos que R3 foi o nível raciocínio menos recorrente. Na Figura 5 apresentamos um exemplo que ilustra, com a resolução do estudante E3, os tipos de esquemas que foram classificados com este nível de raciocínio.

**Figura 5:** Registro do estudante E4 na situação-problema 3

**Problema 3.** Márcia pode formar 20 conjuntos diferentes combinando blusa e calça. Sabemos que ela tem 5 blusas diferentes, quantas calças diferentes ela tem?

**Resolução**

$$\frac{20}{5} = 4$$

Conjuntos

Resposta 4 calças

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Figura 5 contém a situação-problema 3 que tem foco no conceito de produto cartesiano buscando uma das partes do todo. Interpretamos que na resolução desta situação, o estudante E4 fez um registro que representa um diagrama de árvore, um tracinho para representar cada uma das cinco blusas e, ligado a estes tracinhos, bolinhas para representar as calças. Buscando evidenciar este esquema e identificar

a presença do raciocínio combinatório fizemos uma entrevista com E3. Segue a transcrição da mesma.

A Pesquisadora leu a terceira situação do protocolo de pesquisa respondido por E3 e perguntou o significado das bolinhas e do desenho.

E4: Não, é porque assim, quando eu olhei logo, eu não pensei. Aí depois eu vim me tocar que  $5 \times 4$  era 20. Então eu me toquei que  $20 \div 5$  com certeza ia dar 4. Aí depois que eu fiz isso aqui (apontando para os desenhos) que eu vim me tocar que  $20 \div 5$  era 4.

P: Mas por que a divisão? 20 o quê?

E4: Eram 20 conjuntos diferentes, que era pra dividir por 5 blusas diferentes.

P: E dá 4 o quê?

E4: Dá 4 calças.

P: Aí você chegou em 4 pela divisão e esse desenho te ajudou também?

E4: Não, porque depois eu me toquei... Eu comecei a fazer, só que aí depois eu me toquei que  $20 \div 5$  ia dar 4, entendeu?

P: Entendi... Esse desenho você começou a fazer pensando em quê?

E4: Não, porque eu ia fazer bem assim, tipo... 20 conjuntos, aí os tracinhos embaixo era 5, aí eu ia ligando (risos). Entendeu? Até ver se sobrava algum. Aí se não sobrasse, tipo, aqui ficou 4, tá vendo? (indicando os tracinhos maiores que ligam as bolinhas aos 5 traços abaixo) Certo, igual cá (indicando a conta). Entendeu?

P: Então o desenho também te ajudou?

E4: É.

P: Essas bolinhas então eram...?

E4: Eram, eram os conjuntos. E aqui as blusas (traços abaixo).

Ao ser questionado sobre o significado do diagrama, o estudante E4 inicia sua explicação lançando mão dos algoritmos da multiplicação e da divisão, pautando a sua resposta na lógica da inversa entre estas operações. Apenas ao ser questionado pela terceira vez sobre o uso do diagrama, E4 evidencia as possibilidades da construção dos pares ordenados com o uso dos tracinhos e das bolinhas para representar as blusas e as calças respectivamente. Mas, mesmo assim, se apoia nas operações para dar conta da explicação.

Dentro deste contexto é possível identificar que E4 faz corretamente a resolução da situação dada. Explicita todas as possibilidades de o evento acontecer fazendo uso de um diagrama e, além disso, faz uso da operação de divisão no

esquema registrado no protocolo e explicitamente da operação de multiplicação no momento da entrevista. Estes resultados nos levaram a inferir que este estudante estava no Nível três que se refere a Presença de Raciocínio Combinatório (R3).

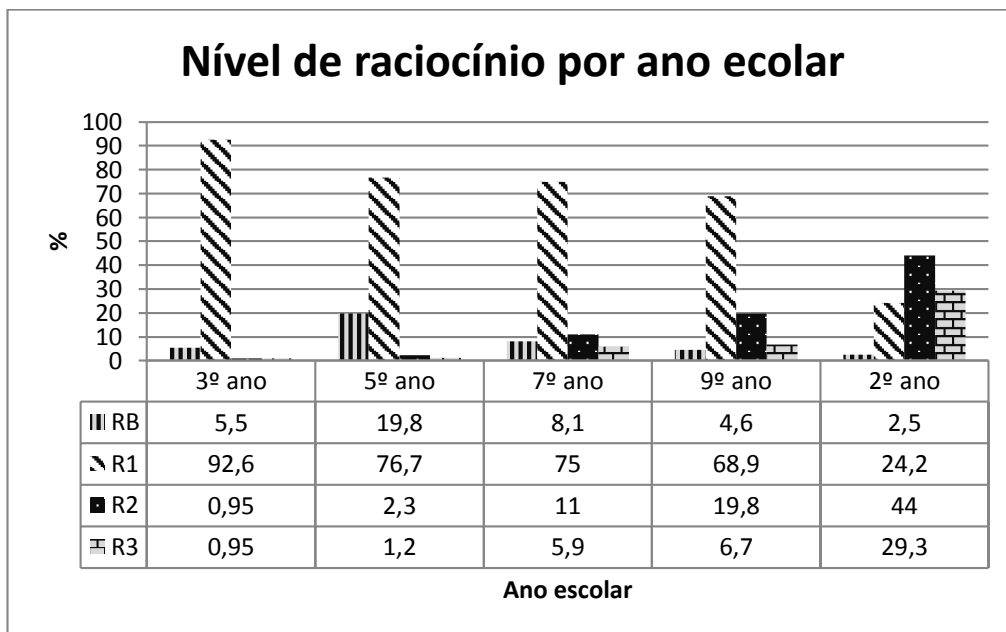
Anteriormente ressaltamos que, além dos três níveis de raciocínio, classificamos a falta da resolução e resposta, assim foi encontrado um percentual de 7,9% de ausência de esquemas e classificamos como Resposta em Branco. Nestas situações não foi possível inferir por nenhum tipo de raciocínio.

### NÍVEIS DE RACIOCÍNIO POR ANO ESCOLAR

Após análise geral dos níveis de raciocínio, fizemos uma análise detalhada da presença desses níveis por ano escolar, sendo que no Ensino Fundamental está análise é feita ao final de cada Ciclo e no Ensino Médio no 2º ano.

A Figura 6 apresenta o gráfico com o percentual dos níveis de raciocínios identificado por ano escolar.

**Figura 6:** Percentual dos níveis de raciocínios por ano escolar



**Fonte:** Dados da pesquisa.

Na Figura 6 é possível perceber como se revela o raciocínio combinatório ao longo da Educação Básica. O primeiro Nível R1 que se configura na Ausência de Raciocínio Combinatório é preponderante nos quatro ciclos do Ensino Fundamental, sendo o seu decréscimo gradativo ao longo desses ciclos. No 3º ano encontramos um alto percentual (92,6%) dessa ausência de raciocínio combinatório, este resultado corrobora com o primeiro período classificado por Piaget e Inhelder (1951), quando afirmam que esse período “[...] se caracteriza pela ausência de operações propriamente ditas, isto é, de composição reversível; os raciocínios em jogo permanecem então pré-lógicos e são regulados apenas por sistemas de regulações intuitivas [...]” (PIAGET; INHELDER 1951, p.294). Os esquemas dos estudantes não apresentam sistematização e, quando apresentam desenhos, estes não são relacionados ao raciocínio inerente aos conceitos envolvidos com a situação apresentada.

Por outro lado, R1 diminui o seu percentual de ocorrência conforme o ano escolar vai aumentando, mas é do final do 4º Ciclo do Ensino Fundamental para o 2º ano do Ensino Médio (29,3%), que ocorre a maior queda no percentual de R1.

O Nível R2 que é o Índice de Raciocínio Combinatório tem percentual de 0,95% no final do 1º Ciclo do Ensino Fundamental e sua ocorrência vai crescendo ao longo do Ensino Fundamental, sendo que ao final do 4º Ciclo chega ao percentual de 19,8%. Contudo, é possível inferir que o Índice de Raciocínio Combinatório inicia no 7º ano, ou seja, ao final do 3º Ciclo do Ensino Fundamental. Sendo que no Ensino Médio o percentual chega a ser mais que o dobro (44%) do último ano do Ensino Fundamental.

O mesmo ocorre com o Nível Presença de Raciocínio Combinatório (R3) começa a ser revelado no 7º ano, no entanto, é no 2º ano do Ensino Médio que ele aparece de forma mais evidente.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A análise deste estudo nos permite ter uma visão dos níveis de raciocínios combinatórios revelados pelos estudantes ao longo da Educação Básica e, estes

perpassam por três níveis, aqui nomeados como: Ausência de raciocínio (R1); Indício de raciocínio (R2); Presença de raciocínio (R3).

Identificamos que ao final de cada ciclo, elencado dentro da Educação Básica, esses níveis são percentualmente ampliados (de R1 para R3), mas não de maneira satisfatória.

Assim, evidencia-se que durante o Ensino Fundamental o raciocínio combinatório não se revela como um domínio evidente, mas começa-se a ter indícios desse raciocínio nos anos intermediários e, apenas no 2º ano do Ensino do Médio que se evidencia este raciocínio, ou seja, a evolução do raciocínio combinatório parece acompanhar o avanço nos anos escolares. Nossos resultados corroboram com os de Pessoa e Borba (2009) no qual os alunos dos anos escolares mais avançados tinham melhores resultados que os anos iniciais.

Os resultados apontam preocupações para com o trabalho com conceitos inerentes ao Campo Multiplicativo durante o Ensino Fundamental, pois de modo geral em percentual, é revelado que o Nível Ausência de Raciocínio Combinatório é preponderante ao final dos quatro ciclos desse nível de ensino.

Além disso, entendemos que, é importante voltar o olhar para a importância que tem sido dada a formação dos conceitos inerentes a análise combinatória, no contexto educacional, pois na pesquisa de Filho e Pessoa (2006) os resultados já apontam que os livros didáticos não apresentam muitas situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório, o que nos conduz a levantar questionamentos sobre o trabalho que vem sendo realizado nestes níveis de ensino.

Acreditamos que um dos caminhos para possíveis soluções, seria a formação dos professores. Assis e Pessoa (2012, p.4), afirmam que “são necessários estudos que verifique como se dá o processo de construção e percepção pelo professor, dos significados dos invariantes e das representações simbólicas de cada tipo de problema para que os mesmos possam mudar o rumo do ensino da combinatória que temos atualmente.”. Sugerimos, para além dessa verificação indicada pelas autoras, que também, sejam feitas inserções na formação inicial e na formação continuada de professores de modo a instigar reflexões sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, indo para além da aplicação de fórmulas e algoritmos, buscando

metodologias e práticas pedagógicas que possibilitem confrontar o estudante com situações que favoreçam se pensar matematicamente a respeito da contagem de elementos de conjuntos finitos.

## REFERÊNCIAS

ASSIS, A.; PESSOA, C. **Formação continuada**: ensino e aprendizagem de combinatória com enfoque nos invariantes de seus diferentes significados. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3. **Anais...** Fortaleza. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN)**. Matemática. 1 e 2 ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN)**. Matemática. Ensino Médio. Brasília: Secretária de educação média e tecnológica, 1999.

DURO, M. **Análise combinatória e construção de probabilidades**: o raciocínio formal no ensino médio. 2012. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul. 2012.

FILHO, M.; PESSOA, C. **Como os problemas de raciocínio combinatório estão sendo abordados nos livros didáticos de matemática das séries iniciais do ensino fundamental?** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3., **Anais...** Águas de Lindoia-SP. 2006.

GIL, A. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. **A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza, 2012.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. **Em Teia**, v.1, n.1, 2010.

MENEGHETTI, C; DUTRA, A. A análise combinatória numa abordagem alternativa: análise de uma aplicação em um curso de Licenciatura em matemática. **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, v.21, n.1, p.67-94. 2012.

MIGUEL, M.; MAGINA, S. **As estratégias de solução de problemas combinatórios**: um estudo exploratório. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, **Anais...** 2003.

MORO, M.; SOARES, M. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n.1, p.99-124, 2006.

PESSOA, C.; SANTOS, L. **Listagens, invariantes, sistematização e generalização**: o caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do ensino fundamental. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: 2012.

PESSOA, C.; BORBA A.O desenvolvimento do raciocínio combinatório na Escolarização básica. **Em Teia**, v.1, n.1, p.1-22, 2010.

PESSOA, C.; BORBA, R. **A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009. **Anais...** Brasília: 2009. p. 1-14.

PESSOA, C.; SILVA, M. Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino de Combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012. Fortaleza. **Anais...** Fortaleza, 2012.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso**. Rio de Janeiro: Record Cultural. 1951.

RUDIO, F. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. Petrópolis: Vozes, 1992.

SANTANA, S. **Adição e subtração**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus,2012.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.155-191.

Submetido: junho de 2014

Aceito: novembro de 2014



---

<sup>i</sup> O Brasil a Educação Básica compreende o Ensino Fundamental (visando as idades de 6 a 14 anos, com duração de nove anos ) e o Ensino Médio (visando as idades de 15 a 17 anos, com duração de três anos).

<sup>ii</sup> P= pesquisador

E1= estudante 1