EXPERIENCIAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Los capítulos de este texto corresponden a productos de investigación originales, y los mismos fueron debidamente evaluados por pares académicos externos, de acuerdo con nuestras políticas de publicación científica

LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO
ELISABETH RAMOS RODRIGUEZ
COMPILADORES - AUTORES

Editorial Kali

Libro

Experiencias en el Aula de Matemáticas

Los compiladores del presente trabajo de investigación son:

Luis Albeiro Zabala Jaramillo

Elisabeth Ramos Rodríguez

COMPILADORES - AUTORES

Los capítulos de este texto corresponden a productos de investigación originales, y los mismos fueron debidamente evaluados por pares académicos externos, de acuerdo con nuestras políticas de publicación científica.

Experiencias en el Aula de Matemáticas

ISBN: 9781792381300

Editorial Kali

Contenido

PROLOGO

Este libro, que tengo el agrado de prologar, es asimismo pionero en su cometido de mostrar que no solo es posible que los estudiantes tesistas de posgrados con mención en Didáctica de la Matemática, desarrollen Unidades Didácticas como productos de sus trabajos de tesis al alero de un marco teórico explícito, sino altamente deseable, por ser mucho más enjundioso, innovador y motivador, para el diseño de las Unidades con productos de investigaciones con sustento teórico.

Entre las varias virtudes que poseen los trabajos de los capítulos, una de ellas es la versatilidad de los objetos matemáticos de las investigaciones presentadas, que oscilan entre volumen de un prisma, polígonos regulares, análisis de gráficos estadísticos y adición y sustracción de fracciones. A esto último se le suman los elementos que se utilizan en cada uno de los capítulos para el desarrollo de la investigación y cómo estos se vierten en cada uno de ellos, para cautivar al lector interesado en estos temas. Aunque hay algunos pasajes teóricos y técnicas matemáticas, sin embargo, en ellos predomina el vocablo para diversos públicos, algo que todos sus lectores podrán agradecer.

Otro elemento que se encuentra en esta propuesta es la visualización de las potencialidades de cada una de las Unidades Didácticas desarrolladas como producto de investigaciones que permiten nutrir varios de los aprendizajes consignados en el currículo, tanto en la Educación Primaria como en la Secundaria. Los autores, Luis y Elisabeth, lo muestran de una manera precisa a través de la selección de las investigaciones consignadas en el libro.

El texto que tiene entre sus manos el lector además tiene el mérito de ser una provocación, en el buen sentido de la palabra, susceptible se estimular otras investigaciones, para las futuras generaciones que se inclinen por la formación inicial de un Investigador en Didáctica de la Matemática.

El aporte de este texto para la formación inicial de investigadores es innegable y, sin duda, será consultado y analizado reiteradamente en el ámbito académico y profesional pertinente, sobre la base de los objetivos de cada una de las investigaciones y los hallazgos que cada una de ellas han alcanzado, considerando sus conclusiones teóricas y reflexiones didácticas para el diseño efectivo de situaciones de aprendizaje de aula.

Aquí, estimados lectores, hay propuestas para nuestros currículos, productos de investigaciones actuales, en las cuales se introducen elementos precisos, novedosos y dinámicos de las matemáticas.

En suma, el texto de Luis Zabala y Elisabeth Ramos constituye un aporte significativo a la urgente tarea de darle sentido a la investigación en Didáctica de la Matemática de los tesistas, en temáticas de la matemática escolar, haciéndola más accesible a "todos los niños del sistema escolar".

Marcela Parraguez
Olmué, agosto 25, 2020
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
marcela.parraguez@pucv.cl

CAPÍTULO II

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN DEL PRISMA: UNA PROPUESTA DESDE LA MODELACIÓN Y REPRESENTACIÓN CON GEOMETRÍA DINÁMICA Y MATEMÁTICA CONDICIONAL

Wilmer Ríos-Cuesta
Institución Educativa Corazón de María
wrioscuesta@hotmail.com

Luis Albeiro Zabala-Jaramillo
Universidad de Medellín
lzabala@udemedellin.edu.co

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Universidad Autónoma del Estado de México
eugeniux@hotmail.com

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
marcela.parraguez@pucv.cl

Solange Roa-Fuentes
Universidad Industrial de Santander
sroa@matematicas.uis.edu.co

Jaime A. Huincahue Arcos
Universidad Católica del Maule, Chile
jaime.huincahue.a@gmail.com

Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
astrid.morales@pucv.cl

RESUMEN

Esta unidad didáctica busca aportar al mejoramiento del componente métrico espacial en la prueba SABER mediante el uso del software Cabri, con lo cual se pretende contribuir a la comprensión del concepto de volumen. En términos de Olivero (2003) el uso de software de geometría dinámica permite lograr un nivel de abstracción mayor comparado con las construcciones hechas con papel y lápiz debido a que se pueden modificar elementos de la construcción y observar la manera como cambia la figura y cómo se conservan las propiedades. En ese sentido, nos apoyamos en el software Cabri ya que permitió el arrastre de las figuras construidas y a su vez, validar y hacer conjeturas.

Lo anterior permitió documentar algunas dificultades epistemológicas presentadas por los estudiantes al momento de resolver una tarea de modelación usando el software y soportados en la Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional, que es un marco conceptual que permite Modelar y Representar los fenómenos de conocimiento de las ciencias básicas desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la tecnología y la construcción.

Por otra parte, el uso del software potenció en los estudiantes la comprensión de algunos conceptos de la geometría plana, tales como paralelas, perpendiculares, rectas, semirrectas, desarrollaron una noción sobre lugar geométrico desarrollaron esquemas de uso del software que ayudaron a la comprensión del concepto.

Palabras clave: Modelación matemática, Cabri, geometría dinámica, representación, matemática condicional, volumen.

ABSTRACT

This didactic unit seeks to contribute to the improvement of the spatial metric component in the SABER test by using the Cabri software, with which it is intended to contribute to the understanding of the concept of volume. In terms of Olivero (2003) the use of software of dynamic geometry allows to achieve a higher level of abstraction compared to constructions made with paper and pencil because you can modify elements of the construction and observe how the figure changes and how the properties are conserved. In that sense, we rely on the Cabri software since it allowed the dragging of the constructed figures, in turn, validate, and make conjectures.

This allowed to document some epistemological difficulties presented by the students when solving a modeling task, using the software, and supported in the Modeling and Representation with Dynamic Geometry and Conditional Mathematics, which is a conceptual framework that allows Modeling and Representing knowledge phenomena of basic sciences from a perspective multiple, by incorporating the study of the interactions between technology and construction.

On the other hand, the use of software enhanced in the students the understanding of some concepts of plane geometry, such as parallel, perpendicular, straight, semi-straight, developed a notion about locus developed software usage schemes that helped the understanding of the concept.

Keywords: Mathematical modeling, Cabri, dynamic geometry, representation, conditional mathematics, volume.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del concepto de volumen ha estado muy ligado a la historia del cálculo, se estima que hace unos 5000 años el hombre empezó a hacer mediciones y cálculos de longitudes, áreas y volúmenes. Sin embargo, a medida que se iba desarrollando el concepto, se fueron presentando algunos obstáculos epistemológicos que desencadenaron en investigaciones que ayudaron a la construcción de los algoritmos que usamos hoy día (Sáiz, 2002).

Culturas como la egipcia le dieron mucha importancia al cálculo del volumen de una pirámide lo cual suscitó un reto para ellos (Sáiz, 2002), por su parte, matemáticos chinos como Lui Hui (220-280), conocían una fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada la cual, mediante procesos geométricos pudieron demostrarlo.

Por otra parte, la dificultad en el cálculo de volúmenes en la secundaria, provocó algunas investigaciones como las de Advíncula (2013), Agudelo (2013) y Hernández (2013) quienes utilizaron el software Cabri y modelación matemática para desarrollar otros aspectos metacognitivos alrededor del concepto de volumen. Sin embargo, la modelación matemática y las posibilidades que tiene el uso de geometría dinámica y la matemática condicional aunadas con la representación pueden llevarnos a considerar otras propuestas con gran impacto en el ámbito educativo, consideramos que la integración de esto cuatro componentes, puede ayudar a que desde diferentes perspectivas, el estudiante logre relacionar el saber con el saber hacer, potenciando las competencias matemáticas.

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La comprensión del concepto de volumen del prisma en los estudiantes del grado noveno de una institucion educatica pública en el departamento del Chocó, ha develado algunas dificultades que se presentan al momento de usar el concepto. Algunas pruebas como la SABER las cuales realiza el ICFES a los estudiantes que llegan al grado noveno, confirman estas dificultades que son registradas en el informe que elabora el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, que indica que el 78% de los estudiantes no establece ni utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.

Para atacar esta problemática se planea una unidad didáctica que ayude a resolver en parte los problemas que presentan los estudiantes y en consecuencia, mejorar el desempeño en la prueba SABER.

ANTECEDENTES

En la línea de investigaciones que se han hecho con Cabri, mostramos dos ejemplos que consideramos de mucha relevancia:

Advíncula (2013) publicó un artículo de reporte de caso en el cual se concluye que el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D favorece la visualización de poliedros en la medida en que se puede manipular representaciones dinámicas y tridimensionales de los mismos, además permite analizar, generalizar y comprobar conjeturas sobre las propiedades de los poliedros, facilitó el cálculo del volumen de un prisma de base triangular permitiendo la división en pirámides cuyos volúmenes se compararon con el del prisma original, determinando la relación que existía entre ellos.

Hernández (2013) en su tesis de maestría concluye que cuando los alumnos no utilizan tecnología presentan debilidades en la visualización y descubrimiento de los patrones geométricos en la solución de los problemas planteados, también menciona que cuando los estudiantes hacen construcciones con lápiz y papel obtienen un rendimiento menor que cuando utilizan software ya que dependen de su habilidad en el trazo y no de la habilidad de manipular figuras y hacer conjeturas. El uso de Cabri permitió a los estudiantes entre otras cosas desarrollar habilidades del pensamiento geométrico como la visualización, reconocimiento, transformación, análisis, planteamiento de conjeturas, permitiendo una mayor interacción entre el usuario y el software. También mejoraron la visualización, razonamiento, construcción y resolución de problemas, se reforzaron los conceptos básicos dado que aparecen las etiquetas por ejemplo, perpendicular, paralela, semirrecta, etc.

En el ámbito de la modelación matemática, destacamos los trabajos de Blum y Borromeo (2009) y de Quiroz (2011).

Quiroz (2011) en su tesis de maestría resalta el rol del docente en la construcción de conocimiento ya que este se convierte en un facilitador y orientador del proceso, sin dar respuestas precisas sino que por medio de cuestionamientos los hace llegar a ellas, se enfoca en generar las situaciones que propician un aprendizaje. Los estudiantes generaron discusiones en las cuales ellos se corregían y sugerían términos. Su marco teórico se fundamenta en la modelación matemática ya que produce mejor comprensión, mayor interés y favorece el papel activo del alumno en la adquisición de conocimiento (Salett y Heim, 2004, citado por Quiroz, 2011), dicha modelación cumple el siguiente ciclo:

- Estructurar la situación que se va a modelar

- Traducir la realidad a una estructura matemática
- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales
- Trabajar con un modelo matemático
- Reflexionar, analizar y ofrecer una crítica al modelo y sus resultados
- Comunicar a los demás sobre el modelo y los resultados

Para enfrentar el ciclo de modelación plantearon a los estudiantes algunas situaciones problema en las cuales el rol del docente se enfocó a la orientación de las discusiones que se presentaban entre ellos tratando de averiguar si lograron comprender el problema, posteriormente notaron que entre las discusiones que se realizaron entre los estudiantes, estos lograron revisar sus errores y corregirlos de manera que desarrollaron la competencia de modelación matemática logrando traducir el problema a una estructura matemática.

Para Blum y Borromeo (2009) la modelación es un proceso bidireccional en el que se traduce el mundo real y las matemáticas, sin embargo no es tan fácil para los estudiantes debido a que tiene una alta demanda cognitiva (Niss, 2003) y se vincula con otras competencias matemáticas como la lectura y comunicación, el diseño y la aplicación de estrategias para la resolución de problemas o trabajar matemáticamente (razonamiento y calculo entre otras) los cuales son útiles al momento de modelar alguna situación matemáticamente.

En términos de Blum, Niss y Galbraith (2007) la competencia de modelación matemática se refiere a la capacidad de identificar las preguntas pertinentes, las variables y sus relaciones con el mundo real las cuales se traducen en términos matemáticos, luego se interpretan y validan para solucionar un problema específico y comprobar los alcances de un determinado modelo.

Para Confrey (2007) la modelación matemática emerge como un tema importante en la enseñanza de las matemáticas, permite la conexión entre disciplinas, los saberes previos y el nuevo conocimiento; por otra parte, permite el desarrollo de ideas complejas los cuales ayudan al desarrollo del pensamiento del estudiante.

En lo que respecta a la representación, Hanna y Jahnke (2007) afirman que las pruebas de matemáticas en la escuela permiten conocer la verdad de las afirmaciones y ayudan a entender el porqué de las mismas, sin embargo, hay que tener en cuenta que el conocimiento matemático de los estudiantes es limitado y en consecuencia se debe hacer uso de las propiedades de los objetos conocidos por ellos.

Dicho autor resalta el uso de diferentes métodos para tal fin como el uso de visualizaciones, lápiz y papel, software dinámico, entre otros. Con esta investigación lograron demostrar que las justificaciones matemáticas que dan los estudiantes al momento de resolver una prueba pueden servir como una forma de explicación, en ella pueden recurrir a ideas de objetos que comparten características y extrapolar dicho saber, esto pasa cuando se da la manipulación sistemas físicos para representar y manipular sistemas no físicos (mentales).

La geometría dinámica se constituye como un instrumento semiótico que soporta la construcción del objeto de conocimiento, esto es, propicia la relación de los conceptos geométricos, las características, propiedades mediante el razonamiento y la percepción lo cual ayuda a la argumentación (Sandoval, 2009). Se ofrece un campo de exploración que no se logra mediante las representaciones en papel, dándole mayor relevancia, ya que permite la validación de conjeturas por parte de los estudiantes. Dicha autora menciona que cuando se usa software de geometría dinámica, se cambia la argumentación respecto a las construcciones con lápiz y papel, por consiguiente los argumentos del alumno, tienen un nivel superior de conceptualización formalización, se movilizan elementos teóricos que respaldan sus conjeturas ayudándolo a organizar de manera sistemática sus afirmaciones para apoyar un resultado lo cual es necesario en la construcción de una argumentación matemática.

Este software permite que los estudiantes logren un nivel de abstracción mayor comparado con las construcciones hechas con papel y lápiz debido a que se pueden modificar elementos de la construcción y observar la manera cómo cambia la figura y cómo se conservan las propiedades, según Blomhøj (2004) se favorece el proceso de modelación matemática las cuales pueden motivar el aprendizaje autónomo y a su vez se brinda al aprendiz la posibilidad de establecer raíces cognitivas para construir importantes conceptos matemáticos.

Cabri como programa de geometría dinámica, ofrece muchas ventajas debido a la manipulación de las figuras, no es solo la elaboración de un dibujo, Cabri va más allá y permite hacer una construcción en la cual se evidencia las propiedades del objeto permitiendo una mayor rigurosidad a la hora de hacer conjeturas, los estudiantes aprenden en un entorno virtual que promueve la creatividad, además, se hace énfasis en aspectos teóricos del objeto y de su construcción logrando que los estudiantes evoquen y adquieran nuevos conocimientos.

En este sentido Olivero (2003) menciona que el arrastre permite la validación y de una construcción para producir y validar conjeturas, los estudiantes pueden observar que pasa sí se modifica algún parámetro; de igual modo, Olivero y Robutti (2001) consideran que el software Cabri permite que el estudiante pase de la percepción al teórico y sirve en la interacción de ambos.

Por otro lado, Rabardel (1995) afirma que en las situaciones de actividad o utilización de artefactos o instrumentos, en nuestro caso la computadora y el software Cabri, existe una triada de elementos, en ocasiones de manera implícita o explícita, que está formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, en donde el instrumento es un intermediario entre el sujeto y el objeto.

En ese sentido, el sujeto al desarrollar una acción moviliza o desarrolla unos esquemas de utilización del software y mediante el instrumento, desarrolla esquemas mentales cuando realiza una actividad o tarea. Dichos esquemas dependen de los conocimientos de cada estudiante y pueden evolucionar invirtiendo los esquemas que ha creado o produciendo nuevos esquemas (Rabardel, 1995).

Por otra parte, Laborde (2004b) define que las acciones que se desarrollan en Cabri mediante movimientos de las figuras, determinan una secuencia de acciones básicas que a su ve determinan un esquema de utilización instrumentada.

A partir de esta problemática de investigación y de los antecedentes que la sustentan nos hemos planteado como pregunta de investigación:

¿Cómo potenciar los procesos de Modelación y Representación con Matemática Condicional mediante el uso del Software Dinámico Cabri, para fortalecer la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen del prisma con estudiantes de secundaria (entre 14 y 17 años)?

Para lo cual nos proponemos como objetivo general:

Estudiar cómo la Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional, crean esquemas de utilización del software dinámico que fomentan el aprendizaje del concepto volumen del prisma.

Y de él se despenden los objetivos específicos siguientes:

- Diseñar e implementar una unidad didáctica que potencie en los estudiantes los procesos de Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional asociados al concepto de volumen del prisma.
- Reconocer esquemas de uso de las herramientas que proponen los estudiantes cuando abordan una tarea de modelación y su Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional.
- Indagar en los procesos de modelación y representación de los estudiantes acerca del concepto de volumen del prisma utilizando el software Cabri de geometría dinámica.

MARCO CONCEPTUAL

Retomando los términos anteriores, en esta investigación se define el marco conceptual que enmarca la investigación y se define lo que significará de aquí en adelante cada concepto.

El marco conceptual que sustenta la investigación a desarrollar en el proyecto se apoya en la Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional.

Modelación

La modelación matemática en términos de Blum y Borromeo (2009) es un proceso bidireccional en el que se traduce el mundo real y las matemáticas. Confrey (2007) menciona que la modelación matemática permite la conexión entre disciplinas, saberes previos y nuevo conocimiento permitiendo que se desarrollen ideas complejas que ayudan al desarrollo del pensamiento. De hecho, Confrey (2007) afirma que la modelación matemática permite “aprender las habilidades y conceptos matemáticos, el desarrollo de estructuras y el desarrollo de varios métodos de prueba” (p. 154).

Representación

Laborde (1977) define la representación como la figura que se hace del objeto en la cual se dota un significante al objeto. Por su parte Duval (2006) advierte que al usar el término figura, no debe confundirse su visualización con su codificación. De hecho, la representación implica el reconocimiento de las características visibles del objeto que son matemáticamente importantes.

Geometría Dinámica

La geometría dinámica se constituye como un instrumento semiótico que soporta la construcción del objeto de conocimiento, esto es, propicia la relación de los conceptos geométricos, las características, propiedades mediante el razonamiento y la percepción lo cual ayuda a la argumentación (Sandoval, 2009). Se ofrece un campo de exploración que no se logra mediante las representaciones en papel, dándole mayor relevancia, ya que permite la validación de conjeturas por parte de los estudiantes.

Dicha autora menciona que cuando se usa software de geometría dinámica, se cambia la argumentación respecto a las construcciones con lápiz y papel, por consiguiente los argumentos del alumno, tienen un nivel superior de conceptualización y formalización, se movilizan elementos teóricos que respaldan sus conjeturas ayudándolo a organizar de manera sistemática sus afirmaciones para apoyar un resultado lo cual es necesario en la construcción de una argumentación matemática.

Este software permite que los estudiantes logren un nivel de abstracción mayor comparado con las construcciones hechas con papel y lápiz debido a que se pueden modificar elementos de la construcción y observar la manera cómo cambia la figura y cómo se conservan las propiedades (Sandoval, 2009). En ese sentido Olivero (2003) menciona que el arrastre permite la validación de una construcción para producir y validar conjeturas. De hecho, Olivero y Robutti (2001) afirman que el software Cabri permite que el estudiante pase de la percepción al teórico y sirve en la interacción de ambos.

Según Blomhøj (2004) se favorece el proceso de modelación matemática las cuales pueden motivar el aprendizaje autónomo y a su vez se brinda al aprendiz la posibilidad de establecer raíces cognitivas para construir importantes conceptos matemáticos.

Matemática Condicional

Por Matemática Condicional se entiende, la restricción sujeta a la Modelación y Representación del fenómeno variable en n-dimensiones, en este caso para n-parámetros; de tal manera que condiciona las representaciones útiles de todo el universo posible. Aquí se establece un constructo fundamental, la interconexión robusta. Esta interconexión surge no solo entre el Modelo y la Representación sino entre la construcción del fenómeno representado a través de la Geometría Dinámica y la Matemática Condicional (Barriga y Zabala, 2017).

Este marco conceptual permite Modelar y Representar los fenómenos de conocimiento de las ciencias básicas desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la tecnología y la construcción, en los términos de Confrey y Maloney (2007):

> El modelado matemático es el proceso de encontrar una situación indeterminada, problematizarla y llevar la investigación, el razonamiento y las estructuras matemáticas para transformar la situación. El modelado produce un resultado -un modelo- que es una descripción o una representación de la situación, extraída de las disciplinas matemáticas, en relación con la experiencia de la persona, que a su vez ha cambiado a través del proceso de modelado. (p. 60)

Para este marco conceptual Modelo es la estructura que sustituye al fenómeno u objeto de estudio durante la simulación que el sujeto efectúa para extraer datos y conocimientos, dando validez a las diferentes descripciones que representan las diversas formas dinámicas.

Dichas relaciones de validez están dadas entre la Modelación y la Representación cuando forman una interconexión robusta entre los elementos del modelo, cuyo dominio queda definido con la Geometría Dinámica y verificada con la Matemática Condicional. Es ahí donde el modelo opera consistentemente (Confrey y Maloney, 2007).

Nuestra unidad didáctica se enfoca en los cuatro elementos del marco conceptual, en algunas partes se le da mayor jerarquía a la modelación, sin embargo, consideramos que todas son importantes y sirven de sustento para la construcción de nuevo conocimiento por parte del estudiante.

MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo teniendo en cuenta que se pretende conocer y explicar cómo la modelación y la representación con geometría dinámica y matemática condicional, crean esquemas de utilización del software dinámico que fomentan el aprendizaje del concepto.

Usamos un estudio de casos según Stake (2007) ya que nos permite indagar en lo particular y complejo de un caso singular para llegar a comprender el fenómeno observado.

Dentro del estudio de casos nos centraremos en el caso de estudios intrínsecos, que en términos de Stake (2007) plantea "En el estudio intrínseco, hay poco interés en generalizar sobre las especies; el mayor interés reside en el caso concreto, aunque el investigador estudia también una parte del todo, y busca comprender que es la muestra, como funciona" (p. 39).

La investigación se desarrolla en una institución educativa pública del departamento del Chocó, con estudiantes de grado noveno cuyas edades oscilan entre los 14 y 17 años.

Para recoger los datos nos apoyamos en la observación directa, una entrevista semiestructurada y un cuestionario con cinco tareas a desarrollar usando como apoyo el software Cabri II Plus y Camtasia Studio ya que la sección será grabada y de esa manera obtener información detallada del procedimiento seguido por los estudiantes, de sus discusiones, dificultades y estrategias de solución emanadas por ellos.

Los datos se organizaron a partir de las siguientes categorías de análisis.

- Identificación de las características visibles del objeto.
- Uso del software Cabri para Modelar la situación planteada.
- Representación de la situación geométricamente usando Cabri.
- Modelación y representación de la situación planteada mediada por Cabri.
- Uso de la geometría dinámica en el proceso de modelación y representación de la situación.
- Verificación mediante la geometría dinámica y la matemática condicional de las propiedades del objeto modelado y representado.

ANÁLISIS CONCEPTUAL

En este apartado se desarrolla el análisis conceptual, para lo cual empezaremos presentando un análisis histórico-epistemológico del concepto de volumen, hacemos una revisión de las dificultades epistemológicas y terminamos con la definición experta y escolar del concepto.

Análisis Histórico-Epistemológico

En la historia del concepto de volumen se evidencia que ha estado muy ligado a la historia del cálculo y al desarrollo de la geometría que en algunas ocasiones parece que se entrecruzan, se remonta a unos 5000 años cuando el hombre empezó a realizar mediciones y cálculos de longitudes, áreas y volúmenes. A continuación se describe la evolución del concepto.

El papiro de Ahmes conocido también como Papiro Matemático Rhind (ver figura 1) es un documento que data de 1550 (siglo XVI) antes de Cristo y se conserva en el museo Británico de Londres, éste contiene 87 problemas matemáticos de los cuales del 41 al 46 y del 56 al 60 son problemas sobre volúmenes, capacidades y poliedros. Destacamos que "dichos problemas proponen el cálculo de volumen de un cilindro cómo el producto del área de la base por la altura" (Gillings, 1982, p. 146) los cuales se relacionan con nuestro objeto de estudio. Llama la atención la manera como desde la antigüedad se propone este método para hacer cálculos de volumen.

Figura 1: Papiro de Ahmes
http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?objectId=117389&partId=1

El papiro de Moscú conocido anteriormente como papiro Golenishchev (ver figura 2) data de 1890 antes de Cristo, en dicho papiro se encuentran 25 problemas de matematices de los cuales llama la atención el número 14 que trata del volumen de una pirámide truncada de base cuadrada. Se cree que los egipcios no conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada o si sólo conocían el proceso para calcular un caso en particular, por ejemplo, lograban calcular el volumen de una pirámide cuadrangular truncada con arista de base inferior igual a 4, arista de base superior igual a 2 y altura igual a 6. (Saíz, 2002), el procedimiento que se explica en el papiro es el siguiente:

a. Se eleva 4 al cuadrado
b. Se duplica este 4
c. Se eleva 2 al cuadrado
d. Se suman estos resultados y resulta 28
e. Se obtiene un tercio de 6 y resulta 2

f. 2 se multiplica por la suma obtenida anteriormente
g. El resultado es 56

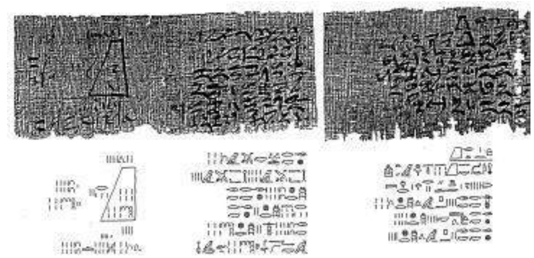


Figura 2: Papiro de Moscú

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fd/Moskou-papyrus.jpg

Se necesita un manejo con cantidades abstractas y ciertas habilidades algebraicas (Gillings, 1982) para poder llegar a esta aproximación del volumen de la pirámide truncada del ejercicio del papiro el cual corresponde a la fórmula $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ sin embargo, solo lo hacían para la pirámide truncada con los datos mencionados anteriormente.

Según Gillings (1982) los egipcios tenían problemas con el uso de las unidades, ellos calculaban el volumen de un cilindro mediante una fórmula que les permitía obtener el resultado en medidas de granos (cálculo de la capacidad de un contenedor de granos) y otras veces calculaban el área de la base por la altura y luego transformaban las unidades obtenidas en otras de capacidad.

Del método de exhaución al libro de los elementos

Demócrito en el año 500 a.C. encontró una manera de calcular el volumen de una pirámide estableciendo que éste es igual a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura, luego Eudoxo (409-356 a.C.) hace una demostración en el cual calculaba de manera exhaustiva áreas y volúmenes mediante la descomposición de la figura geométrica en áreas o volúmenes conocidos, este método se llama exhaución. (Boyer, 1986).

Euclides (323-285 a.C.) en su libro X de Los Elementos describe de manera más rigurosa el método de exhaución de Eudoxo, sin embargo en el libro XII usa el lema de exhaución para para demostrar cómo obtiene las fórmulas para calcular el volumen del prisma y pirámides. (Kline, 1990).

> La mayor parte de las fórmulas contenidas en el Libro XII de Los Elementos era conocida por los geómetras de los valles del Eufrates y el Tigris, la importancia del trabajo de Euclides respecto al concepto volumen, estriba en la organización, formalización y demostración de estos resultados. (Sáiz, 2002, p. 5)

Arquímedes (250 a.C.) usando el método de exhaución, logra profundizar más ya que introduce el peso y el centro de gravedad de los cuerpos para calcular un volumen desconocido en términos de otros cuerpos conocidos, lo que le permitió conseguir volúmenes más complicados como el de la esfera. Arquímedes lo denominó "El Método" y en un manuscrito hallado en el siglo XIX detalla paso a paso el procedimiento que utiliza para calcular el volumen revelando el proceso de análisis para llegar a ellos.

De la suma de infinitos a la integral

Kepler (1615) se interesó en los trabajos de Arquímedes, pero desarrollando sus propios métodos de integración, concibió la esfera como la suma de muchas pirámides con vértices en el centro e infinitesimalmente cercanas a la superficie de la esfera, esto se conoce como la conjetura de Kepler, también calcula el volumen de sólidos de rotación de superficies. Se interesó en el cálculo del volumen de barriles de vino lo cual favoreció el comercio (Sáiz, 2002).

Posteriormente, en 1635, el italiano Bonaventura Cavalieri muestra un método para obtener volúmenes (ver figura 3) el cual plantea: Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, poseen entonces igual volumen.

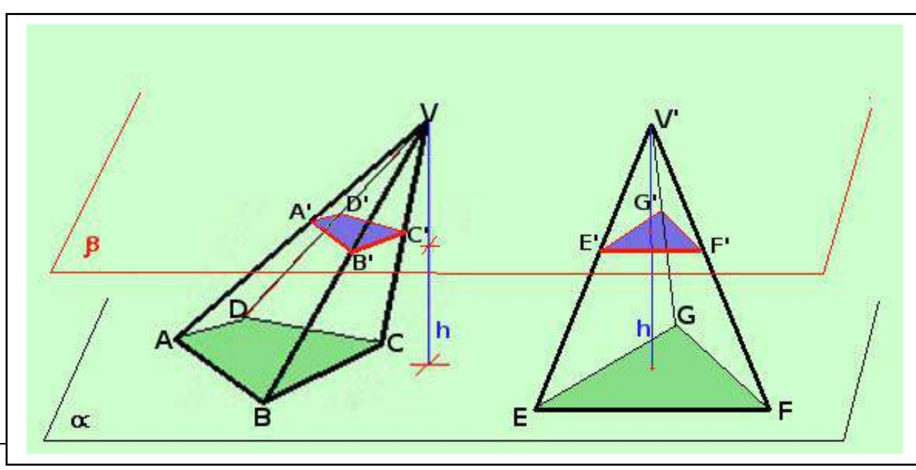


Figura 3: Principio de Cavalieri
http://www.ripmat.it/mate/g/gj/gjf.html

En los tiempos de Fermat y Torricelli (mediados del siglo XVII), se trabajó mucho en el cálculo de áreas, volúmenes y centros de gravedad, destaca el trabajo de este último quien en 1641 descubrió que sólidos de longitud infinita podían tener un volumen finito, este resultado fue publicado en 1644 en su libro *De solido hiperbólico acuto* incluido en Opera Geométrica.

Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) considerados los precursores del cálculo, usaron notaciones diferentes para trabajar derivadas e integrales, sin embargo, sus trabajos sobre las integrales sirvió a la obtención de longitudes de arco, áreas y volúmenes de cuerpos. La integración permite calcular el volumen de un sólido en revolución y el de un cuerpo acotado por dos superficies. Posteriormente, Weierstrass (1815-1897) seducido por las funciones elípticas formaliza la definición de continuidad de una función, límite y derivada, demostrando el teorema del valor medio, aportando el teorema de Bolzano-Weierstrass, Heine-Borel, entre otros. También introdujo las letras griegas épsilon y delta que se usan actualmente (Sáiz, 2002).

De CANTOR a LEBESGUE

Georg Cantor (1845-1918) publicó en 1884 un libro juegos perfectos de potencia de puntos en francés "*de la puissance des ensembles parfaits de points"* dio una noción de volumen n-dimensional para conjuntos de puntos E^n que es el espacio euclideo de n dimensiones. Esto sirvió para que más adelante Camile Jordán introdujera la medida de Jordán que se basó en asignar a cualquier dominio una medida interior y otra exterior (Dieulefait, 2003).

Camile Jordán (1838-1922) extendió la definición de área dada por Peano en 1887 tomando las ideas de Eudoxo y su método de exhaución para hablar de contenido interior y contenido exterior de un conjunto plano, sin embargo, esta idea trabaja todas las dimensiones así que logra generalizarse a los conceptos de longitud, área y volumen permitiendo hablar de volumen y capacidad (Valé, 1983).

Las contribuciones de Peano y Jordán lograron una extensión a la noción de tamaño (longitud, área y volumen) a triángulos, círculos y paralelepípedos, estos últimos se consideran una subclase de prismatoides los cuales abarcan pirámides, cuñas, prismas, antiprismas, cúpulas, fustra y cuadriláteros.

La teoría de la medida dispone de un análisis detallado de la noción de longitud de los subconjuntos de puntos de la recta real y, de forma más general, área y volumen de subconjuntos de espacios euclideos, junto con la integral de Lebesgue ayudan a pensar el volumen como una medida en un espacio medible de dimensión tres (Sáiz, 2002).

Para calcular el volumen de una montaña, Lebesgue propuso particionar el rango de la función de modo que, a mayor cantidad de subdivisiones, mayor precisión se tendrá, por el contrario el método de Riemann consistía en dividir el dominio en sub-intervalos tal como se muestra en la figura 4. Al igual que el método de Lebesgue, entre más subdivisiones se tengan menor será el margen de error.

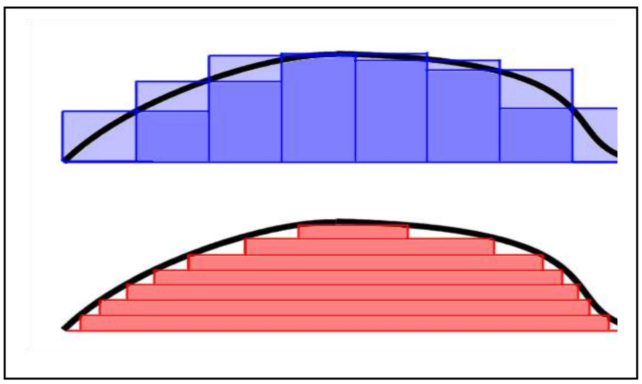


Figura 4:
Integral de Riemann (azul) e integral de Lebesgue (rojo), cálculo del volumen de una montaña
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:RandLintegrals.png

El hecho de tomar una figura plana y descomponerla en otras conocidas como cuadrados, rectángulos y triángulos permitió el cálculo del área de otras figuras poligonales, esto se conoce como método de equidescomponibilidad, sin embargo, en el cálculo del volumen no hubo forma de demostrar mediante los métodos de descomposición que el volumen de una pirámide se podía calcular usando el volumen de otro sólido.

Por otro lado, con los trabajos de Lebesgue se simplificó más el concepto de volumen definiéndolo como una medida de un espacio medible de dimensión tres, haciendo que dicho concepto pierda rigor de modo que es posible estudiarlo sin tener que diferenciarlo de la longitud o del área. Podría pensarse que este se convierte en el último eslabón en la historia del concepto y que dio pie para los nuevos algoritmos que se usan hoy en día.

Los problemas de Hilbert y el volumen en la actualidad

Hilbert (1990) presentó al mundo 23 problemas de matemáticas en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París este año, los cuales resultaron ser muy influyentes en las matemáticas del siglo XX, de ellos el tercero se refiere al cálculo de volumen y planteaba lo siguiente:

> Dados dos poliedros de igual volumen, ¿es siempre posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado el segundo? (Smith, 2013)

Este problema fue resuelto por Dehn (1900) dando como resultado que no es posible y lo probo con un contraejemplo introduciendo el invariante de Dehn; en el caso de los polígonos de dos dimensiones, siempre es posible recortar uno de ellos en polígonos que puedan ser armados construyendo el segundo lo cual es el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein. En el caso del volumen tomó dos poliedros que tuvieran el mismo volumen, introduciendo lo que él llamó *"tijeras congruentes"* se pretendía conseguir que las invariantes de Dehn fueran iguales y encontró que en el caso del cubo se conseguían invariantes igual a cero y en las caras de un tetraedro la invariante es diferente de cero.

También se hace usando el mosaico tridimensional de Boltianskii (1925 hasta la fecha), este descompone el espacio por tres planos en un sistema de cubos. En su libro *figuras equivalentes y equicompuestas* menciona que su cálculo se reduce al uso de dos procedimientos que son: el método de división y el de adición. Por ejemplo, para hallar el volumen de un prisma oblicuo lo hace mediante el producto del área de la sección perpendicular por la longitud de la arista lateral, tal como lo vemos en la figura. Sin embargo, para el cálculo del volumen de una pirámide no se puede proceder de la misma manera, para esto utiliza el *método de límites*, examina cuerpos escalonados más complicados y luego pasando al límite con el número creciente de escalones a lo que llamó escalera diabólica, por lo general, después de construir una pirámide triangular lo que hace es construir un prisma triangular oblicuo el cual dividía en tres pirámides triangulares, luego valiéndose del teorema de Hadwiger, demostraba que las tres pirámides eran congruentes y tenían la misma base que la pirámide por tanto, su volumen es un tercio del área de la base por la altura. Razonamientos similares le permitieron conseguir fórmulas para otros prismas, tales como los paralelepípedos y otros poliedros (Boltianskii, 1981).

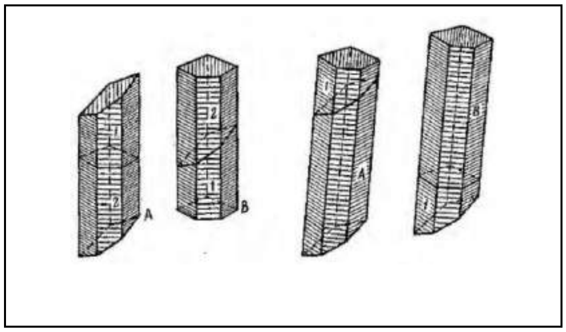


Figura 5: Método de división y adición de Boltianskii
http://eva.sepyc.gob.mx:8383/greenstone3/sites/localsite/collect/ciencia1/index/assoc/HASH01c8.dir/12040064.pdf;jsessionid=332EAB03E46F7A0C89FA3FA679822E48

De la epistemología del concepto

Algunos investigadores en aras de mejorar la didáctica y facilitar el aprendizaje en la escuela del concepto de volumen, han liderado proyectos de investigación que en muchos casos ofrecen una unidad didáctica para desarrollar el concepto y aportar de manera positiva a los resultados en las pruebas externas, esto nos sirve detectar estrategias que puedan servirnos y de qué manera. También es importante indagar en las problemáticas que se presentaron durante el desarrollo del concepto hasta llegar a los algoritmos que se usan en la escuela y secundaria.

En primer lugar, el cálculo del volumen de una pirámide truncada provocó un reto para los egipcios, ellos no le dieron mucha importancia a la magnitud ni al cálculo para resolver un problema real, sino que era una característica de los cuerpos sobre la cual se reflexionaba (Sáiz, 2002). Usaban el hegaq para medir principalmente el trigo y la cebada, el henu lo usaban para medir líquidos como la cerveza, el vino, el agua y la leche aunque también usaron el des, secha y el hebenet. (Sánchez, 2000)

Los chinos por su parte, en el siglo III d.C. conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada y haciendo uso de la geometría lograron demostrarlo. El método que usaron fue dividir la pirámide en un paralelepípedo central, cuatro pirámides cuadrangulares rectas y cuatro prismas triangulares y usaban la fórmula de la pirámide cuadrangular $v = \frac{1}{3}a^2h$

Niccolò Fontana Tartaglia, quien seducido por las ecuaciones cúbicas, desarrolla un método para resolver ecuaciones de tercer grado, logró desarrollar una expresión para calcular el volumen de un tetraedro en función de las longitudes de sus lados la cual se llamó fórmula de Tartaglia y la observamos en la figura 6.

$$V = \sqrt{\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

Figura 6: Fórmula de Tartaglia
http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Tartaglia

Aunque el interés en esta época no se centraba en la exactitud de los cálculos, siempre y cuando les fuera útil para la situación que se requiere, se puede usar al momento de introducir el concepto a los estudiantes ya que pueden mediante la comparación con otras figuras, llegar a observaciones que les permitan fraccionar la unidad de medida para afinar la aproximación, estos principios se observan en los trabajos de Demócrito, Euclides, Arquímedes, Kepler y Cavalieri.

Con respecto al tercer problema de Hilbert parece ser que éste pretendía que nos diéramos cuenta que hay métodos que no se pueden extrapolar ni usar de forma análoga como lo hacemos con los cálculos de área. Esto constituye un reto a nivel educativo, se debe dejar que el estudiante experimente y saque sus conclusiones y tener cuidado al momento de decirle que algo no funciona, podría ser desde el planteamiento de contraejemplos, permitirle que se equivoque y que puedan hacer sus deducciones (Sáiz, 2012).

Orígenes de la Modelación Matemática

Mesa y Villa-Ochoa (2008) afirman que uno de los periodos más fecundos de las matemáticas se ubica en los siglos XVI y XVII, en este tiempo las relaciones entre las matemáticas y el entorno estaban en correspondencia, dado que se busca la manera de explicar los fenómenos de la naturaleza, en la cual la esta última obedece las leyes de las matemáticas.

Para Kline (1992), Galileo manifestó que la naturaleza está escrita en ese gran libro que se encuentra delante de nuestros ojos llamado universo, el cual no podemos entender si antes no aprendemos su lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. Esto supone que la naturaleza está escrita en lenguaje matemático y los símbolos son las figuras geométricas, las cuales ayudan a entender este entramado.

Según Koyré (1977) las investigaciones científicas que se desarrollaron, permitieron cierta matematización y /o geometrízación, aunque no era lo que se buscaba, sin embargo, sirvió de herramienta para la producción de saber, lo cual fortaleció el establecimiento de vínculos entre el proceso de construcción matemática y los procesos científicos.

De igual modo, Mesa y Villa-Ochoa (2008) mencionan que Galileo se enfatizó en descubrir como actuaban las cosas en vez de preguntarse el por qué, este hecho permitió un cambio en las perspectivas mentales de la época, la sistematicidad que usó dio pie a generalizar, predecir y validar situaciones reales.

En el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) se menciona que Pollak (1979) concebía la modelación matemática como una manera de conectar la matemática con el mundo, también reportan que se compone de algunos ciclos de modelación empezando con el entendimiento de la tarea, y terminando con la interpretación y validación del modelo, además destaca sus diferencias y similitudes.

Definición experta y escolar del concepto de volumen

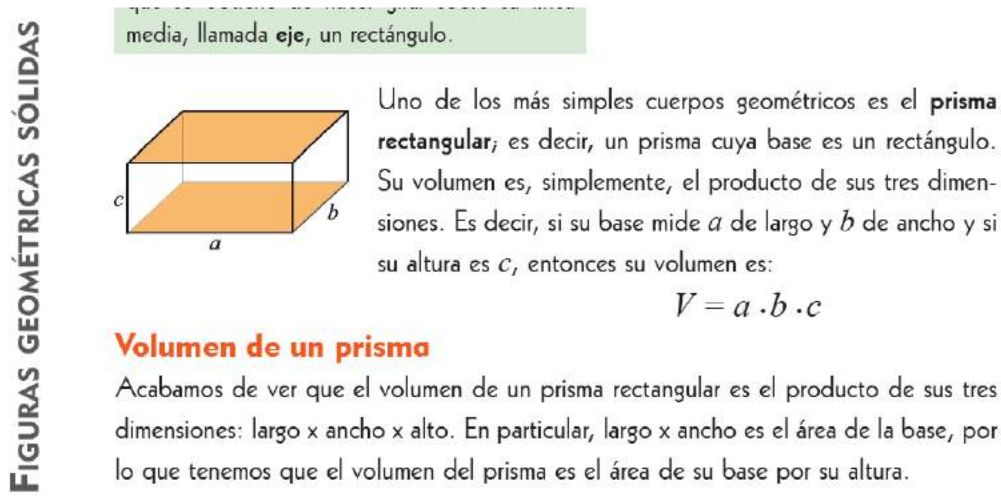
El volumen Sáiz (2002) lo define en la actualidad como:

Sea M un conjunto de subconjuntos en R^3

a. Sea v una función real definida sobre M tal que la función v no es negativa, esto es, si $P \in M$, entonces $v(P)$ es mayor o igual a cero.
b. La función v es aditiva, esto es, si $P\ y\ Q \in M$ y no tienen ningún punto interior común, entonces $P \cup Q \in M\ y\ v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$.
c. La función v es invariante bajo traslaciones, esto es, si $P \in M\ y\ P'$ es la imagen de P al aplicarle una traslación $P' \in M\ y\ v(P) = v(P')$.
d. La función v es normalizada, es decir, el cubo unidad $Q \in M\ y\ v(Q) = 1$ (p. 15)

En la física Espino (1942) la define como una propiedad de la materia que está dotado de ciertas dimensiones pudiendo ocupar un lugar bien determinado.

En el libro de texto de Prieto (2014) para matemática escolar *"Aritmética y Geometría grados 6 y 7"* se define el volumen como "el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto. En particular, largo x ancho es el área de la base, por lo que tenemos que el volumen del prisma es el área de su base por su altura" (p. 404).


FIGURAS GEOMÉTRICAS SÓLIDAS

media, llamada **eje**, un rectángulo.

Uno de los más simples cuerpos geométricos es el **prisma rectangular**; es decir, un prisma cuya base es un rectángulo. Su volumen es, simplemente, el producto de sus tres dimensiones. Es decir, si su base mide a de largo y b de ancho y si su altura es c, entonces su volumen es:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Volumen de un prisma

Acabamos de ver que el volumen de un prisma rectangular es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto. En particular, largo x ancho es el área de la base, por lo que tenemos que el volumen del prisma es el área de su base por su altura.

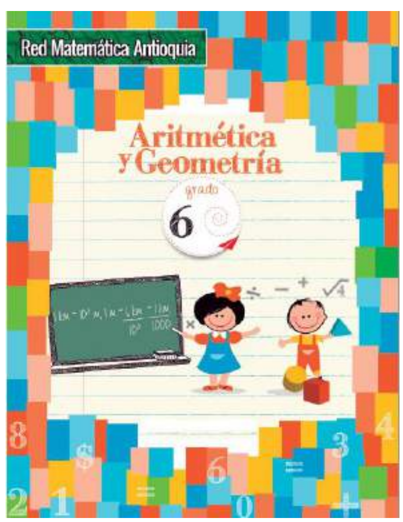


Figura 7: Libro de texto para matemática escolar

A pesar de que la definición de volumen en la escuela es más singular al punto de dar la idea de haberse reducido a una magnitud tal como se hace con la masa y fuerza por citar algunas.

ANÁLISIS DE CONTENIDO

Haciendo una revisión a los libros de texto que se tiene en la institución para trabajar ese concepto, se encuentran situaciones diversas que se describen a continuación.

En el libro "Cursillo de Geometría Euclidiana Conceptos Básicos" de Arbeláez (2014) et al, se sigue una secuencia en la que primero se brinda una definición de volumen "El volumen de un sólido es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo y está dado en unidades cúbicas" (p. 38), posteriormente se explica brevemente algunos sólidos y la fórmula para calcular el volumen, seguido, se muestran algunos ejemplos para finalizar pidiéndole al estudiante que calcule algunos volúmenes como este: "Calcule el volumen y el área superficial de un cono circular recto de altura 3 cm y radio de la base 4 cm", "Halle el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 5 m y altura 7 m." (p. 41) y así por el estilo.

Estos objetos en pocas ocasiones son representados por los estudiantes y sólo se dedica a usar una fórmula para calcularlo. Tampoco se favorece la modelación ni la geometría dinámica.

En una de las preguntas que realiza el ICFES (2015) las cuales fueron liberadas hay preguntas del siguiente tipo: "La función $f(x) = (x - 1)(x + 4)(x + 2)$ permite determinar el volumen en centímetros cúbicos de la caja que se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser el valor que debe tomar x en centímetros para que el volumen sea 70 centímetros cúbicos?" (p. 69).

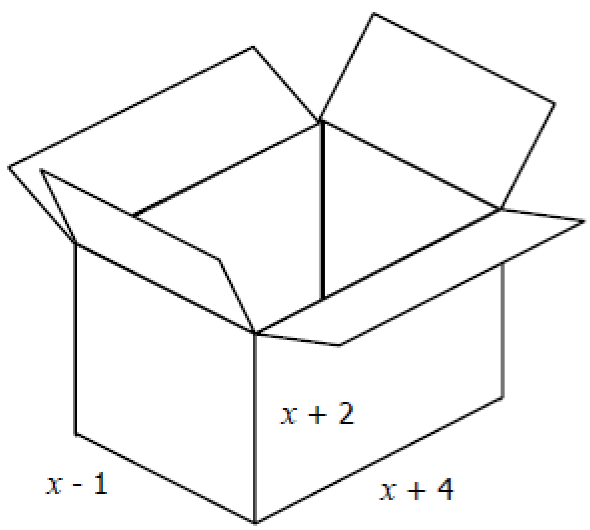


Figura 8: Pregunta 17 (ICFES, 2015)

En el año 2013, el ICFES en la pregunta 28 menciona "Los prismas rectangulares que se muestran a continuación tienen igual volumen (80 cm3) y sus dimensiones son las señaladas en las figuras: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a h y k es correcta?

A. 2h = k

B. 4h = k

C. 12h = k

D. 20h = k" (p. 113)

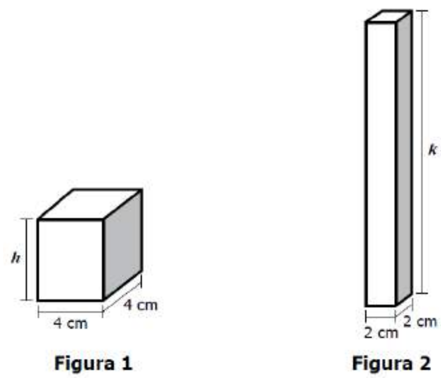


Figura 9: Pregunta 28 (ICFES, 2013)

Por su parte, en el texto de Precálculo 90 lecciones de Arbeláez, et al (2014) se plantea "Calcule el volumen y el área superficial de un cono circular recto de altura 3 cm y radio de la base 4 cm" (p. 50).

Otro ejercicio del mismo texto pero con una complejidad mayor es "Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas perfectamente encajadas, es decir, el radio de cada pelota es igual al radio del cilindro y la altura del cilindro mide 6 veces lo que mide el radio de cada pelota. Calcule el volumen de aire que hay en el interior del recipiente" (p. 56).

En los anteriores ejemplos de preguntas se puede evidenciar que estas apuntan a un tipo de saber hacer, y dado el carácter de la prueba, no permite que el estudiante que ha trabajado de manera convencional pueda contestar siempre de manera correcta este tipo de interrogantes (Godino, Batanero y Roa, 2002).

ANÁLISIS COGNITIVO

En este apartado se estudia el currículo, los libros de texto y se estudian los errores y dificultades en torno al objeto de estudio.

a. Análisis curricular

Según el currículo colombiano, los estudiantes de grado primero empiezan a usar medidas no estandarizadas para medir longitudes de objetos o trayectos, capacidades, peso y masa (DBA[2] 8, 2015 y DBA 5, 2016).

Al pasar al grado segundo, el DBA 10 (2015) plantea "mide el largo de objetos o trayectos con unidades estándar (metros, centímetros) y no estándar (paso, pie, dedo) sin fracciones ni decimales. Entiende la ventaja de usar unidades estándar" (p.55). El DBA 8 (2015) habla del reconocimiento de figuras planas y sólidos simples.

Se introducen las medidas estándar sin dejar de lado las no estándar, argumentando la ventaja del uso de medidas estándares. Por su parte los DBA 4, 5 y 6 (2016) hacen referencia a comparación de figuras geométricas, el uso de patrones para facilitar la estimación y la clasificación de objetos del entorno para establecer relaciones.

En el grado tercero se propone medir y estimar longitudes, área, capacidad y duración entre objetos y eventos (DBA 11, 2015). Por su parte en el DBA 4 (2016) se pide que describa y argumente posibles relaciones entre área y perímetro de figuras planas. En el DBA 5 (2016) se pide "Realiza estimaciones y mediciones de volumen, capacidad, área, peso o duración de un evento como parte del proceso de resolver diferentes problemas" (p. 25). Ya en el DBA 6 (2016) se hace alusión a la descripción y representación de objetos con formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo a sus propiedades geométricas.

Para el grado quinto aparecen las primeras nociones de cálculo de volumen las cuales se introducen mediante el trabajo de potenciación (DBA 3 y 12, 2015) llegando al grado sexto al uso de expresiones algebraicas que en ocasiones requieren el uso de la radicación para la solución de problemas.

Puede verse entonces, que se ha dejado la abstracción de las propiedades de los sólidos a la educación primaria y en secundaria se hace la formalización del concepto, pudiendo en el grado octavo usar el teorema de Pitágoras (DBA 10, 2016) para hallar la diagonal de un cubo.

De igual modo, la secuencia de los conceptos comienza con el perímetro, pasando por el área y terminando con el volumen. Este orden se repite en la secundaria: primero aprendemos las ecuaciones

[2] DBA sigla de Derechos Básicos de Aprendizaje acuñados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

lineales, después las cuadráticas, cubicas, etc., y en el cálculo trabajamos en una dimensión, luego en dos, en tres y posteriormente en "n" dimensiones. (DBA, 2015 y DBA, 2016)

b. Análisis de texto

En la revisión de los libros de texto que se encuentran en la institución encontramos que se presentan algunos sólidos con sus definiciones y características, seguido se da la fórmula con la cual se llega a calcular el volumen y algunos ejemplos para posteriormente pedirle al lector que resuelva algunos problemas usando lo aprendido (Arbeláez et al, 2014, Prieto, 2014).

También encontramos en los textos y en los DBA que se hace mucho hincapié en los primeros años escolares a la observación, vaciado y llenado de recipientes, buscando estimar cuantas veces se encuentra uno contenido en el otro. Dicha observación se enfoca en la abstracción de las propiedades geométricas de los objeto del entorno tal como se menciona en el DBA 6 (2016).

En el texto de Sánchez (2014) titulado *Lecciones de Álgebra* se plantea "el volumen de un paralelepípedo es 36 cm^3, su superficie lateral es 66 cm^2 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 40 cm. Hallar la longitud de todas sus aristas". Este problema es propicio para que el estudiante haga modelación matemática dada las características del enunciado.

En Prieto (2014) "La pirámide de Keops, en Giza, Egipto, tuvo una altura original de 146 m sobre una base cuadrada de 230 m de lado ¿Qué volumen tuvo originalmente la pirámide?" (p. 403), este problema se reduce a la aplicación de una formula.

c. Errores y dificultades

Sáiz (2003) afirma que es importante enriquecer la enseñanza del concepto de volumen y que no debe reducirse a la aplicación de fórmulas. Sobre este hecho, en el análisis de texto y de contenido de esta unidad didáctica, detectamos que en los libros de texto de la institución se prioriza el uso de la formula dejando de lado la modelación que permitió llegar a ella. Esta situación obedece a los modelos de enseñanza con los que fueron formados algunos docentes donde se le daba mayor relevancia a los aspectos cuantitativos en la matemática escolar (Sáiz, 1998).

Godino, Batanero y Roa (2002) reportan algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes al momento de resolver problemas sobre volumen las cuales se mencionan a continuación:

i. Los niños pequeños (12 años) suelen relacionar el volumen con la altura, piensan que a mayor altura mayor volumen.
ii. Al medir longitudes usando una regla graduada es frecuente que cuenten la marca que se encuentra en el cero o colocan la regla en el número 1 lo cual da lugar a que en ocasiones tengan una unidad de menos o de más a la que corresponde.
iii. En los sólidos que se encuentran inclinados, es frecuente que confundan la altura con la medida de uno de sus lados.

En los resultados de la investigación encontramos que los estudiantes pueden pensar que si tiene un paralelepípedo y le disminuye el área de la base para aumentar la altura, el volumen permanece invariante.

También se encontró que al momento de resolver un problema sobre volumen, los estudiantes acuden a la fórmula para su resolución dejando de lado el significado del volumen, hay rasgos de que tienen una noción pero no recuerdan claramente algunos algoritmos.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

La planificación de clases a la luz del marco conceptual Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional es la siguiente:

Área o materia: Matemáticas

Unidad didáctica No. 1

Título de la unidad didáctica: Volumen del prisma: Una mirada desde la Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional.

No. sesiones previstas 10

Introducción
En esta unidad didáctica vamos a conocer el software cabri II plus, nos familiaremos con los comandos y haremos unas construcciones básicas e iremos aumentando gradualmente la complejidad de las construcciones para evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes. De igual modo, trabajaremos conceptos

importantes de la geometría y notaremos su utilidad.

Objetivos didácticos	Criterios de evaluación	Actividad a realizar
Reconocer los comandos que trae Cabri II plus y construir algunos polígonos regulares.	Manejo de las funciones principales del software, habilitar y deshabilitar comandos, ver y ocultar menús especiales, animación.	Construir una recta, un segmento y medirlo, un polígono regular (usamos la herramienta polígono regular) y le damos animación.
Comprender los pasos a seguir para trazar rectas perpendiculares, paralelas y dividir segmentos.	Utiliza los procedimientos usados con regla y compás para hacer dichas construcciones.	(Sólo puede usar circunferencias, rectas, semirrectas y segmentos). Trazar un segmento $\overline{AB}$ y construir una perpendicular a un punto C ubicado en el segmento anterior. Trazar un segmento $\overline{AB}$ y construir una perpendicular al segmento y que pase por un punto C externo. Trazar un segmento $\overline{AB}$ y construya una

		paralela a él. Trazar un segmento $\overline{AB}$ y ubicar el punto medio. Trazar un segmento $\overline{AB}$ y dividirlo en tres partes congruentes.
Construir figuras planas que pueden mantener sus propiedades.	Manipula sus construcciones para verificar la conservación de algunas propiedades, manejo de la matemática condicional.	Construir un rectángulo que mantenga proporciones. Calcular el área y el perímetro.
Usar el comando lugares geométricos, transferencia de medidas, simetría y ecuación para analizar algunas construcciones en Cabri.	Emplea comandos directos para construir un lugar geométrico	Construye un cardioide apoyándose en la herramienta lugar geométrico y traza. Muestra la ecuación del cardioide
Modelar matemáticamente algunas situaciones mediante el software Cabri.	Representa y modela situaciones usando la matemática condicional	Construye un triángulo equilátero y calcula la altura y el área. Construye un paralelepípedo y su

		representación en 3D donde se vea el volumen máximo y la ecuación de la curva.
Usar el software Cabri para modelar matemáticamente situaciones.	Uso de la geometría dinámica y la matemática condicional en la solución del problema.	Una persona desea construir una caja abierta partiendo de una lámina cuadrada de cartón, cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados hacia arriba para formar dicha caja. ¿Cómo sabemos cuándo el volumen es el máximo posible?

Contenidos

- Segmento, semirrecta, recta, vectores
- Recta paralela, perpendicular, punto medio, circulo, transferencia de medida, lugar geométrico.
- Simetría, medida de longitud, coordenada de una ecuación, manejo de la calculadora.
- Calculo del perímetro, área y volumen mediante la construcción de figuras.
- Transferencia de medida, manejo del compás.

Actividades tipo y tarea propuestas	Competencias básicas trabajadas

	Representación	Modelación	Razonamiento
Construcción de segmentos de recta, semirrectas, vectores, rectas	x		x
Construcción de paralelas, perpendiculares, divide un segmento a la mitad	x	x	x
Construcción de un cardiode	x	x	x
Construcción de un rectángulo, halla el área y perímetro observando las variaciones cuando se arrastra la figura.	x	x	x
Construcción de un sistema de engranajes usando simetría, transferencia de medida, círculos entre otros	x	x	x
Construcción de un paralelepípedo partiendo de una situación problema.	x	x	x

Metodología

Dada las ventajas que ha demostrado el trabajo cooperativo, se propone organizar a los estudiantes en equipos de 4 personas permitiéndoles un mínimo de dos computadores por equipo para que puedan discutir sus hallazgos y /o conjeturas.

Atención a la diversidad

Permítales a los estudiantes que se equivoquen, que prueben alternativas para hacerlo ya que eso ayuda al desarrollo del pensamiento (Confrey y Maloney, 2007b).

Haga un seguimiento constante al trabajo, cuestiónelos, oriéntelos y hágales ver sus errores de manera asertiva.

Trate de que las explicaciones sean lo más personalizadas posible.

Espacios y recursos

Se recomienda que los estudiantes se sienten mirándose las caras, de dos en dos para facilitar la conversación y el debate.

Si el espacio y los recursos lo permiten, trate que cada estudiante tenga un computador y que se sienten en fila para que puedan ver sus trabajos y debatir.

Al principio de la clase, proponga ejercicios sencillos quizá rutinarios y vaya aumentando la dificultad teniendo la precaución de comunicárselo a los estudiantes.

Procedimiento de evaluación	Instrumentos de evaluación
Haga participe a los estudiantes de su proceso evaluativo, permítales la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Permanentemente haga preguntas a los estudiantes para estimular su pensamiento, pueden ser del tipo ¿Qué pasa con el área si aumentamos la altura de la figura manteniendo su perímetro? Observe la metodología de trabajo y el interés de los estudiantes al momento de hacer las actividades. Valore la creatividad, haga preguntas que orienten evitando dar respuestas puntuales. Proponga retos cuando la clase esté en el climax dando algunos beneficios a los	Se recomienda usar una rúbrica de evaluación y comunicársela a los estudiantes antes de comenzar para que sepan que criterios serán tenidos en cuenta y los porcentajes de cada componente. Evalúe el ser, el saber y el hacer. Entrevista. Debates. Talleres Prueba tipo SABER

estudiantes.

ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN

El propósito de la unidad didáctica es fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen del prisma, para ello se diseñaron actividades encaminadas a superar las dificultades presentadas por los estudiantes.

A los estudiantes se les pidió que construyeran un triángulo equilátero. Se pudo evidenciar que mediante el uso del software de geometría dinámica los estudiantes lograron modelar y representar la tarea que se les pidió (ver figura 10). En ese sentido, se observó que los estudiantes lograron extraer las propiedades del objeto a representar. Cuando se hace el arrastre que permite el software el triángulo modifica sus dimensiones. Sin embargo, la propiedad de tener sus tres lados congruentes, se conserva. Lo anterior es prueba de un proceso de representación en los términos de Duval (2006).

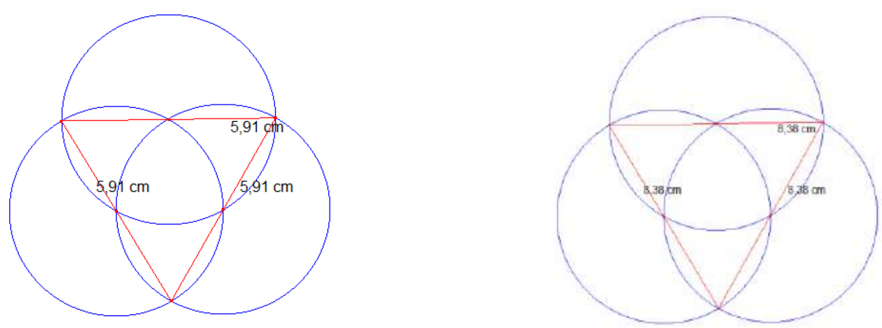


Figura 10: Construcción de un triángulo equilátero

Cuando se les planteó resolver el problema de optimización en el cual debían construir un paralelepípedo y conseguir el volumen máximo, los estudiantes lograron hacer un proceso de modelación y representación usando la geometría dinámica (ver figura 11). En él hay rasgos de un esquema de uso del software que les permitió hacer una proyección en 3D de la forma geométrica de la caja de acuerdo a las dimensiones de sus lados. Se observa el uso de la opción traza la cual les permitió ver el punto en el cual se alcanza el volumen máximo posible y cuáles serían las posibles dimensiones de la caja.

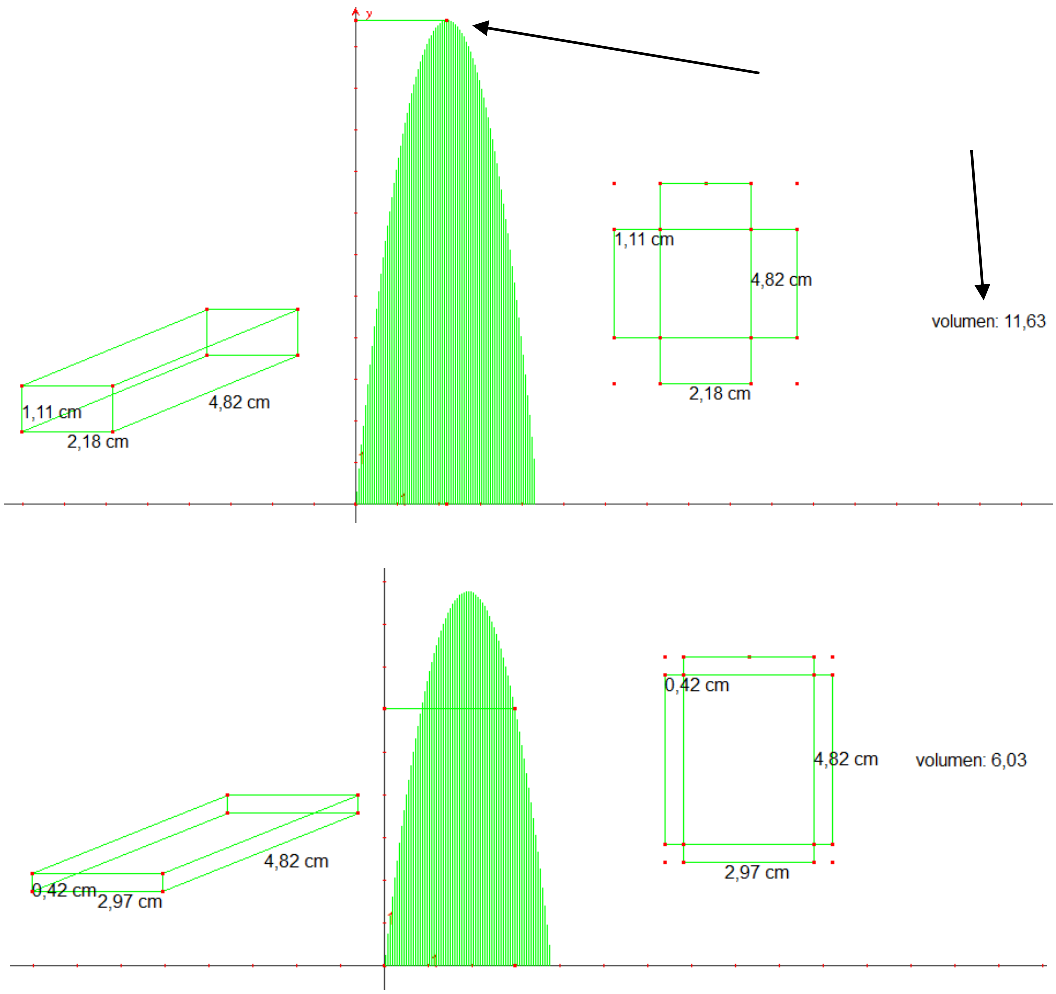


Figura 11: Construcción de un paralelepípedo y proyección en 3D + volumen máximo

De igual modo, lo anterior es evidencia de un proceso de modelación en los términos de Blum y Borromeo (2009).

La geometría dinámica permite validar una construcción, de hecho, permite verificar las propiedades del objeto representado, hacer conjeturas y observar los cambios que presenta el objeto (Olivero, 2003). En ese sentido, hay evidencia de que lograron un proceso de modelación y representación donde se soporta la construcción en el software (geometría dinámica), el arrastre y el uso de la matemática condicional que ofrece el software les permitió responder un interrogante que se les planteó en el cual se preguntó si era posible que se pudieran encontrar dos cajas distintas cuyo volumen sea equivalente (ver figura 12).

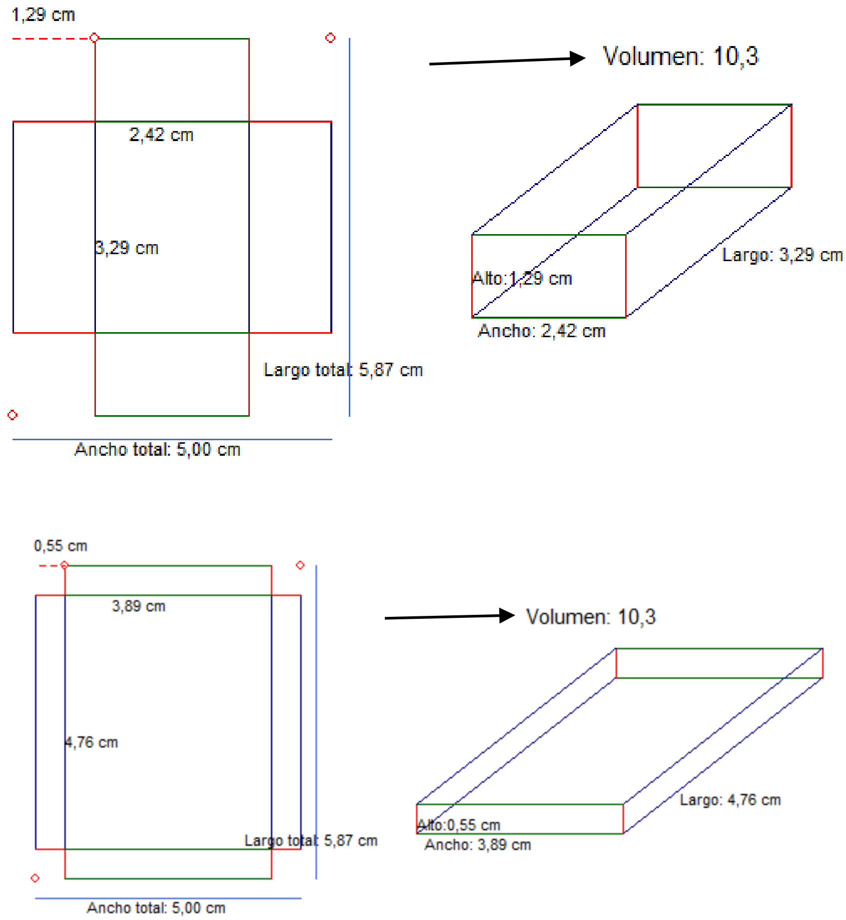


Figura 12: Tarea de optimización

En la construcción del paralelepípedo hay muestras de esquemas de uso del software de geometría dinámica, se evidencia el uso de la herramienta lugar geométrico la cual les permite observar en la gráfica de la función cubica, el punto en el cual alcanza el valor máximo y en consecuencia, reconocer las medidas que puede tomar la caja.

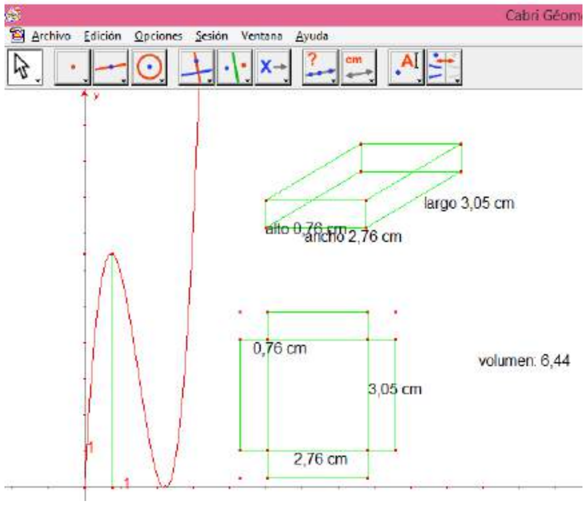


Figura 13: Tarea de optimización

El desarrollo de este tipo de actividades contribuye al desarrollo del pensamiento espacial métrico en los estudiantes, se establece una ruta metodológica para resolver una tarea. En la figura 14 se observa el desarrollo de un paso a paso para encontrar el área de un triángulo equilátero. Se subrayan las ideas claves del razonamiento.

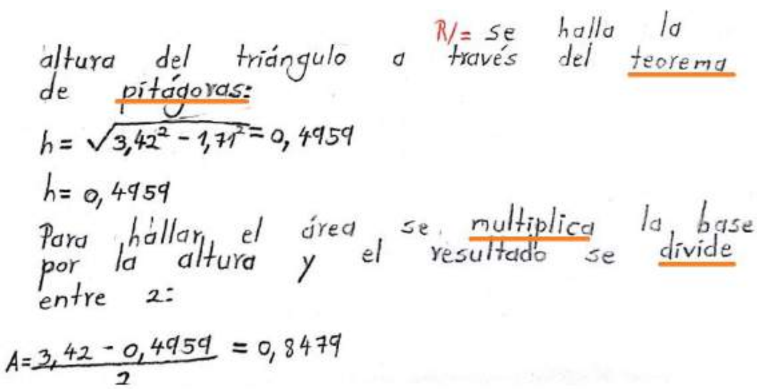


Figura 14: Desarrollo de algoritmos

Los estudiantes tuvieron un mayor nivel de implicación en las actividades que se plantearon, además, comunicaban matemáticamente sus ideas dándole un mayor formalismo a la clase y a los conceptos. Esto se pudo evidenciar en el argumento de E2 (Estudiante No. 2) al momento de construir un paralelepípedo.

> *E2: Se parte mostrando los ejes y haciendo un punto sobre el cual trazamos una **perpendicular** al eje x, luego hacemos un punto sobre la perpendicular que quede debajo del punto anterior. Por los puntos anteriores trazamos perpendiculares al eje y.*
>
> *Sobre una de las perpendiculares trazamos un punto y por él pasamos una perpendicular al eje x marcando el punto de **intersección** que se forma. Uno traza un **segmento** entre los puntos de intersección para poner el **punto medio** del segmento, después se pone un punto entre el punto medio y el extremo del segmento que se pueda mover ya que con ese haremos los recortes de la caja.*

En los argumentos de E2 se observa la naturalidad con la cual expresa algunos conceptos matemáticos como perpendicular, intersección, segmento y punto medio.

CONCLUSIONES

La investigación comienza con la siguiente pregunta ¿Cómo potenciar los procesos de Modelación y Representación con Matemática Condicional mediante el uso del Software Dinámico Cabri, para fortalecer la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen del prisma con estudiantes de secundaria (entre 14 y 17 años)? De ahí se desprende el siguiente objetivo "Estudiar cómo la Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional en el marco del concepto de volumen del prisma, crean esquemas de utilización del software dinámico que fomentan el aprendizaje del concepto".

Este marco conceptual permite Modelar y Representar los fenómenos de conocimiento de las ciencias básicas desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la tecnología y la construcción, en los términos de Confrey y Maloney (2007b). En ese sentido, la unidad didáctica cumple con el propósito de abordar el conocimiento desde varias perspectivas, se favoreció el desarrollo del pensamiento lo cual se evidenció en los argumentos (Blomhøj, 2004; Sandoval, 2009) y las justificaciones que daban los estudiantes mientras modelaban situaciones, tal como los expresó Olivero (2003) cuando mediante el arrastre validaban sus conjeturas.

Por parte del docente se requiere cierto dominio de la geometría y del software para hacer las preguntas adecuadas (Niss, 2007) y favorecer que emerjan nuevos conocimientos (Cordero, 2006).

Los resultados aquí expuestos nos muestran el efecto que tuvo el uso de la modelación y la representación con un software de geometría dinámica, en este caso Cabri, que debe ser considerado en los procesos de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo de algunas nociones de geometría Euclidiana, en este caso, el concepto de volumen.

Si bien, se evidenció que los estudiantes al momento de resolver una tarea ponen en juego algunas estructuras mentales relacionadas al objeto que quieren modelar y/o representar, hay indicios de que crean esquemas de uso del software que potencian el pensamiento de estudiante ya que la visualización que este ofrece les permite analizar, conjeturar y validar mediante la manipulación, sus hipótesis.

Por último, el software permitió que se reforzaran algunos conceptos básicos de la geometría, potenciando en los estudiantes la comprensión de conceptos como: recta paralela, perpendicular, punto medio, intersección, lugar geométrico, entre otros.

REFERENCIAS

Advíncula, E. (2013). Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Uruguay

Agudelo, M., Estrada, E., Posada, L. M., Rodríguez, L. M., Torres, M. C. y Santa, M. C. (2006). *Situaciones didácticas para la enseñanza del volumen*. Trabajo de grado, Universidad de Antioquia, Colombia.

Agudelo, Y. (2013). *La modelación, una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continúas en la magnitud volúmenes en estudiantes de grado 9°.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

Arbeláez, H., Baena, J., Bustamante, E., Correa, B., López, B., Muñoz, L., Osorio, M. y Vélez, C. (2004). *Cursillo de Geometría Euclidiana conceptos básicos,* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Arbeláez, H., Baena, J., Bustamante, E., Correa, B., López, B., Muñoz, L., Osorio, M. y Vélez, C. (2004). *Precálculo 90 lecciones*, Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Barriga, E., y Zabala, J. (2017). Un nuevo marco conceptual: Modelación y Representación con Geometría Dinámica y Matemática Condicional. En J. A. Rúa (Presidencia). *I Congreso Internacional de Cabri Universidad de Medellín.* Congreso llevado a cabo en Medellín, Colombia.

Boltianskii, V. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Moscú: MIR.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling – a theory for practice. International perspectives on learning and teaching mathematics.* Suecia: National Center for mathematics education.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. W. y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics educations*, New York: Springer.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. En: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Confrey, J. (2007). Epistemology and modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss, (2007). *Modelling and applications in mathematics educations*. New York: Springer

Dieulefait, L. (2003). Medida de Jordán. *Revista Miscelánea Matemática*, *37*(1), 29-63.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 143-168.

Gillings, R. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Nueva York: Dover

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (2007). Proving and modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.). *Modelling and applications in mathematics educations* (pp. 145-152). New York: Springer

Hernández, R. (2013). *El uso de cabri gèometrè II como herramienta didáctica para mejorar la visualización de los conceptos geométricos y aplicarlos a la resolución de problemas. Un estudio con estudiantes de la carrera de matemáticas del Centro Universitario Regional de San Pedro de Sula de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.

ICFES. (2015). *Guía de interpretación y uso de resultados de pruebas Saber 3º, 5º y 9º.* Bogotá: Ministerio de Educación.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York: Oxford University Press.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

Koyré, A. (1977). *Estudios de historia del pensamiento científico*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Laborde, C. (1997). Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig, M. Guzmán, M. Niss, J. Kilpatrick, C. Laborde, L. Rico, J.D. Godino, F. Villarroya y J.A. García, (Eds) *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp 33-48), Bogotá: una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Laborde, C. (2004b). New technologies as a means of observing students conceptions and making them develop: The specific case of dynamic geometry,

Mesa, Y. y Villa-Ochoa, J. (2008). *Modelación matemática en la historia de las matemáticas. Un análisis del concepto de función cuadrática*. XIII CIAEM-IACME, Recife (Brasil): Conferência interamericana de educação matemática.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá: Mineducación. Disponible en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Bogotá: Mineducación. Disponible en http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Informe por Colegio*. Bogotá: Mineducación. Disponible en: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86432

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (115-124). Atenas: The Hellenic Mathematical Society.

Olivero, F. (2003). *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*. Tesis de doctorado no publicada, University of Bristol, Inglaterrra.

Olivero, F. y Robutti, O. (2001), Measures in Cabri as a bridge between perception and theory*, Pi Mu Epsilon 25(4)*, 9-16.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1971). *El desarrollo de las cantidades físicas en el niño*. Traducido del inglés, Barcelona: Nove Terra.

Prieto, C. (2014). *Aritmética y Geometría Grados 6 y 7.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Quiroz, S. (2011). *Desarrollo de competencias de modelación matemática en el cálculo de volumen de prismas en un grupo de sexto grado utilizando las webquest como tecnología de apoyo*. Tesis de maestría no publicada, Tecnológico de Monterrey, México.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: aproche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Sáiz, M. (1998). How has measurement been taught in Mexico? In *Proceeddings of the twentieth annual meeting of the North American chapter of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp.325-331). Columbus, Ohio: The ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Sáiz, M. (2002) *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *8*(18), 447-478.

Sánchez, C. (2014). *Lecciones de Álgebra*, Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Sandoval, I. (2009) La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico, *Educación Matemática 21*(1), 5-27.

Smith, B. (2013). *Hilbert's Problems*. Dabney Lane, Virginia, USA: Platonic Realms Interactive Mathematics Encyclopedia. Recuperado el 7 de octubre de 2017 de http://platonicrealms.com/encyclopedia/Hilberts-Problems/.