O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA DE ALUNOS BRASILEIROS DE 16 -17 ANOS NA PERSPECTIVA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Vera Helena Giusti de Souza [1]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão [2]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Ana Maria Pereira Pinto Poggio[3]
Universidade Anhanguera de São Paulo

RESUMO

Teve-se por objetivo investigar as Definições de Conceito e as Imagens de Conceito de proporcionalidade direta de um grupo de alunos brasileiros do último ano do Ensino Médio (16-17 anos de idade) de uma escola pública do Estado de São Paulo. Escolheu-se os *Três Mundos da Matemática* para elaborar e analisar as questões do diagnóstico e buscou-se respostas para duas questões: *Qual a definição de conceito de proporcionalidade direta de alunos do Ensino Médio? Com que características, entre formais, simbólicas e corporificadas, trabalham questionamentos que envolvem a proporcionalidade direta?* Verificou-se que as Definições de Conceito e as resoluções dadas aos problemas propostos têm essencialmente características corporificadas; não apresentam características simbólicas*;* poucos explicitam características formais. Conclui-se que esses participantes não transitaram pelos Três Mundos da Matemática e nem desenvolveram o pensamento proporcional.

Palavras-Chave: Proporcionalidade Direta. Definição de Conceito. Imagem de Conceito. Três Mundos da Matemática.

[1] verahgsouza@gmail.com
[2] elisa.gal.meg@gmail.com
[3] anapoggio@gmail.com

ABSTRACT

The aim of our research was to investigate Concept Definition and Concept Image about direct proportionality in a group of students in the last year of Basic Education (16-17 years of age) in a Brazilian public school in São Paulo State. We chose Three Worlds of Mathematics to design and analize the questions of the applied instrument and we looked for answers to two questions: *What are the Concept Definition given by students, about direct proportionality? Which characteristics, among formals, symbolics and embodied ones they use to solve questions involving direct proportionality?* In the given Concept Definitions as well as in their problem resolutions we have essentially observed embodied characteristics; total ausence of symbolic characteristics; and just a few answers with formal characteristics. We may conclude that the subjects of this research do not show they pass through Three Worlds of Mathematics and they have not developped proportional thinking.

Keywords: Direct Proportionality. Concept Definition. Concept Image. Three Worlds of Mathematics.

RÉSUMÉ

Le but de notre étude était d'enquêter Définition de Concept et Image de Concept sur proportionnalité directe dans un groupe d'étudiants brésiliens de la dernière année de l'éducation de base (16-17 ans) d´une école publique de São Paulo. Nous avons choisi les Trois Mondes des Mathématiques pour concevoir et analizer les questions proposée et pour chercher des réponses à deux questions: Quelles sont les définitions de concept donné par les élèves, sur la proportionnalité directe? Quels caractéristiques, parmi formelles, symboliques et corporifiés, ils utilisent pour résoudre les questions proposée? Dans les définitions et dans les résolutions qu'ils donnent, nous avons observée essentiellement caractéristiques corporifiés; absence de caractéristiques symboliques; et quelques réponses avec caractéristiques formelles. Nous pouvons conclure que ces sujets non montrent pas qu'ils passent à travers les Trois Mondes des Mathématiques et ils non avait developée le pensée proportionel.

Mots-clés: Proportionnalité Directe. Définition de Concept. Concept de L'image. Trois Mondes de Mathématiques.

RESUMEN

El objetivo de nuestro estudio fue investigar la Definicion de Concepto y la Imagen de Concepto sobre proporcionalidad directa en un grupo de estudiantes brasileños del último año de Educación Básica (16-17 años de edad) en una escuela pública en São Paulo. Hemos elegido los Tres Mundos de las Matemáticas para diseñar y analizar las preguntas del instrumento y hemos buscado respuestas a dos preguntas: ¿Cuáles son las definiciones de concepto dadas por los estudiantes, sobre proporcionalidad directa? ¿Qué características, entre formales, simbólicos y corporeizados, utilizan para resolver las cuestiones de proporcionalidad directa? En la definicion de concepto et en las resoluciones que dan hemos observado: esencialmente características corporeizadas; ausencia de características simbólicas; y sólo unas pocas respuestas con características formales. Concluiemos que estos sujetos no demuestran pasar a través de los Tres Mundos de las Matemáticas et non han desenvuelto el pensamiento proporcional.

Palabras clave: Proporcionalidad Directa. Definición del Concepto. Esquema Conceptual. Tres Mundos de las Matemáticas.

INTRODUÇÃO

A ideia de proporcionalidade pode e deve ser considerada relevante, tanto no contexto escolar como em problemas práticos do cotidiano. No primeiro, serve como um possível fio condutor que passa pelos estudos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem, grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental; em problemas que envolvem razão e proporção, semelhança ou representação gráfica de funções, no Ensino Médio; no estudo de objetos matemáticos como função, derivada ou em modelos matemáticos, no Ensino Superior, tanto na Matemática como em outros componentes curriculares. Fora do contexto escolar, é útil em decisões profissionais, como na mistura de tintas para conseguir determinada cor ou na mistura de cores para obter certos tons. Na vida familiar, é importante para reconhecer situações que são ou não de proporcionalidade direta ou inversa, como as que envolvem compras a prazo ou o entendimento da conta de água, de luz ou das faixas para recolhimento do imposto de renda na fonte. Com a constatação da considerável importância do conceito de proporcionalidade, entendemos que o ensino de Matemática da Educação Básica deve contemplar situações que possibilitem uma efetiva aprendizagem e perguntamo-nos se o conceito de proporcionalidade, direta ou inversa, permanece com os alunos, depois de terem passado pelo seu ensino; quais são as ideias que têm sobre proporcionalidade; e como as aplicam em algumas situações.

Lesh, Post e Behr (1988) consideram que a aprendizagem da proporcionalidade deve ser vista como um dos principais objetivos do ensino de Matemática, argumentando que o raciocínio proporcional abarca toda a Aritmética, bem como representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes.

> Vemos o raciocínio proporcional como um conceito fundamental. De um lado, é o ponto culminante da Aritmética das crianças no 1º ciclo do Ensino Fundamental; de outro, é a pedra fundamental de tudo o que se segue. (LESH; POST; BEHR, 1988, tradução nossa)

Em outra pesquisa, Post, Behr e Lesh (1995) voltam-se para a importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra e apontam que até 1988 os alunos que eram considerados capazes de raciocinar proporcionalmente eram os que respondiam corretamente a aqueles problemas em que são conhecidos três valores e deseja-se encontrar o quarto, em situações consideradas numericamente difíceis, isto é, com números não inteiros. Para eles, esta é uma visão limitada, pois estes problemas prestam-se apenas a resoluções algorítmicas. Post, Behr e Lesh (1995) apresentam três razões para justificar a importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra, relacionadas à representação algébrica das proporções, à igualdade entre duas razões e aos diferentes modos de representação, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas, que são essenciais não apenas na Álgebra, mas também em outras áreas da Matemática. E acrescentam que, para raciocinar proporcionalmente, um indivíduo precisa ter o domínio de vários conceitos sobre números racionais, tais como ordem e equivalência, relação entre a unidade e suas partes, interpretação de uma razão e questões envolvendo a divisão. Por fim, concluem

> ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes ou 'complicados' ou pelo contexto em que se insere o problema. (...) a pessoa precisa ser capaz de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Isso tem implicações diretas para o ensino. (POST; BEHR; LESH, 1995)

Sierpinska (1992) categoriza dezesseis obstáculos epistemológicos, associados ao conceito de função e o de número 9 é especialmente ligado à ideia de proporcionalidade: "(Um esquema inconsciente de pensamento) Proporção é uma forma privilegiada de relação" (SIERPINSKA, 1992, p.43, tradução nossa). E observa que "há, na proporcionalidade, uma espécie de simplicidade, de obviedade, que se impõe sobre nós, às vezes até mesmo contra os fatos... pelo menos em pequenos intervalos" (GRIZE, 1968, p.171, *apud* SIERPINSKA, 1992, p.42). Como a "lei algébrica" não aparece explicitamente na definição formal, isso pode ser considerado como um obstáculo e, por esta razão, podemos afirmar que todos os participantes enfrentam tal dificuldade, o que explicaria o equívoco que muitos cometem ao definir uma relação como de proporcionalidade direta quando duas grandezas aumentam ou de proporcionalidade inversa quando uma variável aumenta e a outra diminui ou mesmo em considerar sempre proporcional uma relação entre duas grandezas.

Segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos objetivos do ensino de

Matemática que deve ser muito valorizado, por ser uma ideia Matemática fundamental.

Miranda (2009) realizou um estudo documental, do tipo metanálise qualitativa, para organizar uma revisão sistemática de pesquisas brasileiras sobre o pensamento proporcional. Para responder sua primeira pergunta “Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e teses do Estado de São Paulo sobre o tema?” (MIRANDA, 2009, p.15), encontrou duas pesquisas que propõem atividades para o desenvolvimento do pensamento proporcional: Ruiz (1985), que trabalhou com atividades para introduzir o conceito de proporcionalidade com alunos do Ensino Fundamental e Perotti (1999), que trabalhou com atividades para o estudo da reta, a partir de grandezas diretamente proporcionais, com alunos do Ensino Médio.

Para sua dissertação, Ruiz (1985, *apud* MIRANDA, 2009, p.100) propõe, por meio de nove atividades, introduzir o conceito de proporcionalidade para alunos da 7ª série do Ensino Fundamental (atual 8º ano, 13-14 anos de idade). Nestas atividades, explora situações manipulativas o que, segundo ele, possibilitou aos alunos perceberem que duas grandezas *a* e *b* são diretamente proporcionais quando a razão entre *a* e *b* é constante e identificar esta relação como uma função linear. Perotti (1999, *apud* MIRANDA, 2009, p.96) elaborou uma “sequência didática” para a aprendizagem da equação da reta, com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação; seis atividades foram aplicadas em um grupo de 14 alunos da 1ª e da 2ª séries do Ensino Médio (15 a 17 anos de idade). Em suas conclusões, Ruiz e Perotti (1999, *apud* MIRANDA, 2009) consideram ter elaborado sequências eficientes para a aprendizagem da ideia de proporcionalidade. Miranda conclui que Ruiz privilegiou os descritores

> Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão e ou proporção
>
> Utilizar ideias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou ideias associadas às funções e suas representações
>
> Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas. (MIRANDA, 2009, p.96)

e Perotti, este último.

Atentamos, no contato com os autores acima mencionados, para os possíveis equívocos na compreensão do conceito de proporcionalidade e alguns questionamentos começaram a emergir: “Será que alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa?”; “Como trabalham com esses conceitos?”; “Utilizam gráficos, tabelas, textos ou símbolos?”; “Sabem reconhecer se uma relação é diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional?”; “Reconhecem (ou conhecem) as expressões correspondentes?”. De maneira particular, nos perguntamos se um indivíduo utiliza e reconhece a representação gráfica, quando trabalha com a proporcionalidade, pois consideramos importante que um participante saiba associar gráficos com as ideias de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa. Para obter respostas a estes questionamentos, optamos por estruturar um questionário diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade e aplicá-lo a alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Encontramos eco para esses nossos questionamentos em Lamon (2008), que na introdução de seu livro “Teaching Fractions and Ratios for Understanding – Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers”, escreve

> O raciocínio proporcional é um dos melhores indicadores de que um estudante chegou à compreensão dos números racionais e dos conceitos multiplicativos relacionados. É a medida do entendimento das ideias matemáticas elementares e também parte da fundamentação para conceitos mais complexos (LAMON, 2008, p.3, tradução nossa)

Lamon também destaca a importância de pesquisas na área que apontem as características de um participante que tenha o raciocínio proporcional, mais do que as que se preocupam em determinar se tal participante sabe ou não raciocinar proporcionalmente. Esperávamos, com nosso diagnóstico, ter uma ideia dessas características, pela análise do raciocínio apresentado pelos participantes, ao responderem nossos questionamentos.

Como fundamentação teórica, escolhemos os Três Mundos da Matemática (TALL, 2004), uma teoria que está preocupada em entender o desenvolvimento cognitivo, em Matemática, do ser humano, desde a infância até a idade adulta e que traz as ideias subjacentes de imagem de conceito e de definição de conceito (TALL;

VINNER, 1981). Segundo estes pesquisadores, para o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático, que categorizam em três diferentes mundos: mundo conceitual corporificado, mundo operacional simbólico e mundo axiomático formal.

Escolhido o quadro teórico, pudemos reformular nossos questionamentos e, dentre as 17 questões de pesquisa que elaboramos, apresentamos, neste trabalho, as que se referem à proporcionalidade direta

Qual a definição de conceito que alunos do Ensino Médio dão de proporcionalidade direta?

Qual a imagem de conceito que alunos do Ensino Médio têm de proporcionalidade direta?

Com que características, entre formais, simbólicas e corporificadas, esses alunos trabalham questionamentos que envolvem a proporcionalidade direta?

REFERENCIAL TEÓRICO

Buscamos aporte na teoria dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004), principalmente nas ideias subjacentes de imagem de conceito e de definição de conceito (TALL; VINNER, 1981) para formular as questões de pesquisa, elaborar o instrumento de coleta de dados e analisar os protocolos gerados pelos participantes, alunos de um 3º ano do Ensino Médio, último ano da Educação Básica no Brasil.

Imagem de conceito e definição de conceito

Tall e Vinner (1981) consideram que o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, em relação a um conceito matemático, é dado pela diversidade de ideias e experiências relacionadas a este conceito que o indivíduo acumula, e que a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando estas ideias são ricas e variadas. Para que um conceito matemático seja satisfatoriamente compreendido pelo indivíduo é pedagogicamente aconselhável que sua definição seja acompanhada por uma ampla gama de ideias, todas associadas a ele e que irão favorecer a formação do que Tall e Vinner (1981) chamam de imagem de conceito.

> Usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p.152, tradução nossa)

A imagem de conceito não é uma estrutura estática e pode modificar-se ao longo do tempo, de acordo com o desenvolvimento cognitivo individual, com novas concepções incluídas e antigas excluídas ou modificadas. Faz parte da imagem de conceito o que Tall e Vinner (1981) denominam definição de conceito, que é o conjunto de palavras utilizadas por um indivíduo para definir um conceito matemático. A definição de conceito é, portanto, individual e pode ter sido decorada ou construída a partir das ideias presentes na imagem de conceito e pode estar relacionada, em maior ou menor grau, a uma definição de conceito formal, como a que é aceita pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981). Assim como a imagem de conceito, a definição de conceito pode mudar ao longo do tempo, à medida que o indivíduo incorpora novas ideias, relacionadas ao conceito. Vinner (1991) ainda acrescenta que tanto a definição de conceito como a imagem de conceito, ou mesmo as duas, podem ser inexistentes, se "nenhum significado é associado ao nome do conceito" (VINNER, 1991, p. 70, tradução nossa). Isto pode ocorrer por várias razões: quando a definição de um conceito é memorizada, sem que lhe seja atribuido um significado; quando um conceito é introduzido utilizando apenas sua definição; ou ainda quando a definição permanece desativada, podendo até ser esquecida. Para que uma definição de conceito faça sentido para um indivíduo e possa ser convertida em pensamento matemático, deve haver uma imagem de conceito pré-existente.

A definição de um conceito pode ser criada pelo indivíduo quando solicitado a explicar este conceito. Por exemplo, se perguntamos "O que é proporcionalidade direta?", um participante pode dar uma definição formal, como a instituida pela comunidade científica ou ainda descrever uma das concepções presentes na sua imagem de conceito, como "Duas quantidades são diretamente proporcionais se o gráfico cartesiano for uma reta com inclinação positiva e que passa pela origem". Uma definição de conceito, mesmo aquela que corresponda à definição formal, sem uma imagem de conceito rica, pode ser inútil.

As ideias de imagem de conceito e de definição de conceito apresentadas por Tall e Vinner (1981) sugerem que a compreensão de um conceito matemático acontece pelo enriquecimento das ideias associadas a esse conceito e sugerem que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos alunos.

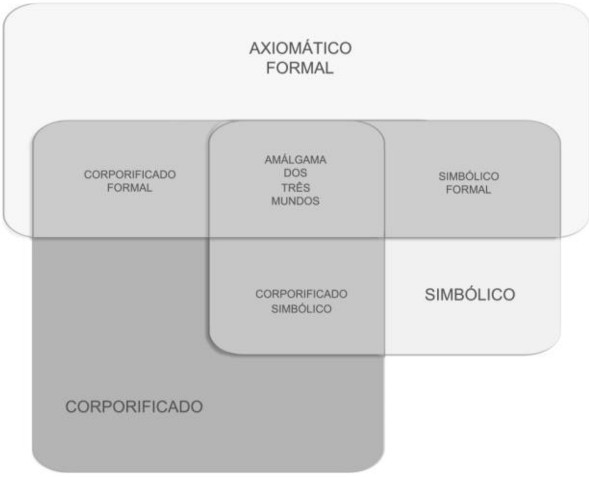
Os Três Mundos da Matemática

No quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, Tall (2004) afirma que para o aprendizado são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático e os categoriza em três distintos, porém relacionados mundos: Mundo Corporificado, Mundo Simbólico e Mundo Formal. Estes não são nem hierárquicos nem obrigatórios e cada indivíduo traça o próprio caminho entre eles. À medida que cada indivíduo "viaja" pelos mundos, surgem dificuldades, que necessitam de ideias anteriores para serem superadas, de modo que a viagem é individual e não é a mesma para cada viajante. Ao contrário,

> diferentes indivíduos lidam com os vários obstáculos de modos diferentes, que acarretam uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem que o indivíduo progrida com sofisticação crescente, de forma significativa, enquanto outros acarretam concepções alternativas, ou mesmo fracassos. (TALL, 2004, 281-288, tradução nossa)

A presença simultânea de características do mundo corporificado, do mundo simbólico e do mundo formal é que contribuirá para uma imagem de conceito rica o suficiente para que possamos afirmar que houve aprendizagem (TALL, 2004). A Figura 1 apresenta uma integração entre os três mundos, que considera que num determinado ponto do desenvolvimento cognitivo um indivíduo pode estar entre dois mundos: "simbólico corporificado", no qual as características são símbolos e corporificações e o próprio simbolo pode ser corporificado; "corporificado formal", no qual o pensamento formal é sustentado pelas corporificações e ainda no qual as idéias corporificadas são traduzidas em estruturas formais; e "simbólico-formal", no qual as idéias simbólicas são traduzidas em formalismo.

Figura 1 - *Três Mundos da Matemática*



Fonte*:* Tall (2013, apud POGGIO, 2012, p. 25, tradução e adaptação nossa)

Mundo Conceitual Corporificado

No mundo conceitual corporificado, ou somente mundo corporificado, observamos e descrevemos as propriedades que conseguimos perceber e sentir de um objeto. O mundo corporificado "cresce a partir de nossas percepções do mundo e consiste no nosso pensamento sobre as coisas que percebemos e sentimos, não só no mundo físico, mas em nosso próprio mundo mental dos significados" (TALL, 2004, p.285, tradução nossa). No mundo corporificado, ocorrem as experiências que envolvem objetos físicos: observação, manipulação, descrição de propriedades, embora o indivíduo não precise manipular fisicamente o objeto, pois pode fazê-lo em pensamento.

Assim, ao pensar numa relação entre duas grandezas diretamente proporcionais, podemos corporificar este conceito, mesmo que mentalmente, "vendo" o gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo e que passa pela origem.

No mundo corporificado, entendemos (e aceitamos) que o conceito de proporcionalidade direta pode ser representado por gráficos, tabelas, exemplos numéricos ou ainda por um texto na língua materna, no qual o participante descreve sua imagem mental, sem se preocupar com uma linguagem formal.

Mundo Operacional Simbólico

O mundo operacional simbólico ou apenas mundo simbólico é aquele no qual os símbolos matemáticos são usados não só para representar e efetuar ações, mas também para representar o produto que é resultado dessas ações. Segundo Tall (2004), o mundo simbólico é composto por símbolos matemáticos que representam as ações e as percepções do mundo corporificado.

No mundo corporificado, duas grandezas proporcionais podem ser representadas, por exemplo, por uma tabela ou por um exemplo numérico. No mundo simbólico, são dadas propriedades matemáticas corretas para esta relação, transformando sua linguagem em expressões do tipo $y = kx$ $\boldsymbol{y = kx}$ ou $y = \frac{k}{x}$ $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ou ainda $a : b :: c : d$ $\boldsymbol{a : b :: c : d}$ (que se traduz por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ e pode ser conhecido por regra de três).

Mundo Formal Axiomático

O mundo axiomático formal ou apenas mundo formal é o mundo das definições, axiomas, teoremas e demonstrações, que constituem o sistema axiomático da Matemática.

Segundo Lima (2007), o trabalho no mundo formal, diferentemente do que pode ocorrer nos outros dois mundos, é caracterizado pela utilização de linguagem formal, com definições formais e axiomas para explicar um conceito matemático e a partir dos quais são feitas deduções e demonstrações.

Em Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006) a definição de grandezas proporcionais é apresentada com características do mundo formal:

> Uma proporcionalidade é uma função $f : IR \to IR$ $\boldsymbol{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = cf(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se c $\neq$ 0 (proporcionalidade inversa). (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2006)

O indivíduo, ao definir o conceito de proporcionalidade inversa, com características corporificadas formais, pode apresentar algo do tipo: "Seja a grandeza y $\boldsymbol{y}$ uma função da grandeza x $\boldsymbol{x}$, isto é, $y = f(x)$ $\boldsymbol{y = f(x)}$. Dizemos que y $\boldsymbol{y}$é inversamente proporcional a x $\boldsymbol{x}$ quando: y $\boldsymbol{y}$é uma função decrescente de x $\boldsymbol{x}$ e, se x $\boldsymbol{x}$ for multiplicado por um número real r $\boldsymbol{r}$, o valor correspondente de y $\boldsymbol{y}$ fica dividido por r $\boldsymbol{r}$. Logo $f(rx) = \dfrac{f(x)}{r}, \forall x, r \in IR, r \neq 0$ $\boldsymbol{f(r.x) = {}^{1}/_{r} \cdot f(x)}$ ".

Por cooptar com a teoria dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004) e por concordar com Lamon (2008) sobre a necessidade de analisar características do raciocínio proporcional de um participante, ao elaborar nosso questionário diagnóstico colocamos questões que nos propiciaram identificar tais características presentes na imagem de conceito de proporcionalidade direta do participante e, ainda, por meio das definições de conceito e das imagens de conceito, quais e quão variadas são as imagens mentais, propriedades e processos, presentes na estrutura cognitiva do participante, referentes ao conceito de proporcionalidade direta.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Após as leituras dos trabalhos que nos ajudaram a verificar maneiras pelas quais o conceito de proporcionalidade é tratado em algumas pesquisas e também diferentes abordagens e escolhas metodológicas em diversos contextos e perspectivas, decidimo-nos por desenvolver um estudo diagnóstico, com caráter investigativo, com o objetivo de responder nossas questões de pesquisa.

Para tal, elaboramos um questionário para a coleta dos dados com 17 questões abertas e semiabertas, envolvendo as definições de proporcionalidade direta e inversa e problemas que nos permitissem verificar com que características dos Três Mundos os participantes trabalham questionamentos que envolvem o raciocínio com proporções. O instrumento foi aplicado a 51 alunos do 3º ano do Ensino Médio, que passaram por todo o estudo de grandezas direta e inversamente proporcionais no Ensino Fundamental e trabalharam com problemas que envolvem razão, proporção e representação gráfica de funções, que relacionam grandezas direta ou inversamente proporcionais, no Ensino Médio.

Dentre as 17 questões do instrumento diagnóstico, vamos nos ater às seis primeiras, que tratam da proporcionalidade direta e representações gráficas associadas, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) um dos objetivos do ensino de Matemática é desenvolver

> por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: * representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional. (BRASIL, 1998, p.82)

ANÁLISE

No que segue, colocamos cada uma das seis questões escolhidas para apresentar neste trabalho, seguidas por algumas das respostas dadas pelos alunos e pelas respectivas análises.

1. Escreva com suas palavras o que você entende por proporcionalidade direta.

Colocamos esta questão com o objetivo de identificar a definição de conceito (TALL; VINNER, 1981) de cada participante da pesquisa, relativa ao conceito de proporcionalidade direta e identificar com que características dos Três Mundos da Matemática define tal conceito. Pedimos no enunciado que a resposta fosse "com suas palavras", para que o participante exponha o que considera a sua definição de conceito.

A partir das respostas dadas, elaboramos um quadro com nossa classificação.

Quadro 1 – *Categorias de análise da Questão 1*

Classificamos por	Quando a resposta apresentou, em língua materna
Características corporificadas (C)	Relação entre duas grandezas ou dois valores
	Uma reta
	Imagem mental de uma figura

Características corporificadas e formais (CF)	Dá a entender a relação entre duas grandezas explicitando que a razão entre as mesmas é constante.

Dentre os 47 participantes, 25 se referem a duas grandezas (ou dois valores) com frases do tipo: “quando uma aumenta a outra aumenta”, “crescem de maneira igual”, “crescem juntas”, “crescem o mesmo tanto”, ou se referem a uma reta, o que classificamos como textos com características corporificadas (C). Estas ideias não garantem a existência de uma relação de proporcionalidade direta, pois estão relacionadas a qualquer função crescente e as consideramos destituídas de características formais (F), pois não são suficientes para definir o conceito; 8 participantes se referiram à proporcionalidade direta como uma reta, sem mencionar que a mesma passa pela origem do sistema cartesiano, como por exemplo: “Eu entendo que a proporcionalidade direta é uma reta subindo constantemente em linha reta.” Classificamos esta definição com características corporificadas (C), pois consideramos que este aluno tem na imagem de conceito de proporcionalidade direta o gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo. Consideramos definições com características corporificadas formais (CF) respostas que, embora não apontem características dos Três Mundos, permitem que o participante trabalhe com o conceito, pois mostram existir relação entre as grandezas e explicitam que a razão entre elas é constante.

> Na Proporcionalidade direta existem duas grandezas. Se pode descobrir se a grandeza é diretamente proporcional quando se divide os valores das duas grandezas, assim se obtendo uma K -> constante. E sempre os gráficos de proporcionalidade direta constituem-se por uma reta. (Aluno 30)

Nenhum participante deste grupo apresentou simultaneamente características dos *Três Mundos da Matemática*, ou seja, apresentou simultaneamente *características formais, simbólicas* e *corporificadas* (CSF).

Quadro 2 – *Caracteristicas dos Três Mundos na Definição de Conceito de proporcionalidade direta*

Definição de Conceito	
Características corporificadas (C)	29
Características corporificadas formais (CF)	04
Ausência de características (-)	14

Respostas dadas	47
Não responderam (n/r)	04

2. Dê um exemplo de proporcionalidade direta.

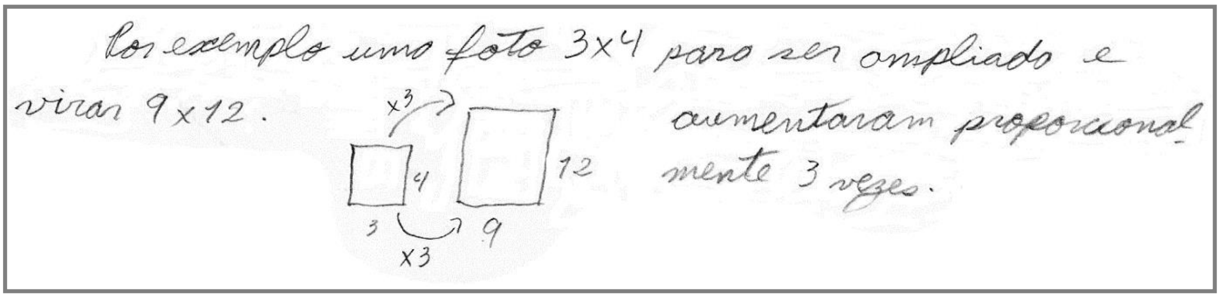
Se o participante não expressou formalmente a definição na Questão 1, mas nesta questão traz um exemplo que mostra o uso da ideia de maneira correta, o situamos no *mundo corporificado* ou no *mundo simbólico*, dependendo do exemplo, mas com características do *mundo formal*.

Quadro 3 - Categorias de análise da Questão 2

Classificamos por	**Quando a resposta apresentou**
Características corporificadas (C)	Tabela com a ideia de proporcionalidade direta correta, ou seja, dados corretos, mas sem justificativa. Assim não podemos afirmar que este participante tenha características formais
	Gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo que está de acordo com a proporcionalidade direta, mas sem justificativas. Ideias corretas.
	Texto com exemplo na língua materna, com ideias corretas
Características simbólicas (S)	Forma algébrica e não trouxe nenhum componente formal, pois não justifica a resposta. Expressão algébrica com a ideia de proporcionalidade direta correta.
Características corporificadas e formais (CF)	Explicitou semelhança de figuras e valor de ampliação com características corretas.
	Tabela com ideias corretas que representa a proporcionalidade direta e acrescentando haver uma constante de proporcionalidade direta dando seu valor.
Características corporificadas e simbólicas (CS)	Gráfico de uma reta que está de acordo com a proporcionalidade direta com características corretas e a expressão algébrica, não generalizada, da função.
C* ou S*	Respostas equivocadas

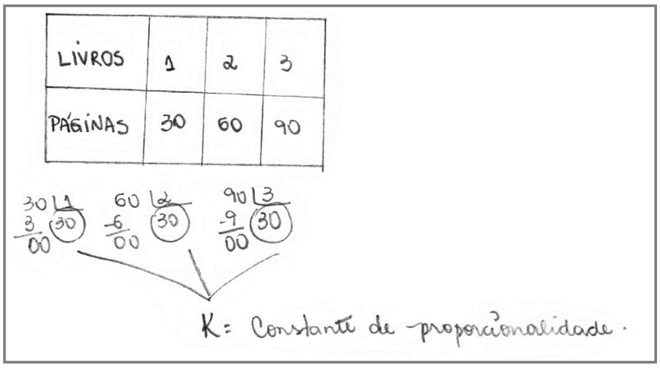
Na análise das respostas dos 43 participantes, encontramos 8 que deram como exemplo de proporcionalidade direta uma tabela com dados corretos, mas sem explicitar o porquê dos valores; 6 que apresentaram gráficos de acordo com a proporcionalidade direta, mas sem justificar o porquê do gráfico; e 2 que apresentaram um exemplo na língua materna, como o Aluno 50, que escreveu: "*1 kg de maçãs custa R$ 2,00, logo 2 kg de maçãs custa R$ 4,00 e 20kg custa R$ 40,00".* Estes exemplos possuem ideias corretas sobre a proporcionalidade direta e os classificamos como com *características corporificadas* (C). Apesar de ser esta uma pesquisa diagnóstica, ousamos perguntar: será que estes alunos ampliaram a própria *imagem de conceito* com uma ideia com *características corporificadas* (C)? Alguns participantes apresentaram o conceito de semelhança de figuras (fotos, figuras geométricas) com características corretas e explicitando o fator de ampliação; por esta razão, consideramos tais respostas com *características corporificadas formais* (CF).

Figura 2 – Resposta do Aluno 10 para a Questão 2, com características corporificadas formais (CF)



Consideramos também com *características corporificadas formais* (CF) 3 respostas, com tabelas com ideias corretas, que explicitaram a constante de proporcionalidade e seu valor, como é o caso do Aluno 30 (ver **Figura 3**).

Figura 3 - Resposta do Aluno 30 para a Questão 2, com características corporificadas formais (CF)



*C*lassificamos a resposta "*Uma proporcionalidade direta 2y=4x essas duas grandezas são diretamente proporcional"* com *características simbólicas* (S), mesmo não sabendo se o que o participante quis expressar foi uma equação ou indicar que dobrando o y, o x fica multiplicado por 4.

Um participante deu como exemplo de proporcionalidade direta o gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo passando pela origem do sistema de coordenadas e a identificou como "*y=2x"*, o que classificamos com *características corporificadas simbólicas* (CS).

Entre as respostas apresentadas, 5 não apontaram características nem *formais*, nem *simbólicas* e nem *corporificadas*, ou porque não trouxeram dados suficientes para as classificarmos.

Nenhum participante apresentou em sua resposta *características simbólicas formais* (SF), explicitando algo do tipo "*y=k.x k>0".* Nenhum participante deste grupo apresentou simultaneamente características dos *Três Mundos da Matemática*, ou seja, apresentou *características formais, simbólicas* e *corporificadas* (CSF).

Quadro 4 – Classificação geral da Questão 2

Questão 2	
Características corporificadas (C)	16
Características corporificadas equivocadas (C*)	08
Características corporificadas formais (CF)	08
Características simbólicas (S)	03
Características simbólicas equivocadas (S*)	02
Características corporificadas simbólicas (CS)	01
Ausência de características (-)	05
Respostas dadas	43
Não responderam (n/r)	08

As Questões 3, 4 e 5, a seguir, têm como objetivo verificar se o participante associa gráficos, de forma correta ou não, à ideia de proporcionalidade direta. Ao trabalhar com gráficos, o aluno mostra que possui na *imagem de conceito* características do *mundo corporificado*. A análise destas três questões, junto com as das Questões 1 e 2, permite comparar as respostas para verificar possíveis contradições, sejam elas matematicamente corretas ou não.

3. Esboce um gráfico que represente duas grandezas diretamente proporcionais. **Explique**.

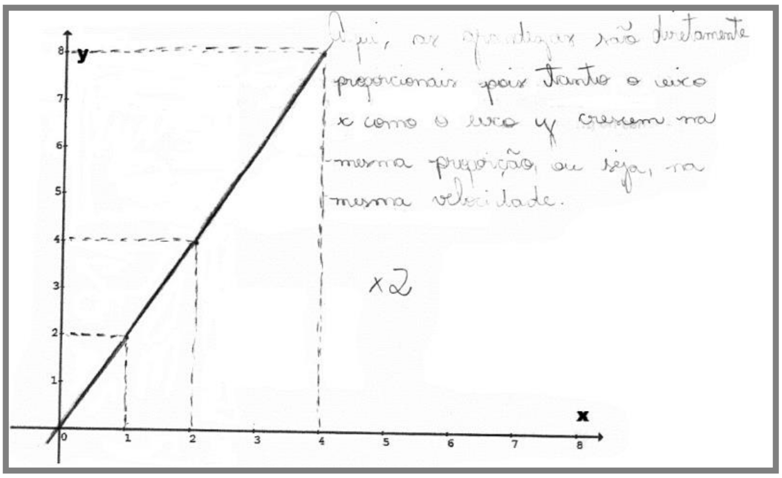
Se apresentados gráficos de funções do tipo $y = kx$, $\mathrm{y} = \mathrm{k.x}$com k>0, podemos afirmar, por meio da análise das respostas dadas às outras questões, que o participante, além de *características corporificadas*, também apresenta *características formais*, mostrando uma “trajetória” que passa pelo *mundo corporificado* e pelo *mundo formal*.

Quadro 5 – Categorias de análise da Questão 3

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	Gráfico que corresponde à proporcionalidade direta.
Características corporificadas e simbólicas (CS)	Junto com o gráfico uma equação algébrica correta, ou seja, que corresponde ao gráfico apresentado.
Características corporificadas formais (CF)	Uma justificativa que complete o conceito, dando a entender que o participante é capaz de esboçar outro gráfico de proporcionalidade direta.
Ausência de características	Gráficos que não correspondem a uma relação de proporcionalidade direta.

Apresentaram o gráfico de proporcionalidade direta correto, sem identificar a constante de proporcionalidade correspondente, 24 dentre os 43 participantes; classificamos estas respostas com *características corporificadas* (C).

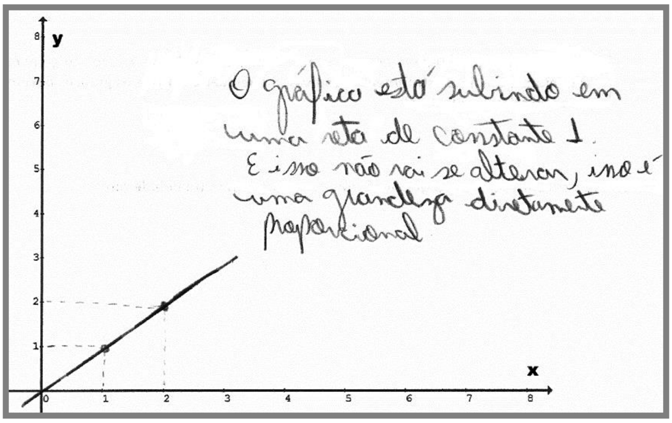
Figura 4 – Resposta do Aluno 1 para a Questão 3, com características corporificadas (C)



Um participante apresentou o gráfico de proporcionalidade direta com a respectiva equação algébrica, o que classificamos uma resposta com *características corporificadas simbólicas* (CS). Um gráfico que representa uma relação de proporcionalidade direta e no qual se destaca a existência de uma constante de proporcionalidade, como o Aluno 34 (ver

Figura 5), é uma resposta que classificamos como com *características corporificadas formais* (CF), embora possamos questionar se este participante só atribui à reta y=x a proporcionalidade direta.

Figura 5 – Resposta do Aluno 34 para a Questão 3, com características corporificadas formais (CF)



Entre as respostas apresentadas, 15 não apontaram características nem *corporificadas,* nem *simbólicas,* nem *formais*. Ao analisar os tipos de gráficos apresentados, verificamos que os participantes desta pesquisa mostraram ter, na *imagem de conceito*, como gráfico de proporcionalidade direta: 27 referem-se a uma reta com coeficiente angular positivo e passando pela origem (uma função linear); 2, a uma função afim com coeficiente angular positivo; 1, a uma função afim com coeficiente angular negativo; e 1, a uma parábola com concavidade para baixo.

Quadro 6 – Classificação geral da Questão 3

Questão 3	
Características corporificadas (C)	24
Características corporificadas formais (CF)	03
Características corporificadas e simbólicas (CS)	01
Ausência de características (-)	15
Respostas dadas	43
Não responderam (n/r)	08

4. Esboce um gráfico que **não** represente uma relação de proporcionalidade direta. **Explique**.

A partir das respostas, podemos verificar se o participante tem, em sua *imagem de conceito*, gráficos que não representam proporcionalidade direta. Com respostas em branco, ou respostas do tipo "não conheço" ou "não sei", seria importante, no nosso entender, investigações posteriores que busquem o porquê disto acontecer.

Quadro 7 – Categorias de análise da Questão 4

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	Um gráfico que não corresponde à proporcionalidade direta.
Características corporificadas e simbólicas (CS)	Junto com o gráfico uma equação algébrica correta, ou seja, que corresponde ao gráfico apresentado.
Características corporificadas e formais (CF)	Junto com o gráfico uma justificativa que complete o conceito
Ausência de características (-)	Gráficos que não correspondem a uma função

O gráfico desta questão foi utilizado, junto com o da Questão 3 e as respostas da Questão 5, para verificar se há alguma contradição nessas respostas, para cada aluno. Dentre os 42 participantes que responderam esta questão, 32 apresentaram um gráfico correto para a não proporcionalidade direta; 28, respostas classificadas com *características corporificadas* (C); 3, com *características corporificadas formais* (CF); e 1, com *características corporificadas simbólicas* (CS). Entre os esboços, tivemos: 14 com curvas não retas (inclusive parábolas), 11 com função linear por partes e 5 com retas com coeficiente angular negativo. Três alunos acrescentaram, junto ao gráfico esboçado, uma expressão algébrica diferente da do gráfico. Entre as respostas apresentadas, 10 não apontaram características nem *corporificadas,* nem *simbólicas,* nem *formais*, pois os gráficos não correspondem a uma função.

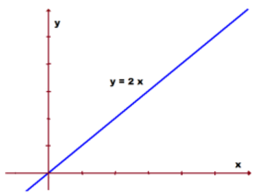
Quadro 8 – Classificação geral da Questão 4

Questão 4	
Características corporificadas (C)	28
Características corporificadas formais (CF)	03
Características corporificadas simbólicas (CS)	01
Ausência de características (-)	10
Respostas dadas	42
Não responderam (n/r)	9

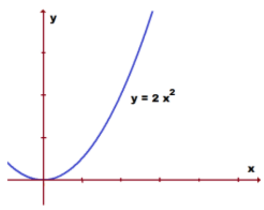
5. A seguir são apresentados gráficos que relacionam as grandezas *x*x e *y*. Em cada um deles, **explique**, com suas palavras, se a relação existente entre *x* e *y* é de proporcionalidade direta ou não.

Quadro 9 – Gráficos da questão 5

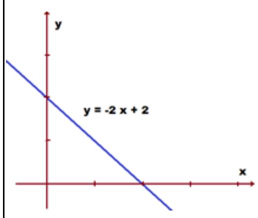
(a)



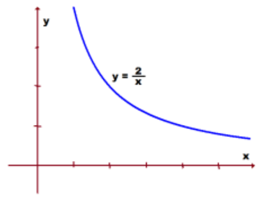
(b)



(c)



(d)



Queríamos verificar se o participante, diante de esboços gráficos, aponta a alternativa (a) como a única em que o gráfico representa proporcionalidade direta entre as grandezas *x* e *y*xy.

Quadro 10 – Categorias de análise da Questão 5

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	Alternativas corretas, com justificativa aparentemente visual e não formal ou sem justificativa.
	Ter selecionado as alternativas (a) e (b) de maneira a dar entender que tem na imagem de conceito de gráfico da proporcionalidade direta uma função crescente. Justificativas visuais, não formais.
	Ter selecionado as alternativas (a) e (c) de maneira a dar entender que tem na imagem de conceito de gráfico de proporcionalidade direta uma reta com coeficiente angular >0 ou com coeficiente angular <0. Justificativas visuais, não formais.
Características corporificadas formais (CF)	As alternativas corretas e a justificativa com alguma ideia formal sobre o gráfico da proporcionalidade direta, como por exemplo, "a razão entre as grandezas deve ser constante".
Ausência de características (-)	Justificativas que não concordam entre si e que não vimos pontos em comum, do tipo é direta porque é crescente, etc. Ou não respondeu todas as alternativas.
(E)	Casos que não compreendemos a resposta do participante e pensamos seria interessante realizar uma entrevista.

Dentre as 42 respostas para esta questão, classificamos 32 com *características corporificadas* (C) e 1, com *características corporificadas formais* (CF). Interpretamos que 17 participantes têm na imagem de conceito de proporcionalidade direta o gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo; 9, uma função crescente; e 9, uma reta com coeficiente angular positivo ou negativo.

Quadro 11 – Classificação geral da Questão 5

Questão 5	
Características corporificadas (C)	32
Características corporificadas formais (CF)	01
Ausência de características (-)	04
Respostas dadas	42
Entrevista (E)	05
Não responderam (n/r)	09

Em relação à representação gráfica da proporcionalidade direta, que é proposta nas questões 3, 4 e 5, apresentamos um quadro com o resumo das respostas dadas pelos participantes, o que nos dá uma idéia da variedade de imagens de conceito subjacentes.

Quadro 12 - Síntese dos Gráficos na Imagem de Conceito de Proporcionalidade Direta de cada Aluno

	PROPORCIONALIDADE DIRETA
1	Reta com coeficiente angular>0
2	Reta com coeficiente angular>0
3	Função Crescente
4	
5	Reta com coeficiente angular>0
6	
7	
8	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
9	
10	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
11	Reta com coeficiente angular>0
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	Função Crescente
23	
24	Reta com coeficiente angular>0
25	Reta com coeficiente angular>0
26	
27	Função Crescente
28	Função Crescente
29	Função Crescente
30	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
31	Reta com coeficiente angular>0
32	
33	Reta com coeficiente angular>0
34	Reta com coeficiente angular>0
35	Reta com coeficiente angular>0
36	
37	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
38	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
39	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
40	Reta com coeficiente angular>0
41	Reta com coeficiente angular>0
42	Função Crescente
43	
44	Função Crescente
45	Reta com coeficiente angular>0
46	Função Crescente
47	
48	Reta com coefic.angular>0 ou coefic.angular<0
49	
50	Reta com coeficiente angular>0
51	Reta com coeficiente angular>0

6. Escreva com suas palavras qual sua **primeira ideia** para resolver o seguinte problema: “Um automóvel percorre uma distância de 48 quilômetros em 02 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 06 horas?”. **Explique o porquê desta ideia.**

O objetivo desta questão é identificar algumas características que estão presentes na *imagem de conceito* (TALL; VINNER, 1981) do participante e que sejam as primeiras a emergir diante do questionamento. Com a explicação dada, pretendemos identificar se ele associa a ideia de proporcionalidade direta ao enunciado, pois o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo. Para resolver o problema, o participante pode utilizar o método de redução à unidade/taxa unitária, ou seja, achar a constante de proporcionalidade, encontrando a distância percorrida em 1 hora e então multiplicar por 6 horas. Neste caso, vamos considerar esta resposta com *características formais* (F), pois encontrando a distância percorrida em 1 hora é possível calcular a distância em qualquer tempo. Este problema também pode ser resolvido pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas: “se em 02 horas o automóvel percorre 48 km, mais 02 horas percorrerá 96 km e mais 02 horas percorrerá 144 km”. Neste caso, o participante apresenta *características corporificadas* (C). Para ser categorizada com *características formais* (F), a resolução por este método precisaria ser acompanhada da explicação do porquê dessa ideia e se o participante consegue resolver o problema com um tempo diferente, por exemplo 7 horas. Ou então, para resolver o problema, o participante pode aplicar a noção de proporcionalidade direta por meio da regra de três, onde a grandeza dd (distância) é diretamente proporcional à grandeza hh (horas): $\frac{48}{2}=\frac{d}{6}$ $\frac{48}{2}=\frac{d.}{6}$. Consideramos esta resolução com *características simbólicas* (S), pois este método pode ser olhado como um proceito, que encerra o conceito de proporcionalidade direta e o processo, de que temos que fazer $48*6=2*d$ **Erro! Dígito esperado.**para calcular o valor de d. d.E surge a pergunta: Escolhido qualquer um dos métodos, o participante sabe justificá-lo?

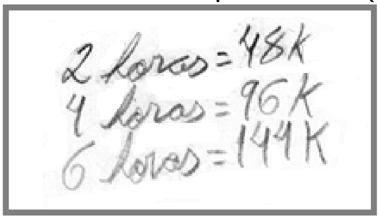
Quadro 13 – Categorias de análise da Questão 6

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	A resolução pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas, sem dar a entender haver uma relação de proporcionalidade direta.
Características simbólicas (S)	Reconhecimento por meio do símbolo, do processo e do conceito, que representa (proceito), ou seja, manipulou os símbolos (processo) corretamente e mostrou o entendimento do conceito.
Características corporificadas formais (CF)	A constante de proporcionalidade pelo método de redução à unidade/taxa unitária, encontrando a distância percorrida em 1 hora e multiplicou por 6 horas. Dá a entender que encontrando a distância percorrida em 1 hora é possível calcular a distância em qualquer tempo
Características corporificadas e simbólicas (CS)	O algoritmo da regra de três de maneira correta (S) e uma imagem corporificada.
Ausência de características (-)	Apresentou uma conta não relacionada a um problema de proporcionalidade direta, que só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais.
Entrevista (E)	Casos que não compreendemos a resposta do participante e pensamos seria interessante realizar uma entrevista

O que inicialmente chamou nossa atenção foi que apenas 11, dentre os 46 participantes, explicitaram a primeira ideia para resolver o problema; os outros 10 explicitaram a primeira ideia e também resolveram o problema, dando um valor como resposta, como o Aluno 12: "*144. É só multiplicar por 3. 48x3=14. 2x3=6"*; o restante dos alunos resolveu o problema.

Quando o participante utilizou o método do fator de mudança, nem sempre pudemos ter certeza se o problema foi resolvido com *características formais* (F) relacionadas à proporcionalidade, pois ficou a dúvida: se os dados do problema não fossem números múltiplos, como será que ele resolveria? Se invés de 6h, tivéssemos usado 7h? Na nossa análise, um fator que influenciou para considerarmos a resposta com *características formais* (F) foi julgar se o participante resolveria o problema mesmo se o valor pedido da distância fosse o correspondente a 7 horas.

Figura 6 – Resposta do Aluno 31 para a Questão 6, pelo método do fator de mudança, com características corporificadas (C)



Interpretando as respostas obtidas, julgamos que se este questionário diagnóstico for aplicado novamente, deveríamos: não utilizar valores múltiplos; colocar exemplos em que o valor a ser obtido seja menor do que o dado, isto é, conhecendo a distância percorrida em 7 horas, determinar a percorrida em 3 horas, por exemplo. Ficamos com uma pergunta: será que o possível equívoco da grande maioria desses participantes em ter definido a proporcionalidade direta como “quando um aumenta o outro aumenta” os induziu a tratar o problema como de proporcionalidade direta e consequentemente utilizar um “procedimento”?

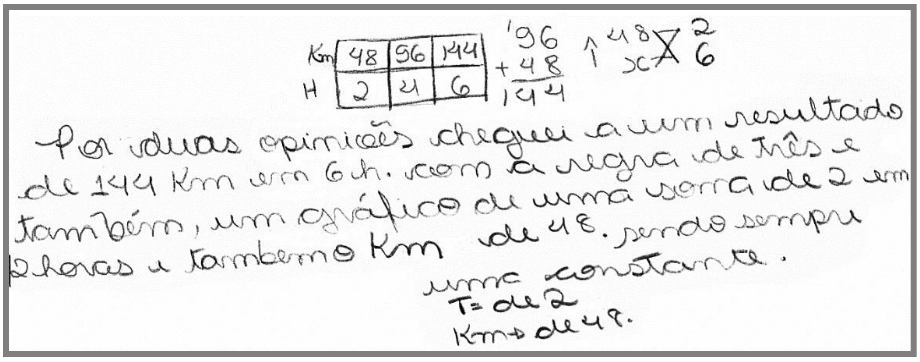
Embora estivessem respondendo um questionário que envolve a ideia de proporcionalidade direta, somente 3 participantes associaram explicitamente essa ideia ao enunciado do problema e nenhum explicitou que a velocidade do automóvel é constante, o que no caso desta questão é uma condição necessária para existir a proporcionalidade direta entre as grandezas, pois é a própria constante de proporcionalidade. Se o participante argumentou que em 1 hora o carro anda 24 km, dando a entender ser esta a constante de proporcionalidade, consideramos sua resposta com *características formais* (F), como o Aluno 01:

> A primeira ideia seria dividir o nº de quilômetros percorridos em 2 horas por 2 para se obter o nº de kms percorridos em 1 hora. Logo após, multiplicar esse valor por 6, que é o solicitado no exercício. Eu pensei nesta ideia para resolver o exercício porque essa é a maneira mais

> fácil para se achar o nº de kms percorridos seja qual for o tempo. (Aluno 01).

Na análise desta questão, em algumas respostas surgiu uma dúvida, a mesma que tivemos quando da análise da Questão 1, em que a palavra “aumenta” parece estar ligada à operação adição e não à multiplicação. Em algumas respostas, fica subentendido que a proporcionalidade direta existe porque aos valores de uma grandeza somam um determinado valor e aos valores da outra também, como é o caso do Aluno 04 (ver **Figura 7**). Este participante utilizou o algoritmo da regra de três com processo e conceito corretos, mas ao apresentar os valores em uma tabela menciona que “soma 2 nas horas e soma 48 nos quilômetros”.

Figura 7 – Resposta do Aluno 04 para a Questão 6, com características corporificadas simbólicas (CS)



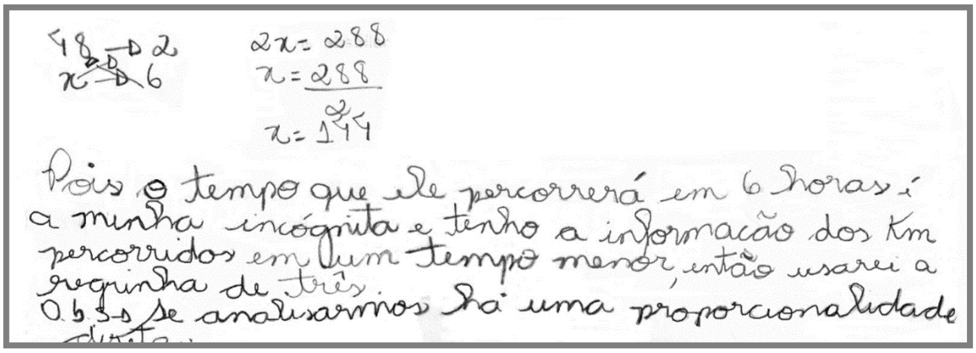
Será que se este aluno visse a Tabela 1, consideraria existir uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas *x* e *y*? Na linha de cima são somados 2 e na de baixo 4 e ambas ‘aumentam´.

TABELA 1

x	2	4	6
y	5	9	13

Uma resposta, a do Aluno 24 (ver **Figura 8**), foi classificada com características dos Três Mundos da Matemática simultaneamente, ou seja, interpretamos que nesta questão o participante transitou pelo *mundo corporificado,* pelo *mundo simbólico* e pelo *mundo formal* (CSF)*,* pois utilizou o método da regra de três ao escrever a equação das grandezas diretamente proporcionais, manipulou os números de maneira correta e mencionou ser este um problema de proporcionalidade direta.

Figura 8 – Resposta do Aluno 24 para a Questão 6, com características corporificadas, simbólicas e formais (CSF)


48 → 2
x → 6

2x = 288
x = 288/2
x = 144

Pois o tempo que ele percorrerá em 6 horas é a minha incógnita e tenho a informação dos Km percorridos em um tempo menor, então usarei a reguinha de três.
Obs: se analisarmos há uma proporcionalidade direta.

Dos alunos que responderam a questão, deixando as contas e justificando os resultados, 8 mostraram explicitamente que não têm, na *imagem de conceito*, que este tipo de problema só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais, isto é, a velocidade é a constante de proporcionalidade entre o espaço percorrido e o tempo, no caso de um movimento com velocidade constante.

Três alunos acharam a resposta multiplicando 48 quilômetros por 6 horas, como o Aluno 39: “*Ele percorrerá 288 quilómetros em 6 horas. Este problema foi criado para saber quanto o carro percorrerá e para saber-se nós estamos bom na multiplicação*.” A resposta deste aluno mostra que, diante do questionamento e do pedido para dar a *primeira ideia*, pensa corretamente na multiplicação como “operação a ser feita”, mas faz isso com os dados do problema, sem atentar para o fato que 48 quilômetros é o que o carro percorre em duas horas. Além disso, justifica o problema como um exercício que o professor colocou para verificar se “… estamos bom na multiplicação…”.

Quadro 14 – Classificação geral da Questão 6

Questão 6	
Características corporificadas (C)	19
Características corporificadas formais (CF)	13
Características simbólicas (S)	01
Características corporificadas simbólicas (CS)	04

Características corporificadas, simbólicas e formais (CSF)	01
Ausência de características (-)	07
Respostas dadas	46
Não responderam (n/r)	05
Entrevista (E)	01

CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos as seis primeiras questões de nosso instrumento, que estão relacionadas com as ideias de proporcionalidade direta e com as seguintes questões de pesquisa: "*Qual a definição de conceito que alunos do Ensino Médio dão de proporcionalidade direta?"; "Qual a imagem de conceito que alunos do Ensino Médio têm de proporcionalidade direta?"; "Com que características, entre formais, simbólicas e corporificadas, esses alunos trabalham questionamentos que envolvem a proporcionalidade direta?".*

Com a análise dos protocolos, podemos responder essas questões:

A *definição de conceito* que esses alunos deram de proporcionalidade direta tem características do *mundo corporificado,* não apresenta *características simbólicas* e pode ser resumida por "*quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta*": 29 participantes apresentaram, em suas respostas, características essencialmente *corporificadas*, dos quais 18 trouxeram a ideia "quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta"; 5 mencionaram uma "*reta*"; 4 descreveram uma imagem; 1 deu um exemplo com a ideia de semelhança de figuras; e 1, um exemplo contextualizado. Apenas 4 participantes apresentaram *características corporificadas formais*, pois explicitaram, além da ideia "quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta", que existe nesta relação uma constante de proporcionalidade, dada pela razão entre as duas grandezas. Com uma concepção fortemente arraigada: "*proporcionalidade direta: quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta"* não percebem que esta definição pode trazer exemplos que não são de proporcionalidade direta.

Não tivemos nenhum caso, nesta pesquisa, em que um participante, sem uma *definição de conceito* de proporcionalidade direta com *características formais*, mostrasse, ao longo das questões, uma *imagem de conceito* rica que nos convencesse que desenvolveram o pensamento proporcional.

Em relação à segunda questão de pesquisa, não podemos afirmar qual é a imagem de conceito de cada participante, uma vez que não foram feitas entrevistas que nos fornecessem elementos para detalhá-la. No entanto, os dados nos permitem afirmar que a *imagem de conceito* de proporcionalidade direta apreendida dos nossos participantes apresenta características essencialmente *corporificadas.* Num total de 263 respostas (foram excluídas as respostas em branco), referentes às seis questões propostas e nas quais deram exemplos, resolveram um problema de proporcionalidade e trabalharam com gráficos, 148 dessas respostas apresentaram apenas *características corporificadas.* Nas 115 respostas restantes, 7 apresentaram *características corporificadas simbólicas*; 4, *características simbólicas*; 32, *características corporificadas formais*; 1*características corporificadas simbólicas e formais*; em 55 não conseguimos identificar características dos *Três Mundos da Matemática;* na questão dois, 8 respostas apresentaram características corporificadas equivocadas e 2, características simbólicas equivocadas; e 6 das respostas só poderiam ser esclarecidas mediante entrevistas.

No que diz respeito à representação da variação de grandezas diretamente proporcionais em um sistema de coordenadas cartesianas, a partir dos dados fornecidos pelas respostas das questões 3, 4 e 5, podemos destacar que: 15 participantes têm o gráfico de uma reta com coeficiente angular positivo passando pela origem; 8 participantes têm o gráfico de uma função crescente; 8 uma reta com coeficiente angular positivo ou com coeficiente angular negativo; e o restante, 20 participantes, não pudemos concluir pois, ou não responderam as questões especialmente elaboradas para tal, ou deram respostas contraditórias.

Podemos resumir nosso diagnóstico afirmando que, em relação às respostas dadas sobre a proporcionalidade direta, estes alunos possuem uma *imagem de conceito* pobre, apresentando exclusivamente *características corporificadas*, baseadas em um gráfico de “reta com coeficiente angular positivo”; e, quando mostram características do *mundo simbólico,* estas não correspondem a este conceito. A *definição de conceito* deste grupo, para a proporcionalidade direta, mostra essencialmente *características corporificadas,* com textos muitas vezes equivocados, insuficientes para serem aceitos como uma boa definição, que pudesse ser utilizada como uma substituta da usualmente dada pela comunidade Matemática.

Por fim, ao responder nossas questões de pesquisa, interpretamos que os participantes deste grupo não desenvolveram o pensamento proporcional, pois não mostraram, em suas respostas, uma *imagem de conceito* de proporcionalidade direta rica e diversificada, com características dos *Três Mundos da Matemática,* pois segundo esta teoria, para haver desenvolvimento cognitivo, é necessário que o participante transite pelos *Três* Mundos, por meio de uma ampla gama de experiências, imagens mentais, procedimentos e processos, com características as mais ricas possíveis.

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Começamos nosso estudo em busca de saber se alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa e como trabalham com esses conceitos: se utilizam gráficos, tabelas, textos ou símbolos. Nossa preocupação também foi verificar se estes alunos reconhecem se uma relação é diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional e se reconhecem (ou conhecem) as expressões correspondentes.

Neste trabalho, optamos por apresentar as análises e conclusões que pudemos tirar das respostas dadas às seis primeiras questões de nosso questionário diagnóstico, que dizem respeito: à definição de proporcionalidade direta; ao reconhecimento da representação cartesiana de uma relação de proporcionalidade direta; ao reconhecimento de uma representação cartesiana que não é de proporcionalidade direta; às ideias que aparecem diante de um problema de proporcionalidade direta; e ao conhecimento de exemplos de proporcionalidade direta.

A análise da *definição de conceito deste* grupo causou-nos preocupação, pois não conseguimos detectar características dos *Três Mundos* nas respostas de 18 participantes, para a *definição de conceito* de proporcionalidade direta. Como a teoria dos *Três Mundos da Matemática* considera que o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo passa pelos *Três Mundos*, o que então podemos considerar sobre estes participantes? O que pode ter acontecido? Será que estes alunos não sabem estas definições ou será que não souberam se expressar? Será que estes alunos não entenderam a pergunta ou será que não estão acostumados a dar definições? Entendemos que o motivo precisaria ser investigado, inclusive com a possibilidade de mudança do texto da questão ou mesmo por meio de outras questões com o mesmo propósito.

Em 31 *definições de conceito* de proporcionalidade direta foram usados os verbos "aumentar, subir" e não pudemos constatar se se referiam, na proporcionalidade direta, à adição e não à multiplicação. Esta dúvida poderia ser dirimida em uma entrevista ou mesmo em outra pesquisa.

Os alunos que deram sua *definição de conceito* de proporcionalidade direta, mas na *imagem de conceito* não apresentaram características dos *Três Mundos da Matemática,* nos deixaram esta pergunta: "Será que a causa é não ter *características formais* na *definição de conceito* ou porque a mesma se restringiu a uma definição decorada?".

Na Questão 5, os participantes trabalharam com gráficos e depois de analisarmos as respostas elaboramos algumas perguntas. O gráfico da função $y = 2x^2$ foi apontado por 11 participantes como uma relação de proporcionalidade direta entre *x* e *y* e nenhum deles mencionou que nesta função a proporcionalidade direta é entre y y e x^2 x^2. "Será que o participante não entendeu que essa relação não é a que a questão está pedindo, entre x x e y y?". "Será que por ser o gráfico de uma função crescente, isto induziu que existe proporcionalidade direta, porque "quando uma aumenta a outra também aumenta?".

Na questão de reconhecimento do gráfico de proporcionalidade direta, pelo fato de termos colocado em uma das alternativas apenas o de uma reta com coeficiente angular positivo e que passa pela origem, não pudemos nos certificar se um gráfico de uma função afim do tipo *f(x)=ax+b* seria apontado como de proporcionalidade direta. Esta dúvida nos ocorreu e seria importante inserir, numa questão deste tipo, mais alternativas, uma contendo uma função afim e outra uma função linear por partes e crescente.

Notamos a dificuldade que alguns participantes tiveram ao trabalhar com as questões relacionadas a gráficos de função. Quando esboçaram o gráfico da proporcionalidade direta, apenas 8 participantes o identificaram por meio da expressão algébrica, entretanto 5 o fizeram de modo equivocado. Pudemos perceber que alguns alunos só trabalham com gráficos com pontos isolados, com coordenadas inteiras e que alguns têm dificuldade em lidar com eixos com escalas diferentes e precisam que as escalas estejam indicadas.

Segundo Lamon (2008, p. 108), um participante que desenvolveu o pensamento proporcional apresenta algumas caracteristicas, tais como: compreende covariação; identifica contextos em que a proporção é útil; tem vocabulário para explicar como pensa em situações de proporcionalidade; sabe distinguir situações de proporcionalidade ou não; não tem medo do trabalho com decimais ou números não inteiros. Concordamos com essas ideias e podemos afirmar que nosso diagnóstico mostra que este grupo de alunos do final do Ensino Médio não desenvolveu o pensamento proporcional.

Com nossas questões de pesquisa respondidas e diante dos dados obtidos na análise dos protocolos, surgiram algumas perguntas, tais como "Será que estes alunos não sabem estas definições ou será que não souberam se expressar?", "Será que estes alunos não entenderam a pergunta ou será que não estão acostumados a dar definições?", "Escolhido qualquer um dos métodos de resolução, o participante sabe justificá-lo?", "Por que respostas em branco, ou do tipo ´não conheço´ ou ´não sei´?", "Um participante utilizou o algoritmo da regra de três com processo e conceito corretos, mas ao apresentar os valores em uma tabela menciona que ´soma 2 nas horas e soma 48 nos quilômetros´. Por que isso ocorre?", "Será que a causa é não ter *características formais* na *definição de conceito* ou porque a mesma se restringiu a uma definição decorada?".

Para finalizar este trabalho, esperamos que essas perguntas, e outras que sugerimos pelo caminho, tragam ideias para que novas pesquisas, na área Educação Matemática, sejam realizadas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**.- Matemática: Ensino de quinta a oitava séries. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1998.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional. 2. ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2008.

LESH, R.; POST, T. R.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. 1988. p. 93-118.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do ensino Médio**, 9. ed., Vol. 1. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2006.

LIMA, R. N. **Equações Algébricas no Ensino Médio***:* uma jornada por diferentes mundos da Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

MIRANDA, M. R. (2009). **Pensamento proporcional**: uma metanálise qualitativa de dissertações. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

POGGIO, Ana M. P. P. **Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos Três Mundos da Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.), **As ideias da álgebra.** Tradução H. H. DOMINGUES. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. São Paulo: SEESP, 2008.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.). **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1992. v.25, cap. 2, p. 25-58. (MAA Notes).

TALL, D. O. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 4, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings of the 28th PME**, Bergen, Norway: Bergen University College, [2004]. p. 281-288.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 12, n. 2, p. 151-169, maio. 1981.

TALL, D., **How Humans Learn to Think Mathematically**, Exploring the three worlds of Mathematics, Cambridge University Press, 2013

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, D. O. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

Submetido: dezembro de 2015

Aceito: abril de 2016