DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Professores dos anos iniciais, a prova em fases e a possibilidade de aprender

Teachers of the early grades, the stages test and the possibility of learning

Magna Natalia Marin Pires[1]

Regina Luzia Corio de Buriasco[2]

Resumo

Este trabalho é parte de um estudo de natureza qualitativa e de cunho essencialmente interpretativo no qual se utilizou a análise da produção escrita e uma prova em fases, desenvolvida com nove professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal do Paraná. Essa prova em fases (progressivas) tomada como instrumento de avaliação formativa foi utilizada como um modo de realizar uma reinvenção-guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística e viabilizou analisar o trabalho das participantes em diferentes momentos, para fazer intervenções consideradas oportunas. As questões da prova foram o ponto de partida para o processo de reinvenção. As fases da pesquisa revelaram que diferentes estratégias, por vezes refletindo diferentes níveis, puderam ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem. Para este artigo escolhemos apresentar o estudo da produção uma das participantes.

Palavras-chave: "Educação Matemática Realística", "Formação de Professores", "Prova em Fases", "Reinvenção-guiada".

Abstract

This work is part of a study of a qualitative and essentially interpretative nature in which the analysis of written production was used and a stages test, developed with nine teachers of the early grades of the Fundamental Teaching in a public school in Paraná State. This (progressive) stage test, taken as a formative assessment, was analyzed as a way to achieve of a guided reinvention on the Realistic Mathematics Education perspective, enabled the researcher/trainer to evaluate the participants work in different moments, in order to make interventions considered appropriate. The tests questions were the start point for the reinvention process.The stage of the research revealed that different strategies, sometimes reflecting different levels, could be provoked and used productively in the learning process. For this article we chose to present the study of the production of one participant.

Keywords: "Realistic Mathematics", "Teacher training", "Stages test", "Guided-reinvention".

Introdução

O estudo que originou este artigo diz respeito a uma das ações desenvolvidas no projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" proposto pelo grupo de Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da Universidade Estadual de Londrina, aprovado no Edital

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professora do Depto. de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil. email: magna@uel.br

[2] Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista "Júlio, de Mesquita Filho". Professora do Depto. de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil. email: reginaburiasco@gmail.com

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

CAPES/INEP nº 38/2010 do Programa Observatório da Educação. O projeto tem por objetivo principal fomentar a produção acadêmica relativa à formação de professores que ensinam matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), na busca de subsídios para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB. Nesse trabalho foi utilizada uma *prova em fases*[3] a partir da qual foi realizada uma análise da produção escrita da resolução das questões para a obtenção de informações a respeito do processo de aprendizagem das participantes.

As ações foram organizadas de modo a oportunizar momentos nos quais as pesquisadoras[4] e as professoras participantes assumiram uma atitude investigativa relativa às atividades desenvolvidas ao longo do processo de investigação, a primeira autora assume o duplo papel: o de formadora e o de investigadora.

Os dados foram gerados a partir das resoluções das participantes na Prova em Fases[5], em um movimento contínuo de interação e comunicação considerado aqui como ação de intervenção progressiva.

A intenção da pesquisa que gerou este artigo foi investigar a configuração[6] da análise da produção escrita como ação de intervenção organizada (reinvenção-guiada) de modo que os participantes desenvolvessem sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, comunicar suas ideias matemáticas, enquanto resolvem, interpretam tarefas em uma variedade de situações que envolvem o pensamento matemático. A perspectiva adotada é a da Educação Matemática Realística – RME[7] e como as participantes já são professoras, foi feita uma transferência dos contributos teóricos para a formação continuada de professores em lugar de mantê-los, como originalmente, dirigidos aos alunos.

Participaram da pesquisa: duas pesquisadoras, sendo que uma delas assumiu também o papel de formadora e nove professoras de uma escola municipal de uma cidade situada no norte do Paraná, aqui denominadas PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6, PA7, PA8 e PA9. Contudo, para este artigo, escolhemos apresentar apenas o estudo da produção de uma das participantes.

Pano de fundo

[3] A Prova em Fases é uma adaptação da Prova em Duas Fases idealizada por De Lange (1987).

[4] A pesquisa que deu origem a este artigo é de natureza qualitativa, de cunho essencialmente interpretativo.

[5] A expressão Prova em Fases com letras iniciais maiúsculas será utilizada para indicar que se trata da prova em fases específica da pesquisa que originou este artigo.

[6] Configurar: dar ou tomar forma, feitio; desenhar, esculpir. Ex.: movimentos geológicos configuram as montanhas.

[7] *Realistic Mathematics Education* - abordagem que teve origem no projeto Wiskobas, iniciado em 1968, no então Institute for Development of Mathematics Education, atualmente Instituto Freudenthal.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

De acordo com Freudenthal (1973, 1991), para aprender matemática é preciso ter oportunidade de reinventar a Matemática sob alguma orientação. Nas palavras de Van den Heuvel-Panhuizen (2001), a educação deveria fornecer aos aprendentes a oportunidade "guiada" para "re-inventar" matemática, fazendo-a. Isso significa que, na perspectiva da Educação Matemática proposta por Freudenthal (1973, 1991), o foco não está na Matemática como um sistema fechado, mas na atividade de quem lida com ela, no processo de matematização.

O princípio da reinvenção-guiada leva em conta que o conhecimento não é transmitido, mas elaborado. O processo de reinvenção exige que os aprendentes se envolvam com situações realísticas, com a intenção de matematizá-las, em um processo semelhante ao vivenciado pelo matemático profissional. Nessa direção Gravemeijer e Cobb (2006, p. 63-64) assim se manifestam

> realidade e o que uma pessoa percebe como o senso comum não são estáticos, mas crescem e são afetados pelo processo de aprendizagem do indivíduo. O objetivo da Educação Matemática Realística, então, é apoiar os aprendentes na criação de uma nova realidade matemática. Isto é, para ser realizado pela reinvenção-guiada, ou 'matematização progressiva' – se tomarmos a perspectiva do aprendente (tradução nossa).

Freudenthal (1991) entende "invenções" como passos no processo de aprendizagem e atribui o "re" na invenção porque supostamente a invenção que o aprendente fará, guiado pelo formador, já foi feita, antes, por outros.

Tradicionalmente, nas aulas de matemática, as definições e notações são as primeiras "coisas" que são apresentadas. Contudo, historicamente, sabe-se que, para chegar a uma definição, o conhecimento foi organizado e sistematizado muitas vezes num processo nada retilíneo, até chegar a uma etapa de ser comunicado a outros. Para que as definições e notações tenham sentido para o aprendente, Freudenthal (1991) acreditava que até as definições e notações deveriam passar por um processo de reinvenção.

Um passo essencial para uma discussão a esse respeito é a formação do professor, já que é ele que tem a tarefa de guiar. A discussão dessa formação envolve procurar atingir um equilíbrio sutil entre a liberdade de inventar e a força de guiar. E mais, permitir àquele que aprende satisfazer-se nesse processo. Algumas vezes o aprendente inventará algo que é novo para ele, mas bem conhecido para aquele que guia. Outras vezes não, aquele que guia pode deparar-se com surpresas e deve que estar preparado para enfrentar o desafio de também, ele próprio, estar "reinventando", ao mesmo tempo.

Orientar em um processo de reinvenção implica em o aprendente ter oportunidades constantes de abstração, esquematização, formalização, sistematização, em um contínuo processo de matematização (GRAVEMEIJER, 2005).

De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999, p.116), para Freudenthal, "o núcleo da atividade matemática é a 'matematização', que significa organizar numa perspectiva matemática. Freudenthal (1973, 1991) vê essa atividade dos estudantes como uma maneira de

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

reinventar a matemática" (tradução nossa). Para Freudenthal (1973, 1991), matematizar não é uma atividade exclusiva dos matemáticos. Esse processo pode ajudar na familiarização com os aspectos matemáticos de situações diversas, uma vez que, para ele, no processo de matematização, o aprendente "constrói" matemática.

Avaliação

Segundo Hadji (1994), a avaliação formativa tem por objetivo acompanhar a aprendizagem em curso, informando o professor e o aprendente das condições em que essa aprendizagem está se desenvolvendo, informando sobre o seu próprio percurso, êxitos e dificuldades. Essas informações são necessárias durante o processo uma vez que as decisões tomadas, tanto pelo professor quanto por seus aprendentes, precisam estar respaldadas por elas no decorrer do processo, para que oportunizem as modificações necessárias a fim de que ocorra a aprendizagem.

As obras de Van den Heuvel-Panhuizen (1996), de De Lange (1999), de Hadji (1994, 2011), de Barlow (2006) parecem convergir para um mesmo ideal de avaliação, a avaliação como oportunidade de aprendizagem, o que a coloca em uma perspectiva formativa presente em Allal (1986), Black e Wiliam (2003), Allal e Lopez (2005), Heritage (2007), Buriasco (2009), Pinchok e Brandt (2009), Wilian (2010), Cizek (2010).

Nessa direção, é importante que os aprendentes tenham um *feedback* que possa ajudá-los a se tornarem sujeitos ativos de seu desenvolvimento. Por um lado, para o formador, um *feedback* pode funcionar como uma intervenção didática e, por outro, para o aprendente, provocar uma regulação que é uma atividade pedagógica, na qual assenta o mecanismo de orientação.

A característica formativa deste tipo de regulação se dá pelo feedback e pela adaptação de situações de ensino e aprendizagem feitas após a aplicação do instrumento de avaliação. Não há um número máximo limitante de vezes em que o instrumento pode ser reaplicado e novas adaptações possam ser feitas.

Para Van den Heuvel-Panhuizen (1996), na avaliação, o aprendente pode passar por vários níveis de matematização e, assim, desenvolver sua "própria" matemática. Para reforçar a importância que tem a avaliação nos processos de ensino e de aprendizagem e para torná-la presente nas atividades da escola, essa autora se refere à avaliação usando a expressão "avaliação didática".

A utilização de um instrumento de avaliação da aprendizagem, na qual estejam envolvidas as ações de intervenção e regulação pode contribuir com uma ação de formação continuada, uma vez que pode fornecer informações úteis relativas ao trabalho desenvolvido pelo próprio aprendente visto que, quando em formação, é necessário tomar consciência do desenvolvimento do seu próprio processo de aprendizagem. Essa tomada de consciência é um dos fatores de real interferência na formação do indivíduo (Barlow, 2006), na medida em que se inscreve em um projeto educativo específico, o de favorecer o desenvolvimento daquele que aprende.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Prova em Fases

Uma avaliação utilizada na sala de aula deve permitir que os envolvidos retirem dela informações que possam reorientar sua prática, oportunizem a reflexão e favoreçam a aprendizagem. Um tipo de instrumento que pode atender a esses propósitos é a prova em fases.

A prova em duas fases foi concebida originalmente na Holanda. A ideia inicial consiste em elaborar uma prova que o aprendente resolve em dois momentos: num primeiro, na sala de aula e sem quaisquer indicações do professor; num segundo momento, dispondo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as resoluções iniciais.

Nesta pesquisa utilizou-se a ideia desse tipo de prova, não especificamente com duas fases, mas como vem sendo utilizado por Buriasco nas aulas ministradas em disciplinas da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina nos últimos anos – prova em fases. Com isso, busca-se atender às necessidades e às oportunidades reconhecidas nas resoluções estudadas.

Esse formato de avaliação permite que o aprendente volte a refletir sobre o que ele já escreveu, apoiado nas observações do formador. Ao tentar esclarecer pontos levantados, ele tem a oportunidade, por exemplo, de:

- estabelecer um processo de comunicação por escrito: ao explicar o que fez, pode, ao mesmo tempo, mostrar o que compreendeu das considerações feitas pelo formador;
- refletir sobre sua resposta inicial procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio, podendo descrever e explicar o que fez;
- desenvolver a resolução feita inicialmente.

Os comentários do formador em relação às resoluções do aprendente não dizem respeito a informar se houve acerto ou não, mas a oportunizar que ele possa reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Uma vantagem é que os comentários são específicos para cada aprendente e isso permite uma aproximação maior entre eles, além de exigirem uma ação, uma intervenção no processo de ensino e aprendizagem. Uma avaliação nesse formato permite ao aprendente refletir, comunicar suas ideias, desenvolver a responsabilidade que certamente será necessária, pois a “conversa” por escrito será apenas entre ele e o formador.

Na pesquisa que originou este artigo, o número de fases foi definido pela discussão dos registros iniciais e pelos que vieram em seguida de cada intervenção. O objetivo foi apresentar a utilização de uma prova em fases como um instrumento que pode desencadear uma ação formativa.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

A prova em fases utilizada era composta de onze (11) questões de matemática. Cada uma delas foi selecionada levando em conta a possibilidade de resolver a questão de mais de uma maneira, ou de ter mais de uma resposta.

Por meio da prova em fases, as informações colhidas foram sistematicamente organizadas mediante uma análise das resoluções das professoras nas questões da prova em fases e das anotações feitas pelas pesquisadoras durante os encontros.

Na primeira fase, as questões foram resolvidas sem nenhuma indicação das pesquisadoras, em um determinado tempo (aproximadamente duas horas e meia), em situação de avaliação. Após a primeira fase, as pesquisadoras analisaram as resoluções iniciais de cada questão, fizeram intervenções por escrito pedindo justificativas e/ou esclarecimentos.

Nos encontros posteriores, as professoras trabalharam nas respostas aos questionamentos das pesquisadoras (por aproximadamente uma hora), sempre em duas questões concomitantemente. Quando o entendimento das pesquisadoras era de que a potencialidade das respostas da professora e também da questão tinha sido esgotada, passava-se para outra questão. Dessa maneira, o número de "fases" de cada questão foi diferente, oscilando entre três e dezessete, e, em consequência, o número de fases da prova também variou de professora para professora.

As análises e as discussões apresentadas no decorrer das explorações das resoluções das participantes tiveram como pano de fundo o aporte teórico da RME e da avaliação tomada como oportunidade de aprendizagem. Esse caminho foi trilhado apresentando os dados de forma sistematizada e explorando o fato de os encaminhamentos serem guiados pelas perguntas das pesquisadoras e com a apresentação do que se consideram evidências da aprendizagem das participantes.

Para este artigo escolhemos apresentar o estudo da produção da participante PA1 na Questão 01.

PA1: 36 anos em 2011
Tempo no magistério: 12 anos
Carga horária de trabalho semanal: 40h
Ano do Ensino Fundamental em que leciona (2011): 4º.
Formação Superior: Licenciatura em Ciências Biológicas

A questão 01 foi selecionada porque pode oferecer oportunidade para discutir alguma representação algébrica. Com relação à escolha da participante PA1, se deu pelo fato de suas respostas terem oportunizado iniciar a discussão de uma resolução aritmética e, a partir das intervenções, a representação algébrica e a resoluções de sistemas de equações.

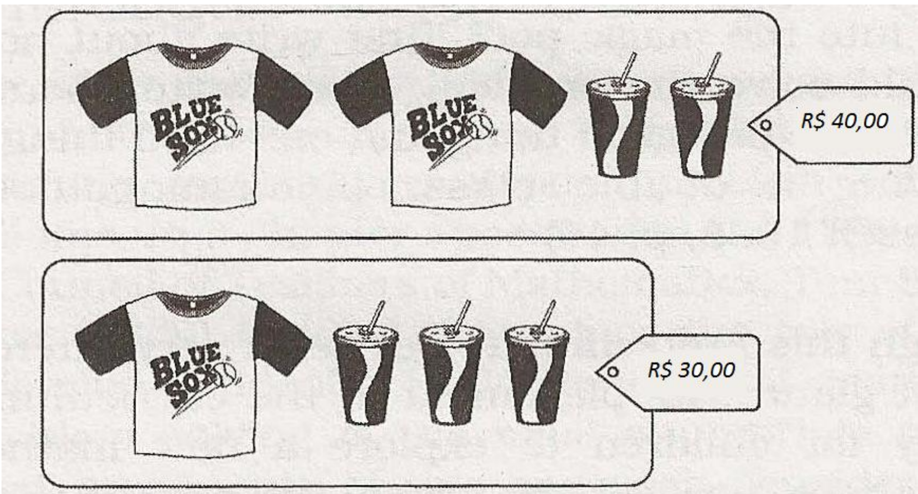
Caso da Professora PA1 – Questão 01

O enunciado da Questão 01 e a resolução inicial de PA1 são apresentados no quadro a seguir.

Quadro 1: Fase 1 – resolução apresentada por PA1 na questão 01

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

1) Observe as informações:



a) Quanto custa a camiseta? Justifique sua resposta.
b) Quanto custa o copo de suco? Justifique sua resposta.

Camiseta custou R$15,00 cada

O suco custou R$ 5,00 cada copo.

Analisando os dois cartazes com as ofertas, eu comparei um com o outro dividindo os preços entre os produtos para chegar ao valor de cada produto.

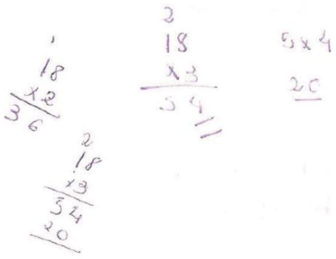
A explicação dada por PA1 abaixo do traço foi feita no dia em que as pesquisadoras pediram uma explicação complementar, se a professora julgasse que, no primeiro momento, não havia justificado sua resposta.

As pesquisadoras alteram a primeira etiqueta para R$44,00. A resposta apresentada por PA1 está de acordo com as condições do problema, mas novo questionamento foi feito para explorar como PA1 chegou ao valor de cada camiseta e de cada copo de suco.

Quadro 2: Fase 2 – pergunta das pesquisadoras relativa à resolução inicial de PA1

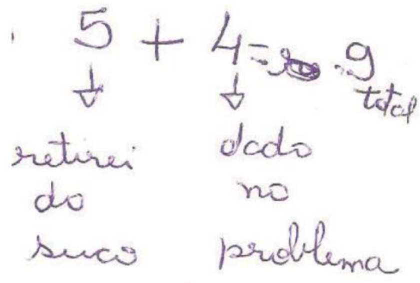
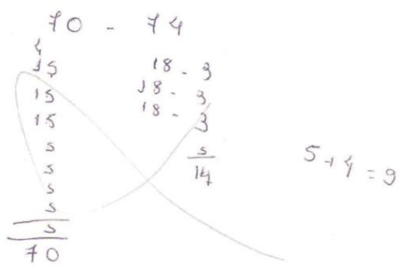
	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

1.	E se na primeira etiqueta fosse $R\$44{,}00$ em vez de $R\$40{,}00$, quais seriam as resposta para a e b?	Camiseta custará $R\$18{,}00$ O suco custou $R\$4{,}00$ Totalizando $R\$74{,}00$[8] 

PA1 apresenta os valores dos itens corretamente, porém não explicita a maneira como foram encontrados. O que chama a atenção é que, na última linha da resposta, ela escreve o total das duas compras, $R\$\ 74{,}00$.

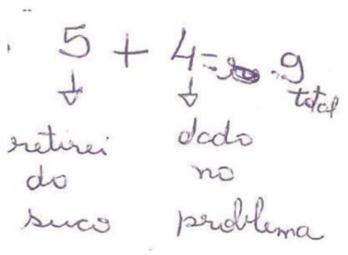
Quadro 3: Fase 3 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA1**
2.	Como você encontrou o valor $R\$18{,}00$ para a camiseta e $R\$4{,}00$ para o suco?	Aumentei o valor da camiseta e diminuí o valor do suco. Retirei 1 real de cada suco totalizando  Distribui 3 reais a mais para cada camiseta ficando: 18 reais camiseta 4 reais suco. 

De acordo com as “contas” apresentadas por PA1 e pela sua explicação, ela trabalha com as duas compras ao mesmo tempo. Na primeira situação ($R\$\ 40{,}00$ para a primeira compra e $R\$\ 30{,}00$ para a segunda compra, preço da camiseta igual a $R\$\ 15{,}00$ e preço do

[8]As respostas dadas pelas participantes foram transcritas na forma original.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524
copo do suco igual a $R\$\ 5{,}00$), como as pesquisadoras mudam a etiqueta da primeira compra de $R\$\ 40{,}00$ para $R\$\ 44{,}00$, ela retira $R\$\ 1{,}00$ de cada copo (duas compras juntas), totalizando $R\$\ 5{,}00$, que somados a $R\$\ 4{,}00$, do aumento que as pesquisadoras propõem na primeira etiqueta, totalizam $R\$\ 9{,}00$.



Ela divide esses $R\$\ 9{,}00$ entre as três camisetas (duas compras juntas), logo o preço de cada camiseta passa de $R\$\ 15{,}00$ para $R\$\ 18{,}00$ e o copo de suco passa de $R\$\ 5{,}00$ para $R\$\ 4{,}00$, porque ela retirou $R\$\ 1{,}00$ de cada copo.

Com a intenção de verificar se PA1 escreve as informações utilizando alguma linguagem algébrica, as pesquisadoras fazem nova intervenção.

Quadro 4: Fase 4 - pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Resposta de PA1**
3.	Se chamarmos cada camiseta de c e cada copo de suco de s, como você representaria esse problema?	$2 \cdot c + 2 \cdot s = 44$ $1\,c + 3 \cdot s = 30$

Quadro 5. Fase 5 - perguntas das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

10 É possível escrever uma fórmula que traduza esse problema?

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 75 \\ x \cancel{-y} = 23 \end{cases}$$

$2x = 75 - 23$

$2x = 52$

$x = \frac{52}{2}$

$x = 26 \rightarrow$ cada peça

$26 + y = 75$

$y = 75 - 26$

$y = 49 \rightarrow$ blusa

$\begin{array}{r} 75 \\ -26 \\ \hline 49 \end{array}$

11 E como é o nome que se dá a $\begin{cases} x + y = 75 \\ x - y = 23 \end{cases}$ que você montou?

Se chama sistema.

Você acertou. O nome completo pode ser considerado como um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, e ele representa o enunciado do problema escrito na linguagem algébrica.

ZE

Revendo o sistema de equações montado por PA1 neste problema:

$$2 \cdot c + 2 \cdot s = 44$$
$$1\, c + 3 \cdot s = 30.$$

e a manipulação apresentada na fase 5, percebe-se que a professora substitui c por x e s por y, depois substitui os valores 18 para x e 4 para y, verificando então que o total pago pelos produtos das duas etiquetas confere:74 reais. Como ela já sabia os valores de c e s (ou x e y), apenas substitui esses valores, o que não deixa de ser a solução do sistema.

Na tentativa de compreender as ações de PA1 e de guiá-la para uma das formas de resolver um sistema de equações com duas incógnitas, prossegue-se com as perguntas.

Quadro 6: Fase 6 – perguntas das pesquisadoras relativas à resolução e as respostas de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

	Perguntas das pesquisadoras	Respostas de PA1
4.	Por que você substituiu c e s por x e y?	A letra está sendo usada apenas para representar os valores, neste problema suco e camiseta. Eu poderia usar qualquer letra para representar esses valores.
5.	Depois você substituiu x por 18 (valor de cada camiseta) e y por 4 (valor de cada copo de suco) e se você não soubesse esses valores, como você faria para encontrá-los em: $2c + 2s = 44$ $1c + 3s = 30$?	Como não tem um c ou um s negativo para simplificar, não consigo resolver.

PA1 responde à pergunta 5 e pode-se inferir, nesse caso, que é possível que ela tenha mais segurança quando as incógnitas são representadas pelas letras x e y. Outra inferência é que também é possível que PA1 saiba resolver sistemas de equações apenas por adição e quando as disposições das incógnitas favoreçam a utilização dessa estratégia.

Na tentativa de que ela própria pudesse encontrar outra maneira de resolver o sistema em questão, neste caso a estratégia de substituição, foi feita nova pergunta.

Quadro 7: Fase 7 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1
6.	Se a soma do peso de uma panela com o peso de uma leiteira é igual a 420 gramas, é correto afirmar que o peso da panela é igual a 420 gramas menos o peso da leiteira? Por quê?	Sim, porque se souber o peso da leiteira e tirar de 420 teremos o peso da panela.

Com essa pergunta, as pesquisadoras pretenderam verificar se PA1 concordava que o preço de uma camiseta poderia ser expresso pela diferença entre 30 reais e o preço de 3 copos de sucos. Então, considerando a segunda equação por ela escrita, pergunta:

Quadro 8: Fase 8 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1
7.	Então se $1c + 3s = 30$, conforme sua resposta à pergunta número 3, é correto afirmar que $1c = 30 - 3s$?	Não, porque 3 é o número de camisetas não o preço de cada uma.

De acordo com a resposta dada à pergunta 8, as pesquisadoras verificam que PA1 não relacionou o exemplo do preço da panela e da leiteira com a equação $1c + 3s = 30$. A

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

saída que as pesquisadoras encontram, naquele momento, foi investir mais na equação apresentada por PA1 na fase 4 e pergunta:

Quadro 9: Fase 9 – perguntas das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Resposta de PA1**
8.	a) Mas então o que é $3s$ na expressão $1c + 3s = 30$? a) Por que existe c no 1 e s no 3 e nada no 30?	Porque eu sei que $1c$ representa o número de camisetas e $3s$ o número de sucos, o 30 é o valor pago pelos itens que estão sendo vendidos.

A resposta dada por PA1 não esclarece se ela considera que c seja o valor da camiseta e s o valor do copo de suco, então as pesquisadoras resolvem retomar a conversa levantada na fase anterior.

Quadro 10: Fase 10 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Resposta de PA1**
9.	Você disse que "$1c$ representa o número de camisetas", então o que representa cada camiseta?	Quando eu analisei a expressão $1c + 3s = 30$ e afirmei que $1c$ é para uma camiseta é porque na informação do cartaz contém apenas 1 camiseta, logo $1c$ = uma camiseta, já os copos de sucos são 3, então: $3s$ = três camisetas. $1c \quad + \quad 3s \quad = \quad 30$ ↓ uma camiseta ↘ três sucos

A resposta de PA1 faz inferir que ela pode estar chegando perto do entendimento do significado de $1c$ e $3s$, porém, nessa etapa, ela aborda somente o significado dos coeficientes de c e de s, não faz nenhum comentário a respeito do que o c e o s representam.

Quadro 11: Fase 11 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Resposta de PA1**
10.	Quando você afirma em sua resposta que "$1c$ = uma camiseta" está se referindo ao número de camisetas ou ao preço de uma camiseta?	1 é o preço de uma camiseta.

PA1 volta atrás e mostra que sua interpretação não vai ao encontro do que se tinha considerado que ela pensava a respeito dos coeficientes, e que parecia claro na resposta dela à pergunta 10, quando ela considera o "cartaz". Segue a próxima pergunta.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Quadro 12: Fase 12 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1
11.	De acordo com a sua última resposta, o 1 é o preço de uma camiseta, então o 3 deve ser o preço de um copo de suco, não é? Se isso estiver correto, na segunda etiqueta teremos: $1 + 3 + 3 + 3$ que é igual a 10 e não a 30, e agora?	Quando eu digo $1c + 3s = 30$, representa $1 = quantidade\ de\ camisetas$ $c = preço\ da\ camiseta$ $3 = quantidade\ de\ suco$ $s = preço\ do\ suco$ $1 \, x \, c + 3 \, x \, s = 30$

Agora ela separa cada termo da equação, mas ainda não é possível saber se ela sabe o significado de $1c$ ou $3s$. Nessa fase, as pesquisadoras levam em consideração que o entendimento seja coerente e volta à pergunta da fase 8 para ver se PA1 consegue enxergar a equivalência entre

$$1c + 3s = 30 \ e \ c = 30 - 3s.$$

Quadro 13: Fase 13 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1
12.	Então é correto afirmar que $1xc = 30 - 3s$? Por quê?	$1 \, c + 3 \, s = 30$ $1.15 + 3.5 = 30$ $15 + 15 = 30$ $1x15 + 3x5 = 30$ $15 + 15 = 30$

PA1 substitui os valores encontrados para os itens. Antes da mudança do valor da primeira etiqueta, utiliza duas formas de representar a multiplicação, parecendo conferir se o valor do lado esquerdo da equação dá realmente 30. Considerando que a participante não responde à pergunta das pesquisadoras, continuam os questionamentos.

Quadro 14: Fase 14 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1
13.	Responda a pergunta 12.	Sim, porque o valor da camiseta é igual a $30 -$ valor do suco. Se tirar o valor do suco de 30 o que sobra é o valor da camiseta.

Diante dessa resposta, foi proposta a seguinte pergunta.

Quadro 15: Fase 15 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

14.	Você disse na resposta 1 que a camiseta custaria $R\$18{,}00$ e o copos de suco $R\$4{,}00$. Teste então para: $c = 30 - 3s$	$c = 30 - 3s$ $18 = 30 - 3.4$ $18 = 30 - 12$ $18 = 38$ $\frac{38}{18}$ não da certo Com os valores que encontrei não dá para resolver essa função.

Acredita-se que, por falta de atenção, PA1 equivoca-se ao subtrair 12 de 30.

Quadro 16: Fase 16 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadoras	Resposta de PA1
15.	Quanto é $30 - 12$?	$\begin{array}{r} 30 \\ -12 \\ \hline 18 \end{array}$ O resultado da subtração é 18, sendo assim na função da pergunta 15, ela pode ser resolvida, ou seja, ela está certa com esses valores.

A intenção das pesquisadoras era que PA1 percebesse que, na segunda equação, da fase 3, escrita pela própria participante, era possível isolar o c.

Quadro 17: Fase 17 – pergunta das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	Resposta de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

16.	Então, de acordo com a sua constatação: $1c + 3s = 30$ equivale a $c = 30 - 3s$. Volte à pergunta 3 e tente resolver o sistema.	Então eu posso escrever que: $2c + 2s = 44$ $c = 30 - 3s$ $2c + 2s = 44$ $2(30 - 3s) + 2s = 44$ $60 - 6s + 2s = 44$ $60 - 44 = 6s - 2s$ $16 = 4s$ $\frac{16}{4} = s$ $\cancel{s = 4}$ $4 = s$ $60 - 44 = 16$ Achei o valor do suco.

Na resolução da participante, fase 17 da questão, ela apresenta parte importante da resolução do sistema, utilizando a estratégia de substituição. Porém dá só o valor de s, e não leva em consideração que o sistema possui duas incógnitas.

Quadro 18: Fases 18, 19 e 20 – perguntas das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Resposta de PA1**
17.	Existe outra letra em: $2c + 2s = 44$ $c = 30 - 3s$ que tem um valor numérico?	Sim, a letra c, $c = 30 - 3s$ $c = 30 - 3 \cdot 4$ $c = 30 - 12$ $c = 18$
18.	Teste esses valores em: $2c + 2s = 44$ $c + 3s = 30$	$2 \cdot 18 + 2 \cdot 4 = 44$ $36 + 8 = 44$ $44 = 44$ $c + 3s = 30$ $18 + 3 \cdot 4 = 30$ $18 + 12 = 30$ $30 = 30$
19.	O que você conclui?	Concluo que existem várias formas de chegar ao resultado e que é possível aprender matemática utilizando regras e funções, ou seja, álgebra.

Por contar com a possiblidade de a prova ter várias fases, a resolvedora teve a oportunidade de encontrar o valor das duas incógnitas quando resolvia o sistema de equações por substituição. Foi possível também, de acordo com a resposta dada à pergunta 19, lembrar à professora que os problemas podem ter “várias formas de chegar ao resultado”, detalhe importante quando se pretende considerar a individualidade daquele que aprende.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Considerou-se realístico o contexto do problema porque dar o preço total de compras envolvendo os mesmos produtos com diferentes quantidades é uma situação imaginável para as participantes da pesquisa. Considerou-se também que o contexto no qual ele está inserido gera ideias matemáticas que poderiam ser desenvolvidas e, ainda, que o problema é flexível, isto é, oferece possibilidade de ser resolvido por diferentes estratégias, o que permite maior liberdade para o aprendente mostrar o que sabe. De Lange (1999, p. 10) afirma que "métodos de avaliação deveriam ser tais que habilitem os estudantes a revelarem o que sabem ao invés do que não sabem".

Em relação à avaliação formativa, a escolha pareceu apropriada já que as diferentes estratégias que as participantes poderiam utilizar dariam informações para guiá-las no processo de aprendizagem.

Usualmente, esse tipo de problema é sempre associado à montagem de um sistema de equações com duas incógnitas. Basta ver a quantidade de problemas desse tipo que aparece nos capítulos que tratam desse assunto nos livros didáticos. Entretanto esse caminho só foi escolhido por quatro participantes no decorrer da reinvenção-guiada. Isso confirma a possibilidade de diferentes estratégias para abordar o problema.

Com relação à resolução de PA1 para a questão 01, as pesquisadoras buscam uma forma de a resolvedora reconhecer que o problema também pode ser resolvido por meio de um sistema de equações com duas incógnitas. Para isso, encaminha a pergunta que segue:

Se chamarmos cada camiseta de c e cada copo de suco de s, como você representaria esse problema?

PA1 escreve um sistema que representa a situação:

$$2 \cdot c + 2 \cdot s = 44$$
$$1\, c + 3 \cdot s = 30.$$

O contexto dos preços das camisetas e dos copos de sucos são exemplos de como experiências de situações da "vida cotidiana" podem ser impulsos para o desenvolvimento de ideias e conceitos em Matemática.

Com o decorrer das fases e guiada pelas observações e perguntas das pesquisadoras, PA1 escreve que a situação pode ser representada da seguinte maneira.

Quadro 19: Diferentes representações dadas por PA1 para o mesmo problema

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

$$2.c + 2.s = 44$$
$$1\,c + 3.s = 30.$$

e

$$3.x + 5.y = 74$$
$$3.18 + 5.4 =$$
$$54 + 20 = 74$$

E, ainda,

$$2c + 2s = 44$$
$$C = 30 - 3s$$

Praticar a reinvenção-guiada numa prova em fases permite atender as diferenças entre os níveis de compreensão dos estudantes.

Depois de escrever um sistema de equações com duas incógnitas que representa a situação do problema, a participante não consegue resolvê-lo e justifica: “Como não tem um c ou um s negativo para simplificar, não consigo resolver (PA1, Q01, Fase 6)”.

Ao que tudo indica, ela sabe resolver o sistema por adição, mas, naquele momento, não estava encontrando uma maneira de fazê-lo.

O encaminhamento dado pelas pesquisadoras foi fazê-la compreender que

$$1c + 3s = 30 \; equivale\ a \; c = 30 - 3s$$

com a intenção de conduzir uma resolução do sistema pelo procedimento de substituição. Várias fases foram necessárias até que a participante percebesse que:

$$2c + 2s = 44$$
$$1c + 3s = 30$$

também pode ser escrito por

$$2c + 2s = 44$$
$$C = 30 - 3s$$

Para fazê-la compreender a equivalência dos dois sistemas, foi necessário guiá-la com as seguintes perguntas e sugestões.

Quadro 20: Perguntas das pesquisadoras relativa à resposta de PA1

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Perguntas das pesquisadoras	**Respostas de PA1**
Se a soma do peso de uma panela com o peso de uma leiteira é igual a 420 gramas, é correto afirmar que o peso da panela é igual a 420 gramas menos o peso da leiteira? Por quê?	Sim, porque se souber o peso da leiteira e tirar de 420 teremos o peso da panela.
Então se $1c + 3s = 30$, conforme sua resposta à pergunta número 3, é correto afirmar que $1c = 30 - 3s$?	Não, porque 3 é o número de camisetas não o preço de cada uma.
5) Mas então o que é $3s$ na expressão $1c + 3s = 30$? b) Por que existe c no 1 e s no 3 e nada no 30?	Porque eu sei que $1c$ representa o número de camisetas e $3s$ o número de sucos, o 30 é o valor pago pelos itens que estão sendo vendidos.
Você disse que "$1c$ representa o número de camisetas", então o que representa cada camiseta?	Quando eu analisei a expressão $1c + 3s = 30$ e afirmei que $1c$ é para uma camiseta é porque na informação do cartaz contém apenas 1 camiseta, logo $1c =$ uma camiseta, já os copos de sucos são 3, então: $3s =$ três camisetas $1c \quad + \quad 3s \quad = \quad 30$ uma camiseta três sucos
Quando você afirma em sua resposta que "$1c =$ uma camiseta" está se referindo ao número de camisetas ou ao preço de uma camiseta?	1 é o preço de uma camiseta.
De acordo com a sua última resposta, o 1 é o preço de uma camiseta, então o 3deve ser o preço de um copo de suco, né? Se isso estiver correto, na segunda etiqueta teremos: $1 + 3 + 3 + 3$ que é igual a 10 e não a 30, e agora?	Quando eu digo $1c + 3s = 30$, representa $1 = quantidade\ de\ camisetas$ $c = preço\ da\ camiseta$ $3 = quantidade\ de\ suco$ $S = peço\ do\ suco$ $1 \ x\ c + 3\ x\ s = 30$
Responda a questão anterior.	Sim, porque o valor da camiseta é igual a $30 -$ valor do suco.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

	Se tirar o valor do suco de 30, o que sobra é o valor da camiseta.
Você disse na resposta 1 que a camiseta custaria $R\$18{,}00$ e os copos de suco $R\$4{,}00$. Teste então para: $c = 30 - 3s$	$C = 30 - 3s$ $18 = 30 - 3 \cdot 4$ $\cancel{18 = 30 - 12}$ $18 = 38$ $\frac{38}{18}$ não da certo Com os valores que encontrei, não dá para resolver essa função.
Quanto é $30 - 12$?	$\begin{array}{r} 30 \\ -12 \\ \hline 18 \end{array}$ O resultado da subtração é 18, sendo assim na função da pergunta 15, ela pode ser resolvida, ou seja, ela esta certa com esses valores.
Então, de acordo com a sua constatação: $1c + 3s = 30$ *equivale a* $c = 30 - 3s$. Volte à questão 3 e tente resolver o sistema.	Então eu posso escrever que: $2c + 2s = 44$ $C = 30 - 3s$ $2c + 2s = 44$ $2(30 - 3s) + 2s = 44$ $60 - 6s + 2s = 44$ $60 - 44 = 6s - 2s$ $16 = 4s$ $\frac{16}{4} = s$ $\cancel{s = 4}$ $4 = s$ $\begin{array}{r} 60 \\ -44 \\ \hline 16 \end{array}$ Achei o valor do suco.

Finalizando

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

A experiência com a prova em fases e a reinvenção-guiada permitiu vislumbrar um caminho no qual é possível considerar o conhecimento e a individualidade daquele que aprende.

Na perspectiva da RME, a avaliação é considerada parte do processo de ensino e aprendizagem e não uma sua lacuna. A análise apresentada tem a intenção de apontar também que, com a prova em fases, é possível efetivar a reinvenção-guiada de acordo com o nível de compreensão de cada aprendente.

Segundo De Lange (1999), são diversos os princípios para a avaliação. Um deles é que o principal propósito da avaliação escolar é promover a aprendizagem. Esta pesquisa mostrou que, ao desenvolver um diálogo com o aprendente, por escrito, a partir de um prova em fases, foi possível que ele representasse uma situação utilizando a linguagem algébrica, aprender a resolver um sistema, ir em busca da definição de sequência.

Outro princípio é que os estudantes deveriam ter oportunidade de receber retornos a respeito de seus trabalhos. Após cada resolução ou comentário que a participante dava para uma questão, na semana seguinte, ela recebia um retorno com comentários a respeito do que ela tinha feito.

A prova em fases pode provocar a mudança na maneira como os professores interpretam e analisam a produção escrita dos aprendentes. Esta proposta, trabalhar com Prova em Fases, requer muito mais do que olhar apenas para a reposta. Realizar uma prova em fases exige a elaboração de perguntas que guiem o aprendente no processo de ensino e aprendizagem. Esse processo de diálogo em que o professor faz perguntas por escrito e o aluno responde é uma das características da prova em fases.

Neste trabalho, orientar as participantes da pesquisa num processo de reinvenção utilizando o problema em análise oportunizou indícios de processos de abstração, de esquematização, de formalização, de sistematização, em um contínuo processo de matematização, e, como diria Freudenthal, de aprendizagem, tanto das participantes quanto das pesquisadoras.

Referências

Allal, L. (1986). Estratégias de Avaliação Formativa: Concepções Psicopedagógicas e Modalidades de Aplicação. In: L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Eds.), *A Avaliação Formativa Num Ensino Diferenciado* (pp. 175-209). Coimbra: Livraria Almedina.

Allal, L., & Lopez L. M. (2005). Formative assessment of learning: A review of publications in French. In: OCDE/CERI (Ed.), *Formative assessment*: Improving learning in secondary classrooms (pp. 241-264). Paris: OCDE.

Barlow, M. (2006). *Avaliação escolar* **-** mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed.

Black, P. & Wiliam, D. (2003). In praise of educational research: formative assessment. *British Educational Research Journal,* 29(5): 623–37.

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Buriasco, R. L. C. (2009). Introdução à análise da produção escrita: prática de investigação em avaliação In: I. L. Batista & R. F. Salvi, R. F. (Orgs.), *Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática*: um perfil de pesquisas (pp.157-166). Londrina: EDUEL.

Cizek, G. J. (2010). An Introduction to Formative Assessment: History, Characteristics, and Challenges. In: H. L. Andrade & G. J. Cizek, *Handbook of Formative Assessment* (pp. 3-17). New York: Taylor & Francis.

De Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics.* Madison: WCER. Retirado em 10 de junho, 2008, de www.fi.uu.nl/catch/products/framework/de_lange_framework. doc.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

______. (1991). Revisiting mathematics education**.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 111-129.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* **(**pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: T. Plomp & N. Nieveen, *Educational design research* (pp. 72–113). London: Routledge.

Hadji, C. (1994). *A avaliação regras do jogo:* das intenções aos instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto Editora.

Hadji, C. (2011). *Ajudar os alunos a fazer a autorregulação da sua aprendizagem:* Por quê? Como? (Visando um ensino com orientação construtivista). Pinhais: Editora Melo.

Heritage, M. (2007*). Formative Assessment*: What Do Teachers Need to Know and Do? Phi Delta Kappan, Arlington, 89, 140-145.

Pinchok, N., & Brandt, W. C. (2009). *Connecting formative assessment research to practice:* An introductory guide for educators. Washington, DC: Learning Point Associates.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. In: F. L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education*, (pp. 1-43), Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics

DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648524

Education, Taiwan, 2001. Retirado em 18 de novembro, 2010, de http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>.

Wilian, D. (2010). An Integrative Summary of the Research Literature and Implications for a New Theory of Formative Assessment. In: H. L. Andrade & G. J. Cizek, *Handbook of Formative Assessment* (pp. 18-40). New York: Taylor & Francis.