



## Probabilidade em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais: diferentes concepções

### Probability in Mathematics Middle School textbooks: different ideas

*Ewellen Tenorio de Lima<sup>1</sup>*

#### Resumo

No presente artigo, a partir da análise das coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas pelo PNLD 2017, volta-se o olhar para a distribuição das atividades que trabalham com a Probabilidade nas diferentes coleções e em seus volumes, bem como para as diferentes concepções de Probabilidade presentes neste material didático. Ao todo, foram identificadas 875 atividades, quantitativo que não está homogeneamente distribuído entre as coleções, nem, tampouco, em seus volumes. No que se refere às concepções de Probabilidade abordadas, como esperado, foi constatado que uma maioria absoluta de problemas trabalha com a probabilidade clássica (81%). Os resultados encontrados apontam para a necessidade de grandes mudanças nas próximas edições destes materiais didáticos, tendo-se em vista as prescrições apresentadas pela BNCC, que trazem grande destaque ao trabalho com a Probabilidade no Ensino Fundamental, e, em especial, à probabilidade frequentista nos Anos Finais.

**Palavras-chave:** Probabilidade; Livro Didático; Anos Finais.

#### Abstract

In the present paper from the analysis of the collections of mathematics textbooks approved by PNLD 2017 we look at the distribution of probability activities in the different collections and their volumes, as well as the different conceptions of probability presented in this material. 875 activities were identified, a quantity that is not evenly distributed among the collections, nor among their volumes. With regard to the probability conceptions approached, as expected, it was found that an absolute majority of problems focus the classical probability (81%). The founded results point to the need for major changes in the next editions of these materials, considering the prescriptions presented at the BNCC, which highlight the work with Probability in the Elementary School, and, specifically, gives attention to the frequentist probability in Middle School.

**Keywords:** Probability; Textbooks; Middle School.

### Um olhar para o livro didático

É inegável a grande influência exercida pelo livro didático na sala de aula. Este material didático se faz muito presente e está em contato direto com o professor (que, muitas vezes, o utiliza como base para selecionar os conteúdos que serão trabalhados e guiar o processo de ensino) e com o estudante (que o tem em sua posse dentro e fora da escola). O livro didático atua, dessa maneira, como um elo entre professores, alunos e o conteúdo que carrega em si.

**Submetido em:** 01/10/2019 – **Aceito em:** 06/12/2019 – **Publicado em:** 19/05/2020

<sup>1</sup> Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. Email: ewellentlima@gmail.com

O Guia Nacional do Livro Didático (Matemática), disponibilizado pelo Programa Nacional do Livro Didático, PNLD 2017 destaca que:

o livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o estudante. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade (MEC, 2016, p. 13).

O conteúdo presente no livro didático, que orienta amplamente a prática docente em sala de aula, deve estar, portanto, pautado nas orientações curriculares oficiais. Em função disto, a construção de tal material didático tem como objetivo primeiro refletir as prescrições referentes às respectivas etapas da escolarização à qual se remetem. Sacristán (2000) ressalta que materiais como o livro didático costumam estar mais próximos do professor, o que reforça a importância de que o mesmo esteja em consonância com os documentos oficiais curriculares.

Existe uma série de meios, [...], que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste. As prescrições costumam ser muito genéricas e, nessa mesma medida, não são suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas (Sacristán, 2000, p. 104-105).

Sob tal perspectiva, destaca-se a importância da análise de livros didáticos quando se tem o objetivo de levantar como determinada área do conhecimento ou conteúdo específico tem chegado à sala de aula. No presente artigo, que apresenta um recorte de um estudo de tese, em andamento (Lima, 2018), volta-se o olhar para a Probabilidade, buscando-se entender como esse campo da Matemática, que ganhou ainda mais destaque recentemente, com a homologação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (MEC, 2018), vinha sendo apresentado nos livros didáticos voltados para os Anos Finais do Ensino Fundamental aprovados pelo último PNLD (MEC, 2016). A análise conduzida buscou levantar quais concepções de Probabilidade estão presentes nas atividades propostas ao longo dos volumes de cada coleção, visto que a BNCC (MEC, 2018) traz a importância do trabalho com a concepção frequentista de probabilidade e sua comparação com a concepção clássica (mais comumente presente no trabalho formal em sala de aula).

Dado o posto, entendendo que uma função que tem sido exercida pelo livro didático é a de “levar para a sala de aula as modificações didáticas e pedagógicas propostas em documentos oficiais, assim como resultados de pesquisas sobre a aprendizagem da Matemática” (MEC, 2016, p. 14), surgiu o interesse em analisar as coleções aprovadas antes da homologação da BNCC (MEC, 2018) e levantar reflexões sobre as modificações esperadas para as coleções que chegarão nas salas de aula nos próximos anos.

## **Probabilidade**

### *A Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental*

A Probabilidade é um campo de estudo que “cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios”

(Morgado *et al.*, 1991, p. 119). Godino, Batanero e Cañizares (1991), defendem que o conhecimento desta área da Matemática

proporciona um modo de medir a incerteza, em consequência, os modelos probabilísticos são o fundamento da maior parte da Estatística. Isto implica que o conhecimento da teoria da probabilidade é necessário para uma compreensão adequada dos métodos estatísticos, que hoje são ferramentas indispensáveis nos campos científico, profissional e social (p. 11-12, tradução minha).

Tais autores destacam, ainda, o potencial de articulação entre situações matemáticas de natureza probabilística e situações cotidianas, defendendo que o estudo da Probabilidade permite que o estudante tenha contato com a incerteza, dando um novo enfoque à instrução escolar, que tende a apresentar uma forte ideia determinista. Assim, é a compreensão da Probabilidade que permitirá ao estudante explorar situações aleatórias, inclusive chegando a estimar probabilidades de ocorrência de diferentes eventos, classificando os mesmos em eventos certos, prováveis, improváveis ou impossíveis.

Diversos autores têm destacado a importância do estudo da Probabilidade ao longo da escolarização para que os estudantes possam desenvolver seus raciocínios probabilísticos e construir um amplo entendimento de conceitos essenciais como os de aleatoriedade e espaço amostral, que preceda o cálculo de probabilidades (Fischbein, 1975, Bryant & Nunes, 2012, Campos & Carvalho, 2016). Nesse sentido, o PNL D 2017 (MEC, 2016) aponta que:

o estudo da probabilidade no nível fundamental da educação básica oferece aos estudantes a oportunidade de reconhecer e quantificar a incerteza associada a eventos aleatórios estabelecendo pilares para estudos mais adiantados em outras etapas da escolarização. [...] A noção de probabilidade é adotada como uma medida que quantifica a incerteza de um evento em um experimento aleatório (p. 49).

Tal afirmação está em consonância com o posto nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (MEC, 1998) para os Anos Finais do Ensino Fundamental, que destacam que:

com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana (MEC, 1998, p. 70).

Outra ideia de Probabilidade, associada à realização de experimentos e simulações (a Probabilidade frequentista) aparece timidamente nesse documento, que afirma que o estudo da Probabilidade “tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático” (MEC, 1998, p. 86).

No Quadro 1 é possível observar, especificamente, o que se espera do trabalho com a Probabilidade nos Anos Finais, conforme prescrito pela BNCC (MEC, 2018). É possível notar o maior destaque dado a um trabalho com a Probabilidade em todos os anos e, em

especial, o grande foco na concepção frequentista. Tais prescrições embasam as discussões sobre as expectativas para os livros didáticos de Matemática posteriores ao PNLD 2017 (MEC, 2016), aqui analisados, que já tomarão por base esse novo documento curricular oficial.

Quadro 1 – Prescrições para o trabalho com a Probabilidade nos Anos Finais

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidades
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável;  Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º	Princípio multiplicativo da contagem; Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular, BNCC (MEC, 2018).

Sucedendo um trabalho com conceitos probabilísticos elementares nos Anos Iniciais, as prescrições em questão estão relacionadas, principalmente, ao cálculo de probabilidades. Destaca-se, a visibilidade dada à concepção frequentista de probabilidade, à realização de experimentos aleatórios e à relação de tal concepção de Probabilidade com a Estatística (cálculo de probabilidades a partir de dados de pesquisas). A descentralização do trabalho escolar com a probabilidade clássica (laplaciana) chama a atenção para a existência e importância de diferentes concepções de Probabilidade. À luz de Godino, Batanero e Cañizares (1991), são consideradas, no presente texto, a *concepção clássica*, a *frequentista*, a *subjetiva*, a *lógica* e a *formal*, discutidas na seção a seguir.

### *Diferentes concepções de Probabilidade*

A *concepção clássica* de Probabilidade embasa o cálculo *a priori* da probabilidade de ocorrência de um evento, tomando-se a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis em um espaço amostral equiprovável. Essa concepção é a mais

comumente trabalhada em problemas escolares, entretanto pode vir de encontro a concepções advindas de experiências anteriores, dentro ou fora da escola, nas quais a equiprobabilidade não está presente.

Por sua vez, a concepção *frequentista* permite que o cálculo de probabilidades seja realizado *a posteriori*, a partir de resultados de experimentações e/ou simulações. É, portanto, objetiva, separada de qualquer consideração advinda de experiências pessoais. Em situações aplicáveis, quando o número de experimentos é grande o suficiente, o valor obtido a partir desta concepção de probabilidade se aproxima daquele calculado pela razão advinda da concepção clássica, isto é, “quanto maior o número de acontecimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a posteriori* e a probabilidade *a priori*, calculada sem manipulação experimental, baseada em dados teóricos e no conceito clássico” (Santos, 2015, p. 47). No contexto escolar, a comparação entre estas duas concepções de Probabilidade (discussões acerca de suas aproximações e distanciamentos) ganha força na BNCC, que não só prescreve explicitamente o trabalho com ambas em sala de aula, como traz que a confrontação entre os resultados obtidos a partir de uma e outra concepção deve ter espaço no tempo dedicado ao trabalho com a Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

De acordo com a *concepção subjetiva*, a Probabilidade é “uma expressão da crença ou percepção pessoal” (Godino, Batanero & Cañizares, 1991, p. 25, tradução minha). Assim, tal concepção está fortemente baseada em experiências particulares daquele que estima a probabilidade de certo evento. Nesse sentido, a estimativa e o cálculo de probabilidades estão centrados no sujeito e, logo, diferentes pessoas podem prever probabilidades distintas para uma mesma situação. Tal concepção “não se baseia na repetitividade de nenhum processo, pois é possível avaliar a probabilidade de um evento que pode ocorrer uma única vez” (Godino, Batanero & Cañizares, 1991, p. 25, tradução minha). Essa concepção se faz presente, muitas vezes, no julgamento de situações do cotidiano, como jogos e apostas (por exemplo, ao se apostar em um número da sorte). Ainda que não seja objetivo explícito se trabalhar com essa concepção de probabilidade em sala de aula, visto que a mesma não faz parte de prescrições curriculares, é importante notar a influência desta, advinda de conhecimentos e experiências prévias dos estudantes (e extraescolares) para o desenvolvimento de seus raciocínios probabilísticos. Isto é, não se pode desconsiderar que o entendimento da aleatoriedade e demais conceitos probabilísticos pode enfrentar obstáculos que são resultantes de concepções errôneas, subjetivas dos estudantes.

Segundo a *concepção lógica*, a Probabilidade, se baseia na indução, ou seja, define uma relação lógica entre um enunciado e uma hipótese dele derivada: “traduz um grau de crença racional, isto é, a *taxa de confiança* concedida a uma proposição  $p$  à luz da informação de outra proposição  $q$ . A Probabilidade é tratada como um tipo especial de relação entre os dois enunciados” (Godino, Batanero & Cañizares, 1991, p. 23, tradução minha). Nesse sentido, a *taxa de confiança* é medida de duas maneiras extremas: a certeza e a impossibilidade. No primeiro caso,  $p$  é consequência de  $q$  e a proposição  $q$  dá a  $p$  uma probabilidade igual a 1. No caso em que as proposições  $p$  e  $q$  são contraditórias, a

probabilidade dada por  $q$  à  $p$  é igual a 0. O trabalho com esta concepção de Probabilidade também não está presente nas prescrições para a Educação Básica.

Por fim, na *concepção formal*, que se opõe à *concepção clássica*, dado que a mesma não impõe a equiprobabilidade de eventos, a probabilidade é medida quando se elege um espaço amostral (E) e um subconjunto (A) do mesmo. A probabilidade é, então, calculada a partir do quociente entre a medida de A e a medida de E, estando o resultado dessa razão compreendido entre 0 e 1. Godino, Batanero e Cañizares (1991) destacam, ainda, que essa concepção de probabilidade como medida, permite que problemas de *probabilidade geométrica* sejam resolvidos. A *probabilidade geométrica* é discutida, também, por Bittar e Abe (2013), que apontam que a mesma envolve conceitos de geometria como comprimento, área e volume, sendo o espaço amostral constituído por conjuntos contínuos que se referem a medidas de mesma natureza.

Destaca-se aqui, que tais concepções coexistem e, a depender da situação aleatória a ser tratada, uma pode se mostrar mais adequada que a outra, visto que “quando comparamos as diferentes concepções expostas, vemos que cada uma pode ser aplicada com vantagem em alguma circunstância” (Godino, Batanero & Cañizares, 1991, p. 28, tradução minha). Reforçando tal defesa, Santos (2010) traz que “as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes conceitos probabilísticos, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas” (*apud* Santos, 2015, p. 50).

Os resultados apresentados no presente artigo tiveram como principal aporte esta discussão acerca da diversidade de possibilidades à abordagem da Probabilidade (trabalho com diferentes concepções). Os processos metodológicos são explicitados na seção que segue.

## Caminho percorrido

As análises quantitativas e qualitativas conduzidas partem de uma perspectiva documental. Foram analisados os 44 volumes que compõem as 11 coleções de livros didáticos de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD 2017 (MEC, 2016). As coleções em questão estão listadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Coleções aprovadas no PNLD 2017: Matemática

	<b>Título</b>	<b>Autores</b>
Coleção A	Praticando Matemática	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos
Coleção B	Descobrimo e Aplicando a Matemática	Alceu Mazzeiro e Paulo Machado
Coleção C	Matemática do Cotidiano	Antonio José Bigode
Coleção D	Matemática – Compreensão e Prática	Ênio Silveira
Coleção E	Projeto Teláris – Matemática	Luiz Roberto Dante

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656908

Coleção F	Projeto Araribá – Matemática	Maria Regina Gay
Coleção G	Matemática – Ideias e Desafios	Dulce Onaga e Iracema Mori
Coleção H	Matemática – Bianchini	Edwaldo Bianchini
Coleção I	Matemática nos Dias de Hoje – Na Medida Certa	José Jakubovic e Marília Centurión
Coleção J	Convergências – Matemática	Eduardo Chavante
Coleção K	Vontade de Saber – Matemática	Joamir Souza e Patricia Pataro

Fonte: Guia de Livros Didáticos – Matemática, PNLD 2017 (MEC, 2016).

Inicialmente foi feita a identificação, a partir do sumário de cada livro, dos capítulos que seriam analisados. Foram considerados aqueles capítulos que apontavam o trabalho com Probabilidade, possibilidades, tratamento da informação e temas afins. A partir disto, foi feito o levantamento das atividades que trabalham com conceitos probabilísticos. É válido destacar, ainda, que, dado que uma mesma questão pode abordar diferentes ideias probabilísticas, foram considerados como diferentes atividades cada um dos itens presentes nos livros analisados (por exemplo, itens a, b, c foram considerados e classificados como três atividades distintas).

As discussões apresentadas a seguir consistem em um recorte das análises realizadas no estudo de tese do qual a análise de livros didáticos constitui uma das etapas. Aqui, são consideradas três variáveis referentes à distribuição das atividades probabilísticas levantadas e que apontam, portanto, indícios de como se dá o trabalho com a Probabilidade em sala de aula a partir do uso desse material didático. Tais variáveis são: 1. *coleção*; 2. *ano de escolarização* e 3. *concepções de Probabilidade abordadas*.

## **Apresentação e discussão dos resultados**

Ao todo, foram identificadas 875 atividades que exploram ideias probabilísticas nos livros didáticos analisados. No Gráfico 1, é apresentada a distribuição de tais atividades nas coleções analisadas (ver Quadro 2).

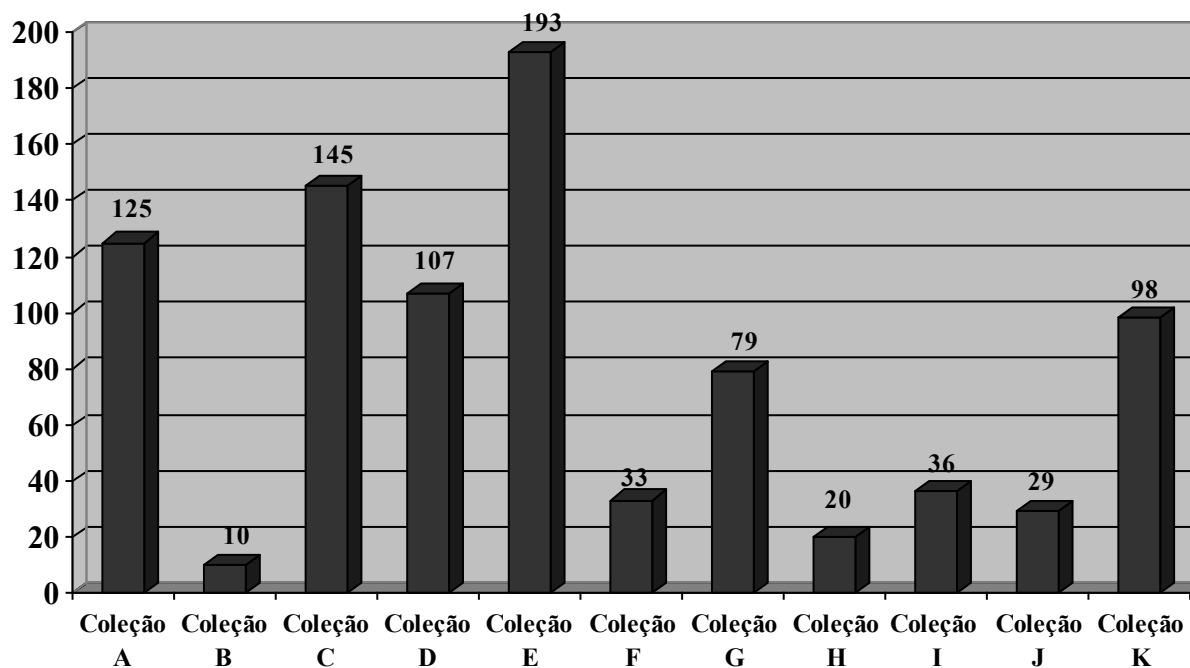


Gráfico 1 – Quantitativo de problemas probabilísticos mapeados (por coleção)

Fonte: A autora.

Um resultado muito importante que fica evidenciado a partir do Gráfico 1 se refere a não homogeneidade na força dada ao trabalho com a Probabilidade nos Anos Finais pelos autores das diferentes coleções: enquanto algumas coleções trazem apenas alguns problemas (como a Coleção B, com apenas 10 problemas ao longo dos quatro volumes), outras trazem um quantitativo mais de 10 vezes maior.

É oportuno reforçar a influência que esse material didático exerce em sala de aula. Assim, a escolha de uma coleção que não propõe um trabalho mais robusto com problemas de natureza probabilística pode fazer com que esse trabalho não seja foco em sala de aula, o que prejudicaria o contato dos estudantes com conceitos e problemas variados, que poderiam proporcionar o desenvolvimento de seus raciocínios probabilísticos (Vergnaud, 1986; 1996, Bryant & Nunes, 2012).

Tal inconsistência na distribuição do trabalho com a Probabilidade foi constatada, também, ao se observar os diferentes volumes correspondentes a cada um dos anos que compõem os Anos Finais do Ensino Fundamental (Tabela 1).

Tabela 1 – Distribuição dos problemas probabilísticos mapeados (por volume)

	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
Coleção A	-	-	12	113
Coleção B	2	8	-	-
Coleção C	9	136	-	-
Coleção D	4	53	30	20
Coleção E	-	76	68	49



DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656908

Coleção F	6	10	7	10
Coleção G	12	21	15	31
Coleção H	4	3	-	13
Coleção I	6	-	30	-
Coleção J	-	29	-	-
Coleção K	2	38	58	-
<b>Total</b>	<b>45</b>	<b>374</b>	<b>220</b>	<b>236</b>

Fonte: A autora.

Há uma grande concentração do trabalho com a Probabilidade no 7º ano em detrimento, especialmente, de um trabalho com conceitos mais básicos desde o 6º ano. Em percentual, tem-se, no 6º, 7º, 8º e 9º ano, respectivamente: 5%, 43%, 25% e 27% das atividades levantadas.

Na Tabela 1 é possível observar, ainda, que algumas coleções trazem a Probabilidade apenas em alguns volumes, havendo certa concordância de um foco maior no 7º ano (nestes materiais a quantificação de probabilidades a partir da razão clássica entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis aparece fortemente a partir deste ano). Isto leva a uma expectativa de que essa distribuição seja repensada nos próximos anos, tendo em vista as orientações presentes na BNCC (MEC, 2018), que prescrevem diferentes objetos de aprendizagem a serem trabalhados progressivamente desde o 6º ano, garantindo um espaço para a Probabilidade em todos os volumes das coleções de livros didáticos voltadas para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Como apontado anteriormente, as análises aqui apresentadas estiveram pautadas, em especial, nas diferentes concepções de Probabilidade presentes nos livros didáticos de Matemática. Dentre as diferentes concepções consideradas (Godino, Batanero & Cañizares, 1991), foram identificadas atividades que abordam três delas: *concepção clássica* ou *laplaciana*, *concepção frequentista* e *concepção formal* (sob uma abordagem *geométrica*). Na Tabela 2 é apresentado o panorama quantitativo dos dados obtidos.

Tabela 2 – Distribuição dos problemas probabilísticos mapeados (por concepção de Probabilidade)

	Clássica	Frequentista	Geométrica
Coleção A	100	14	11
Coleção B	10	-	-
Coleção C	104	3	38
Coleção D	94	2	11
Coleção E	138	43	12
Coleção F	26	7	-
Coleção G	72	7	-
Coleção H	17	2	1
Coleção I	33	2	1
Coleção J	29	-	-
Coleção K	84	7	7
<b>Total</b>	<b>707</b>	<b>87</b>	<b>81</b>

Fonte: A autora.

Como esperado, a concepção clássica ganha muito mais espaço nas coleções analisadas. Em percentual, têm-se: 81% das atividades abordando a *concepção clássica*; 10% abordando a *concepção frequentista* e 9% abordando a *concepção geométrica*. A seguir são apresentados alguns exemplos que ilustram como a abordagem de cada uma dessas concepções é conduzida nos livros analisados.

No que diz respeito à *concepção clássica*, as atividades analisadas exploram diferentes conceitos probabilísticos a partir de contextos como sorteios e jogos (Figura 1) em sua maioria, com situações com dados, moedas e sorteios em urnas. Uma menor parte dos problemas explora contextos que possuem uma articulação com a Combinatória (Figura 2).

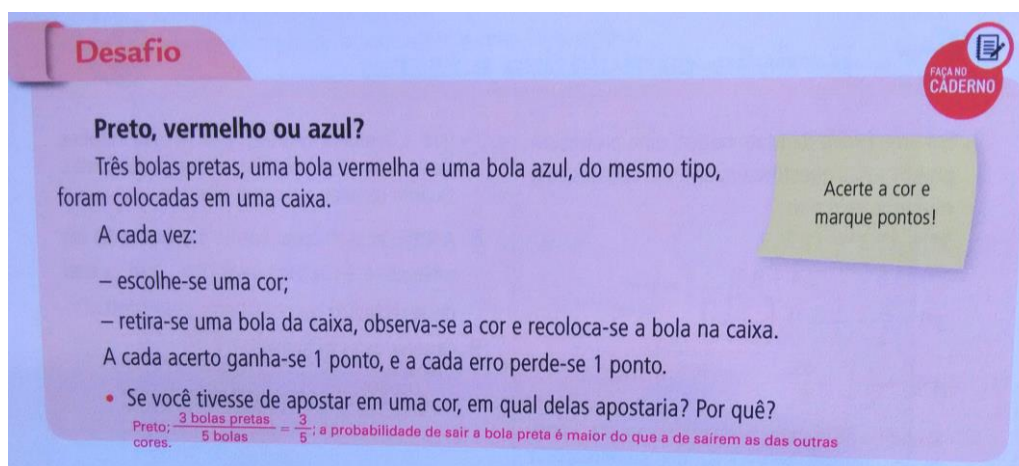


Figura 1 – Concepção clássica de Probabilidade: contexto de jogo

Fonte: Coleção G, 7º ano (2015, p. 237).

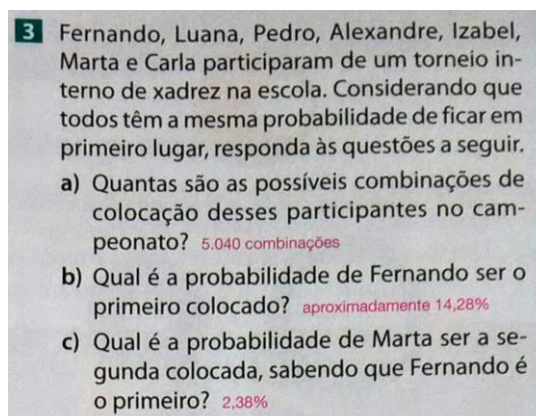


Figura 2 – Concepção clássica de Probabilidade: contexto combinatório (permutação)

Fonte: Coleção F, 9º ano (2014, p. 217).

Por sua vez, a abordagem à *concepção frequentista* de Probabilidade se faz presente a partir de dois vieses: 1. a partir de dados estatísticos; 2. a partir da realização de experimentos (viés observado em menor quantidade). As Figuras 3 e 4 ilustram, respectivamente, estes vieses.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656908

**56. Atividade em dupla**  
Usando sua classe como uma amostra representativa da sua escola, construam no caderno uma tabela como a abaixo e completem-na com os dados solicitados. *Respostas pessoais.*

**Informações sobre a classe**  
Por exemplo: para uma sala de 30 alunos, é possível ter, na sala:

	Frequência absoluta	Frequência relativa
Meninos	20	66,6%
Meninas	10	33,3%
Filhos únicos	6	20%
Canhotos	3	10%
Alunos com óculos	7	23,3%

Dados fictícios.

Agora, estimem qual a probabilidade de vocês selecionarem ao acaso um(a) aluno(a) da sua escola que:

- a) seja menino; 66,6%
- b) seja menina; 33,3%
- c) seja filho(a) único(a); 20%
- d) seja canhoto(a); 10%
- e) use óculos. 23,3%

Chame a atenção dos alunos para o fato de que a estimativa da probabilidade independe do total de alunos da escola.

Figura 3 – Concepção frequentista de Probabilidade: estimativa de probabilidades a partir de dados estatísticos (dados reais)

Fonte: Coleção E, 9º ano (2015, p. 291).


**AÇÃO**

**sobre probabilidade**

**Qual é a chance?**  
São necessários 2 dados para cada grupo de 3 alunos.  
Os dados devem ser lançados 20 vezes. Em cada lançamento, deve-se anotar a diferença (positiva) de pontos.  
Ao final, deve estar preenchido um quadro como este ao lado.

Diferença	Frequência	Frequência relativa (%)
0	■	■
1	■	■
2	■	■
3	■	■
4	■	■
5	■	■

**Frequência:** número de vezes que o resultado foi obtido.  
**Frequência relativa:** porcentagem do resultado em relação ao total de resultados.



É quase certo que as frequências dos resultados não apareçam igualmente distribuídas. Esse é o fenômeno que precisa ser explicado.

Os alunos devem preparar um relatório contendo estes tópicos:

- Resultados obtidos pelo grupo.
- Resultados obtidos pelos vários grupos (a turma toda).
- Quais foram os resultados mais frequentes e os menos frequentes.
- Explicações para a distribuição de frequências obtida.

Para essas explicações, vamos dar uma sugestão:

- Há 6 possibilidades de se obter diferença zero (1 - 1, 2 - 2 etc.).
- Há 36 possibilidades de diferenças (combine o número 6 do primeiro dado com todos os resultados do segundo dado; depois, combine o número 5 do primeiro dado com todos os resultados do segundo, e assim por diante você terá  $6 \cdot 6 = 36$ ).
- Portanto, a probabilidade de diferença zero é  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0,166 = 16,6\%$ .
- Que relação há entre a probabilidade de diferença zero e os resultados obtidos pelo grupo ou pela classe toda? Será que isso explica a distribuição de frequência das outras diferenças?

Figura 4 – Concepção frequentista de Probabilidade: realização de experimentos aleatório

Fonte: Coleção I, 8º ano (2015, p. 18).


É válido reforçar que é esperado que atividades dessa natureza se façam cada vez mais presentes nos livros didáticos de Matemática, dadas as prescrições apresentadas pela BNCC (MEC, 2018). A realização de experimentos aleatórios para a análise e cálculo de probabilidades sob um olhar frequentista é explicitado nesse documento e tem aparecido ainda timidamente nas coleções analisadas. O outro viés (articulação com a Estatística) tende a ganhar, também, mais força, visto que os dados estatísticos (sejam estes oriundos de pesquisas publicadas na mídia ou obtidos a partir de pesquisas a serem realizadas pelos

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656908

próprios estudantes dentro ou fora de suas salas de aula) possuem um grande potencial de permitir que um olhar probabilístico seja lançado a informações do cotidiano, para análise e compreensão de situações nas quais a aleatoriedade está presente.

Outra habilidade a ser desenvolvida nos Anos Finais, conforme a BNCC (MEC, 2018), diz respeito à confrontação de resultados obtidos à luz da *concepção clássica* e da *concepção frequentista* de Probabilidade. Foram identificados apenas dois exemplos de proposta dessa natureza, em duas das coleções analisadas. Um destes exemplos é apresentado na Figura 5.

**30.** Renato confeccionou alguns cartões e os colocou em uma urna. Observe a quantidade de cartões de cada cor.



70 cartões      40 cartões      15 cartões

**a)** Quantos cartões Renato confeccionou?  
125 cartões

**b)** Ao sortear um cartão, qual a probabilidade de ele ser:

- vermelho? 56%
- azul? 32%
- amarelo? 12%

**c)** Em um experimento, Renato realizou 40 sorteios com reposição, ou seja, ele anotava a cor do cartão sorteado e o devolvia para a urna. Veja as anotações de Renato. Verifique se os alunos perceberam que os valores obtidos no experimento são próximos aos valores das probabilidades calculadas.

Cartões vermelho:	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Cartões azul:	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Cartões amarelo:	<input checked="" type="checkbox"/>			

Calcule o percentual da quantidade de cartões de cada cor sorteada em relação ao número de sorteios realizados.  
cartão vermelho: 50%; cartão azul: 35%; cartão amarelo: 15%

**d)** Compare os resultados das probabilidades calculadas no item **b** com os resultados obtidos no experimento realizado no item **c**.

Esses valores são iguais ou próximos?  
Em sua opinião, por que isso ocorreu?  
próximos; Resposta pessoal.

Figura 5 – Confrontação entre as concepções clássica e frequentista de Probabilidade (item d)

Fonte: Coleção K, 8º ano (2015, p. 201).

Por fim, no que se refere à *concepção geométrica* de Probabilidade, foram identificados problemas que abordam o cálculo de probabilidades a partir da exploração do conceito de área de quadriláteros (Figura 6), bem como os conceitos de ângulos, de áreas de círculos, dentre outros.

**11** Um paraquedista precisa pousar em uma região quadrada localizada em um terreno retangular, conforme o esquema abaixo. Sabendo que o lado da região quadrada mede 8 metros e que o paraquedista certamente pousará no terreno retangular, calcule a probabilidade de o paraquedista pousar na região quadrada.

aproximadamente 17%

24 metros

16 metros

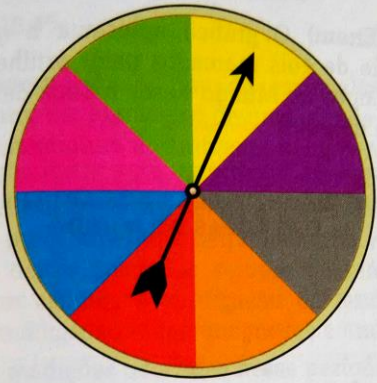
NELSON MATSUDA

Figura 6 – Concepção formal de Probabilidade (geométrica): demanda do conhecimento do conceito de área de superfícies retangulares e quadradas

Fonte: Coleção H, 9º ano (2015, p. 105).

Ressalta-se que são problemas como o acima que exploram verdadeiramente a Probabilidade a partir da Geometria, isto é, sob uma *concepção formal*, como apontado por Godino, Batanero e Cañizares (1991): a probabilidade, nesse caso, precisa ser encarada como medida e não há equiprobabilidade. No entanto, foi observado que a maior parte dos problemas probabilísticos de natureza geométrica presentes nas coleções analisadas, que já são poucos, propõem uma abordagem mais simples, fazendo grande uso da ideia de roletas, como ilustrado na Figura 7, a seguir.

5 A roda representada a seguir é formada por 8 cores diferentes.



GUILHERME CASAGRANDE

Ao girar a seta da roleta, ela pode parar com igual probabilidade em qualquer uma das cores. Reúna-se com um colega e respondam às questões.

- Qual é a probabilidade de a seta parar na cor rosa?  $\frac{1}{8}$
- Escolham duas cores. Qual é a probabilidade de a seta parar em uma delas?  $\frac{1}{4}$
- Considerando as duas cores escolhidas, qual é a probabilidade de a seta não parar em nenhuma dessas cores?  $\frac{3}{4}$
- Qual é a soma das probabilidades obtidas nos itens **b** e **c**?  $1$

Figura 7 – Probabilidade geométrica: roleta simples (equiprovável)

Fonte: Coleção D, 7º ano (2015, p. 177).

O problema acima (e os demais identificados que possuem a mesma abordagem), mesmo estando associados a uma probabilidade geométrica (e foram assim classificados), estão muito próximos da *concepção clássica* de Probabilidade, pois não demandam, necessariamente, a exploração da ideia de probabilidade como medida, visto que os setores correspondentes a cada cor possuem áreas iguais e a probabilidade de cada um deles ser sorteada é, portanto, equiprovável. Ressalta-se, assim, que a redução do trabalho com a probabilidade geométrica apenas ao proposto em problemas bem simples e no contexto de roletas (o que foi observado na maioria das coleções), reduz ainda mais a diversidade de concepções de Probabilidade exploradas nos materiais didáticos aqui analisados.

A seguir são apresentadas algumas considerações a partir dos principais resultados aqui discutidos.

## Algumas considerações

Foram analisados os 44 volumes que compõem as coleções de livros didáticos de Matemática para os Anos Finais aprovadas pelo PNLD 2017 (MEC, 2016). A importância da análise deste material didático se justifica pelos papéis que ele exerce nos processos de ensino e de aprendizagem.

Os resultados encontrados apontam que não há uma distribuição homogênea de atividades que exploram a Probabilidade entre tais coleções nem entre os volumes das mesmas. Do total de 875 atividades identificadas o maior percentual está presente nos livros do 7º ano (43%), enquanto o 6º ano apresenta o menor percentual (apenas 5%). Corroborando o afirmado por autores diversos (Fischbein, 1975, Vergnaud, 1986; 1996, Bryant & Nunes, 2012, Campos & Carvalho, 2016), defende-se que o trabalho com a Probabilidade deve ocorrer de maneira progressiva, proporcionando o contato com seus diversos conceitos ao longo dos anos de escolarização, a partir de problemas variados, para que o raciocínio probabilístico se desenvolva adequadamente, o que vai de encontro ao resultado observado. Nesse sentido, é válido ressaltar que as prescrições presentes na BNCC (MEC, 2018) trazem orientações nesse sentido, ao apresentarem diferentes objetos do conhecimento a serem trabalhados em cada um dos anos que compõem os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Destaca-se, ainda, que a grande parte das atividades analisadas (81%) abordam a concepção clássica de probabilidade – principalmente a partir de contextos de jogos e sorteios, envolvendo moedas, dados, entre outros. Por outro lado, a concepção frequentista de probabilidade, que ganha grande força na BNCC é abordada em apenas 10% das atividades analisadas, que exploram, majoritariamente, a relação da Probabilidade com a Estatística – a partir dos resultados de pesquisas estatísticas. Outros vieses, como o da realização de experimentos em sala de aula e da confrontação dos resultados teóricos e empíricos (concepção clássica x concepção frequentista) precisam ganhar maior destaque, à luz da BNCC.

A realização das análises conduzidas, tomando-se por base as prescrições presentes na BNCC (MEC, 2018), permitiu que fossem discutidas expectativas de mudanças neste material a ocorrerem nos próximos anos, tendo em vista que o mesmo apresenta aos professores (e alunos) uma tradução do currículo oficial: indicações do que, como e quando ser trabalhado em sala de aula. Nesse sentido, é importante que no futuro sejam conduzidas análises dos livros didáticos aprovados nos próximos PNLD's, com o objetivo de observar como estes materiais irão se transformar em função deste papel.

## Agradecimentos:



À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento concedido à pesquisa de doutoramento da qual o presente texto apresenta um recorte.

## Referências

- Andrini, A., & Vasconcellos, M. J. (2015). *Praticando Matemática* (Edição Renovada). São Paulo: Editora do Brasil.
- Bianchini, E. (2015). *Matemática – Bianchini*. São Paulo: Moderna.
- Bigode, A. J. (2015). *Matemática do Cotidiano*. São Paulo: Editora Scipione.
- Bittar, M., & Abe, T. (2013). O ensino de probabilidade: a articulação entre as visões clássica, frequentista e geométrica. In C. Coutinho, (Eds.) *Discussões sobre a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica* (pp. 99-120). Campinas: Mercado das Letras.
- Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. Nuffield Foundation.
- Campos, T. & Carvalho, J. I. (2016). Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – Em Teia*, 7(1), 1- 18.
- Chavante, E. (2015). *Convergências – Matemática*. São Paulo: SM.
- Dante, L. R. (2015). *Projeto Teláris – Matemática*. São Paulo: Ática.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht.
- Gay, M. R. (2014). *Projeto Araribá – Matemática*. São Paulo: Moderna.
- Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1991). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Jakubovic, J., & Centurión, M. (2015). *Matemática nos dias de hoje – Na medida certa*. São Paulo: LeYa.
- Lima, E. (2018). A articulação entre Combinatória e Probabilidade nas diferentes instâncias do currículo dos Anos Finais do Ensino Fundamental: o que é dito, o que é feito e o que se pode fazer? Belo Horizonte: *Anais do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – XXII EBRAPEM*.
- Mazzieiro, A., & Machado, P. A. (2015). *Descobrimo e Aplicando a Matemática*. Belo Horizonte: Dimensão.
- Ministério da Educação e Cultura (MEC). (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos*. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental.
- Ministério da Educação e Cultura (MEC). (2016). *Programa Nacional do Livro Didático*. Brasília: MEC / Secretaria de Educação Básica.
- Ministério da Educação e Cultura (MEC). (2018). *Base Nacional Comum Curricular – BNCC*. Brasília: Ministério da Educação.

- Morgado, A., Pitombeira de Carvalho, J. B., Pinto de Carvalho, P. & Fernandez, P. (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Graftex.
- Onaga, D., & Mori, I. (2015). *Matemática – Ideias e Desafios*. São Paulo: Saraiva Educação.
- Sacristán, J. G. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.
- Santos, J. (2015). *A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba.
- Silveira, Ê. (2015). *Matemática – compreensão e prática*. São Paulo: Moderna.
- Souza, J., & Pataro, P. (2015). *Vontade de saber – Matemática*. São Paulo: FTD.
- Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 75-90.
- Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceptuais. In J. Brum, (Eds.) *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Horizontes Pedagógicos.