A obra de Gerolamo Saccheri e a história da geometria não-euclidiana

*Arlete de Jesus Brito**
*Lafayette de Moraes***

RESUMO: Neste trabalho traduzimos parte do livro do jesuíta genovês Gerolamo Saccheri (1667-1733) denominado *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Milão, 1733) e tecemos alguns comentários sobre o mesmo.

PALAVRAS CHAVES: geometria, história, demonstração por absurdo

ABSTRACT: We translated part of the Saccheri's book *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Milão, 1733) and did some remarks about it.

KEY WORD: geometry, history, proof by reductio ad absurdum

1. Introdução

É conhecido o valor histórico do livro de Saccheri (1667-1733) denominado *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Milão, 1733). Nele, Saccheri estuda o chamado pos-

* Doutoranda da Área Temática de Educação Matemática FE - UNICAMP.

** Professor Titular do Departamento de Filosofia da PUC-SP.

tulado das paralelas de Euclides. Acreditamos que esse fato justifica a nossa tradução de parte dele. Além disso, temos mais três outros motivos que justificamos abaixo.

Primeiro, pelo caráter inovador da obra. A partir do século XVII, a obra de Euclides, apesar de ser considerada modelo de axiomatização para as teorias matemáticas, começou a sofrer críticas. Algumas dessas vinham desde a Antigüidade e referiam-se ao quinto postulado, ou como é mais conhecido, o postulado das paralelas. A sua formulação sugeria ser ele mais um teorema que um axioma. Outras críticas, de ordem formal, faziam restrições ao excessivo uso de demonstrações por absurdo na obra de Euclides, dada a posição contrária de Aristóteles a esse tipo de raciocínio. Embora o estagirita reconhecesse que demonstrações por absurdo poderiam sempre ser convertidas em diretas, afirmava que estas últimas eram preferíveis àquelas. Com Descartes e o rigor do método analítico houve uma tendência geral que pregava a transformação de todas as demonstrações da geometria em diretas. Honrosa exceção consistiu na tradição pedagógica jesuíta ao aceitar, sem maiores restrições, o raciocínio por absurdo. Segundo GARDIES (1991, p. 166) *"o reconhecimento da plena legitimidade deste tipo de demonstração tornou-se uma constante da tradição pedagógica da Companhia de Jesus: já na metade do século XVII, o padre Tacquet, em seus Elementa euclidea geomeriae planae ac solidae, acrescenta um apêndice onde mostra que a verdade se deixa deduzir diretamente do falso"*. Saccheri foi o primeiro geômetra ocidental a tentar uma demonstração por absurdo para o quinto postulado, o que o conduziu a um novo tipo de geometria, apesar de ele não o ter percebido.

O segundo motivo que nos levou a esse empreendimento foi o fato de podermos observar pela análise de *Euclides defendido de todo ataque* como as crenças de Saccheri acerca da verdade absoluta da geometria euclidiana - como o próprio título indica - interferiram em sua obra, fazendo-o usar hipóteses implícitas para negar a existência da nova geometria a qual seus trabalhos conduziram.

O terceiro e último motivo relaciona-se à dificuldade de encontrar esta obra disponível em uma tradução portuguesa. Quando estávamos elaborando nossa dissertação de mestrado sobre as geometrias não-euclidianas (BRITO, 1995) deparamo-nos com a necessidade de analisar a obra do padre jesuíta[1]. Apesar de termos encontrado alguns extratos dessa obra em alguns livros (SMITH, 1959; TRUDEAU, 1987; BONOLA, 1955), conseguimos apenas um no qual a primeira parte de *Euclides defendido de todo ataque* era apresentada integralmente. Este livro estava escrito em alemão (ENGEL e STÄCKEL, 1968)[2].

1. É esta a tradução utilizada no presente texto. Ao elaborarmos aquela dissertação de mestrado interessava-nos particularmente traduzir o prefácio da obra de Saccheri e os teoremas que conduziam à impossibilidade do ângulo obtuso. O prefácio foi traduzido a partir do texto em alemão contido no livro (ENGEL e STÄCKEL, 1968) entre as páginas 45 e 47. A tradução dos teoremas foi feita a partir dos livros de (SMITH, 1959) e (BONOLA, 1959).

A seguir, apresentamos uma tradução do prefácio da obra de Saccheri acompanhada dos teoremas que, segundo ele, conduzem a uma demonstração do quinto postulado no caso do ângulo obtuso. Devido ao fato de termos um objetivo pedagógico quando realizamos a tradução dessas demonstrações, acabamos inserindo algumas explicações às mesmas e omitindo alguns teoremas, como poderá ser observado pela numeração das proposições, já que elas acompanham aquelas de Saccheri.

2. Tradução do Prefácio

Euclides defendido de todo ataque

Gerolamo Saccheri

Aqueles que estão familiarizados com a matemática e, em particular, com a geometria, reconhecem os méritos dos Elementos de Euclides. Testemunham esse fato, entre outros, Arquimedes, Apolônio, Teodósio e inúmeros outros matemáticos desde a Antigüidade até os nossos dias, cujas obras têm por fundamentos o trabalho de Euclides. Contudo, apesar de seus méritos renomados, geômetras encontraram algumas imprecisões, das quais mencionaremos, de início, três.

A primeira, diz respeito a uma observação de Clavius sobre a redação do axioma das paralelas onde Euclides afirma que *"se uma reta incidente sobre duas outras retas forma com elas ângulos internos e do mesmo lado menores que dois retos então, essas duas retas prolongadas encontar-se-ão do lado em que a soma dos ângulos internos for menor"*[3].

Certamente ninguém duvidaria do teor de verdade dessa afirmação. Contudo, as críticas a Euclides derivam do fato de ele ter qualificado essa afirmação como se o teor dela fosse facilmente subssumido e, além disso, usá-la somente na demonstração do teorema 29. Talvez, por isso, não poucos, ao longo da história, tentaram deduzi-lo como um teorema a partir dos demais axiomas.

2. Este livro pode ser encontrado no Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação (IMECC) - UNICAMP.

3. A formulação usada modernamente: "por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a uma reta dada" é devida a John Playfair (1748-1819).

As tentativas de demonstrar a proposição de Euclides como um teorema constituíram tarefa a que se propuseram muitos geômetras ao longo da história. Intuitivamente, Euclides considerava paralelas as retas coplanares que, prolongadas indefinidamente, jamais se encontrariam. Alguns daqueles geômetras substituíram aquela proposição por outra que afirma que retas paralelas são retas coplanares eqüidistantes, isto é, que os segmentos de perpendiculares a elas, compreendidos entre as mesmas, são congruentes.

O problema relativo ao axioma das paralelas surge a partir do teorema 29 do livro I de Euclides e, conseqüentemente, em quase toda sua formulação da geometria. Além da formulação de Euclides, vários autores usaram versões equivalentes e as empregaram nas demonstrações das demais proposições da geometria.

Posto isso, o leitor poderá compreender o objetivo do primeiro livro de meu tratado. Uma explicação detalhada de tudo o que foi exposto acima precede o axioma 21 de meu livro.

Vou dividi-lo em duas partes. Na primeira seguirei os passos de meus antecessores sem me preocupar com a natureza ou nome daquela linha na qual os pontos distam igualmente de uma dada reta imaginária. Sem qualquer sombra de dúvida, precisarei apenas do discutível axioma de Euclides. Por isso, eu não usarei os resultados anteriores do primeiro livro de Euclides nem os teoremas 27 e 28, nem mesmo o 16 e o 17[4], exceto onde se trata claramente de uma porção do plano limitada por um triângulo. Na segunda parte, provarei, para dar uma nova redação ao axioma de Euclides, que a linha cujos pontos dista igualmente de uma reta dada é uma linha reta. Todos entenderão que os fundamentos da geometria, a partir daí, devem passar por um exame severo. Passaremos agora às duas outras imprecisões encontradas na obra de Euclides.

A primeira trata da sexta proposição do quinto livro sobre grandezas proporcionais; a segunda consiste na quinta explicação do sexto livro sobre as relações. Este será o meu alvo único do segundo livro: discutir profundamente as explicações de Euclides e mostrar, ao mesmo tempo, que a obra de Euclides foi injustamente criticada.

É oportuno ainda observar que provarei nessa ocasião uma certa proposição que pode ser utilizada em toda a geometria, sem que se necessite daquele axioma cuja utilização torna-se necessária a partir do teorema 18 do quinto livro.

4. Saccheri faz essa ressalva, tendo em vista que o teorema 17 é a recíproca do postulado das paralelas e os teoremas 16, 27 e 28 podem ser demonstrados facilmente com o uso de tal postulado. Euclides, porém, não o utilizou nessas demonstrações.

Teoremas

(Proposição I e Corolário I): "Se um quadrilátero tem os ângulos consecutivos A e B retos, e os lados AD e BC congruentes, então o ângulo C é congruente ao ângulo D; mas se os lados AD e BC forem de medidas diferentes, então entre os dois ângulos C e D será maior o que for adjacente ao menor lado, e vice-versa."

Vamos fazer primeiro a demonstração referente ao caso dos lados AD e BC serem de medidas iguais, como mostra a figura 1.

Figura 1

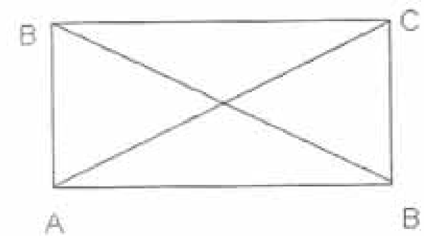
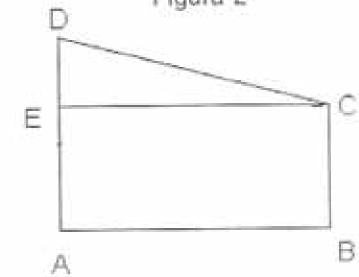


Figura 2



Liguemos os pontos A e C e depois D e B. Consideremos os triângulos CAB e DBA. A seguir, pela proposição 4 dos *Elementos* - 'se dois triângulos têm dois lados iguais e os ângulos respectivamente formados por estes lados forem congruentes, então os triângulos são congruentes' -, temos que AC e DB são congruentes.

Consideremos os triângulos ACD e BDC. Pela proposição euclidiana - 'se dois triângulos têm todos os lados correspondentes congruentes, então estes triângulos são congruentes' -, segue que os ângulos ACD e BDC são congruentes.

Suponhamos agora que as medidas de AD e CB são diferentes, como mostra a figura 2:

Consideremos DA>CB. Queremos mostrar que $\angle$ CDA < $\angle$ DCB.

Marquemos E sobre DA de forma que EA = CB.

Tracemos EC

$\angle$ CDA < $\angle$ CEA , pois, em um triângulo, o maior lado é adjacente ao menor ângulo. Isso nos é garantido pela proposição 18 dos *Elementos*.

$\angle$ CEA = $\angle$ ECB, pelo teorema que acabamos de demonstrar.

Por construção, $\angle$ ECB < $\angle$ DCB.

Portanto, pela propriedade transitiva, $\angle$ CDA < $\angle$ DCB.

Se DA< CB, mostramos de maneira análoga que $\angle$ CDA > $\angle$ DCB.

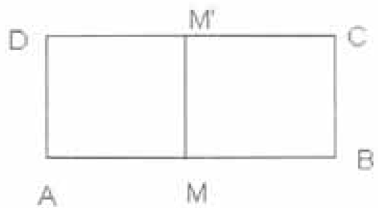
Como estamos considerando iguais as medidas das perpendiculares, então, os ângulos CDA e DCB serão necessariamente congruentes. Pela hipótese euclidiana - 'a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°' - os ângulos C e D são também retos. Desse modo, se os considerarmos obtusos ou agudos, estaremos negando o quinto postulado. Se chegarmos em algum absurdo, teremos demonstrado o quinto postulado. Dessa maneira, trabalhamos com as hipóteses desses dois ângulos serem obtusos, e depois com a de serem agudos.

(Proposição III) : "No quadrilátero isósceles com dois ângulos consecutivos retos teremos, de acordo com a hipótese do ângulo reto, ou do ângulo obtuso, ou do ângulo agudo, respectivamente AB = CD, ou AB > CD, ou AB < CD."

De fato, pela hipótese do ângulo reto, segue imediatamente que AB = CD. Para demonstrarmos a tese do ângulo obtuso, consideremos o quadrilátero ABCD e tracemos MM', a mediatriz de AB, conforme a figura 3.

O segmento MM' divide o quadrilátero ABCD em dois outros congruentes, com ângulos retos em M e em M'.

Figura 3



Se ∠ ADM' é obtuso, então ∠ ADM' > ∠ DAM, assim teremos, pela proposição anterior que AM > DM', e, da mesma forma concluímos que BM > CM'. Portanto, AB> CD.

Da mesma maneira, demonstramos que, pela hipótese do ângulo agudo, teremos AB < CD. Por redução ao absurdo, demonstramos o teorema inverso a esse.

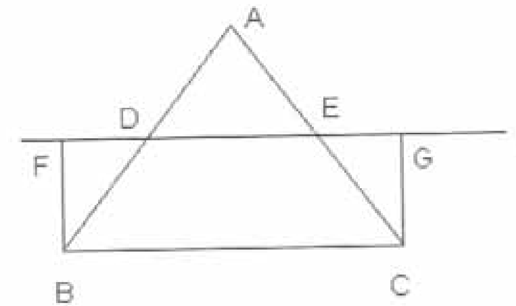
Para facilitar a comunicação, vamos chamar de "ângulos do topo"[5] a esses dois os quais podem ser ou retos, ou obtusos, ou agudos e que são opostos aos dois ângulos retos formados pelas perpendiculares à base.

(Proposição IX): "Segundo se verifique a hipótese do ângulo reto, a do ângulo obtuso ou a do agudo, a soma dos ângulos de um triângulo será respectivamente igual, maior ou menor que dois retos."

5. Expressão utilizada por Trudeau (1987: 132) para referir-se aos ângulos opostos aos dois ângulos retos formados pelas perpendiculares.

Por hipótese, seja o triângulo ABC (figura 4), no qual dois lados - por exemplo AB e AC - foram bissectados em D e E. Desenhemos DE e a prolonguemos nos dois sentidos. Assim, determinaremos a reta *l*. Tracemos as perpendiculares a *l* pelos pon-

Figura 4

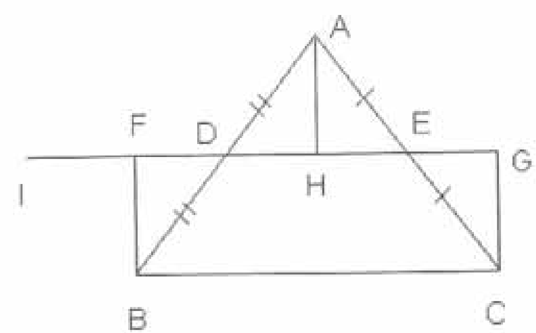


tos B e C.

Agora, tracemos a perpendicular à reta *l* pelo ponto A (figura 5). Assim, determinamos o ponto H sobre a reta *l*. Há três casos a considerar. O ponto H pode estar entre D e E, ou pode coincidir com o ponto D ou pode estar fora do segmento DE. Como em nossos estudos já vimos que, nos três casos, chegamos à mesma conclusão, mostraremos somente um deles: o primeiro caso.

H está entre D e E.

Figura 5



Por construção, temos que os triângulos BFD e AHD são congruentes, o que implica que FB = AH
Δ CGE e o Δ AHE são congruentes

GC = AH

e

FB = GC

Portanto, GFBC é um quadrilátero cujo topo é BC. Demonstramos a primeira parte do teorema. Na seqüência, demonstraremos a segunda parte.

1) ∠ DBF = ∠ DAH, por congruência de triângulos (FED e HAD).

2) ∠ DBF + ∠ ABC = ∠ DAH + ∠ ABC, pelo axioma 2 aplicado ao passo anterior.

3) ∠ ECG = ∠ EAH, por congruência de triângulos.

4) ∠ ECG + ∠ ACB = ∠ EAH + ∠ ACB, pelo axioma 2 aplicado ao passo anterior.

5) ∠ DBF +∠ ABC +∠ ECG +∠ ACB =∠ DAH +∠ ABC+∠ EAH +∠ ACB, pelo axioma 2 aplicado aos passos 2 e 4.

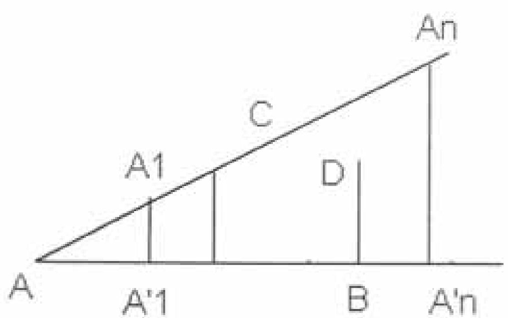
Portanto, ∠ FBC + ∠ GCB = ∠ BAC + ∠ ABC + ∠ ACB .

Assim, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior, menor ou igual a dois retos.

Vamos demonstrar o absurdo dessa hipótese para o caso do ângulo obtuso. Para isso, começaremos demonstrando a seguinte proposição:

(Proposição XII): "Se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo for maior que dois retos, então uma perpendicular e uma oblíqua a uma mesma reta se encontram".

Figura 6



Sejam AC e BD duas retas: a primeira oblíqua e a segunda perpendicular à reta AB (Figura 6). Sobre AC, do lado do ângulo agudo ∠ CAB e da perpendicular BD, tomamos o segmento arbitrário AA_1 e construímos sua projeção AA'_1 sobre AB. Se o ponto B estiver entre AA'_1, a demonstração é imediata. Caso contrário, determinamos um número ***n*** bastante grande, para que o enésimo múltiplo de AA'_1 seja maior que AB. A seguir, sobre o lado AC, do lado de AA_1, construímos AA_n, múltiplo de AA_1, segundo o número ***n***. Traçamos a partir do ponto A_n a perpendicular $A_nA'_n$ sobre AB. Formamos o triângulo $AA_nA'_n$, cuja soma é maior que dois retos. Como, por construção, o ∠ BAA_n é agudo e o ∠ AA'_nA_n é reto, então o ∠ $AA_nA'_n$ é obtuso. Sabemos que o maior ângulo se opõe ao maior lado - pela proposição 18 dos *Elementos*. Temos:

$AA'_n > Aa_n$;

AA_n > AB por construção;

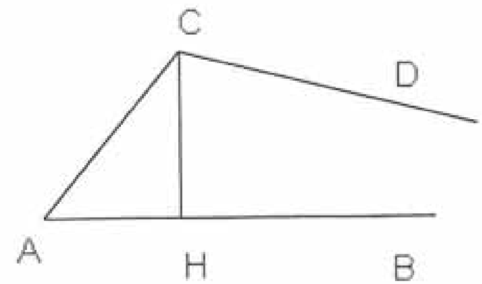
Pela propriedade transitiva, AA'_n > AB;

Portanto, BD perpendicular ao lado AB encontrará a reta AA_n oblíqua a AB.

O passo seguinte de nossa demonstração é utilizar duas retas ***a*** e ***b***, cortadas por uma transversal ***c***, formando ângulos internos, do mesmo lado, não suplementares e verificar o que ocorre na hipótese do ângulo obtuso.

Utilizamos a seguinte figura:

Figura 7



Sejam AB e CD duas retas cortadas pela reta AC.

Suponhamos, por hipótese, que: 1) ∠ BAC + ∠ ACD ∠ 180º ;

2) a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é maior que 180º.

Então, um dos ângulos ∠ BAC ou ∠ ACD, suponhamos, o primeiro, será agudo. A partir de C, traçamos uma perpendicular CH sobre AB. No triângulo ACH, em virtude das hipóteses feitas, teremos ∠ HAC + ∠ ACH + ∠ CHA > 180º.

Porém, também por hipótese, temos $\angle BAC + \angle ACD < 180^{\circ}$.

Combinando estas duas relações obtemos: $\angle CHA > \angle HCD$.

Como $\angle CHA$ é reto, o $\angle HCD$ é agudo.

Pelo teorema que acabamos de demonstrar, podemos concluir que as retas AB, perpendicular a CH, e CD, oblíqua a CH, se encontrarão. Ou seja, com a hipótese do ângulo obtuso, demonstramos que o quinto postulado é verdadeiro. Portanto, por redução ao absurdo, concluímos que a hipótese do ângulo obtuso é falsa.

3. Considerações acerca da obra de Saccheri

Pelo exposto acima, podemos concluir claramente que Saccheri não teve uma visão precisa do significado de sua obra, como afirmamos inicialmente. De fato, ele nem de longe percebeu que ela se constituiria no germe de uma das mais fecundas descobertas de todo o pensamento humano e, em particular, no campo restrito da geometria.

As conseqüências dos trabalhos de Saccheri, bem como dos de Riemann, Lobatcheviscki, Bolyai e outros fogem ao escopo desse trabalho. Contudo, para encerrar, ressaltamos o papel das obras desses autores para o desenvolvimento do moderno método axiomático e sua influência nos fundamentos da matemática, da lógica e da filosofia das ciências formais que ditaram todo o caminho destas ciências, a partir da segunda metade do século XIX.

Referências Bibliográficas

BONOLA, R. *Non-euclidean geometry.* New York: Dover Publications, 1955.

BRITO, A. J. *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico pedagógico.* Campinas: FE-UNICAMP, 1995. (Dissertação de mestrado).

ENGEL, F. e STÄCKEL, P. *Die Theorie der parallellinien.* West Germany: Johnson Reprint Corporation, 1968.

GARDIES, J. L. *Le raisonnement par l'absurde.* Paris: Presses Universitaires de France, 1991

SMITH, D. E. *A source book in mathematics.* New York: Dover Publications, 1959.

TRUDEAU, R. *The non-euclidean revolution.* Boston: Birkhäuser, 1987.

Debates & Controvérsias