Alguns Aspectos Negligenciados na Compreensão e Ensino de Números e Sistemas Numéricos*

*Ivor Grattan-Guinness***

*Tradução: Arlete de Jesus Brito****
*Wilson Pereira de Jesus*****
*Antonio Miguel******

RESUMO: A aritmética tem estado envolvida com questões culturais desde os primórdios de seu desenvolvimento. Dentre essas questões incluem-se: aquelas relativas às diferenças entre os números naturais e os não naturais e aos modos de se realizar operações com eles; às interpretações e usos místicos dos mesmos; aos papéis desempenhados pelo zero; às extensões aos números infinitos e à representação dos números por numerais que pudessem auxiliar a realização de cálculos (incluindo o uso da álgebra). A seleção de exemplos históricos que o artigo apresenta concentra-se sobre alguns aspectos dos números que não são bem conhecidos mas que podem ser utizados no ensino, tanto nos níveis fundamental e médio quanto em cursos de graduação. Ao longo do artigo são feitos comentários sobre a utilidade educacional desses exemplos históricos, principalmente ao final de cada seção; a palavra "estudante" é aqui empregada para referir-se aos aprendizes de todas as idades.

ABSTRACT: Cultural questions have attended arithmetic since it began to develop in ancient times. They include possible differences between integers and non-integral numbers and in operating with them, religious and mystical uses and

---

* A versão original em inglês deste artigo foi publicada na revista "Zentralblatt für Didaktik der Mathematik". t. , 1998, 12-18, sob o título *Some Neglected Niches in the Understanding and Teaching of Numbers and Number Systems*. Agradecemos a autorização dada pelo Sr. Gerhard Koenig da ZDM para publicar esta versão em português. Agradecemos também o autor pela permissão para a realização desta tradução e para a sua publicação na Revista Zetetiké.

** Professor Dr. da Middlesex University - Enfield, Middlesex EN3 4SF, Great Britain. E-mail: ivor2@mdx.ac.uk

*** Doutoranda da área temática 'Educação Matemática' do Programa de Pós-graduação em Educação da FE-UNICAMP.

**** Doutorando da área temática 'Educação Matemática' do Programa de Pós-graduação em Educação da FE-UNICAMP.

***** Prof. Dr. do Departamento de Metodologia de Ensino da FE-UNICAMP.

interpretations, the roles of zero, extensions to infinite numbers, and representing numbers by numerals in ways which aid calculation (including the use of algebra). The selection of historical examples given here concentrates on aspects of numbers which are not well known but which could be used in teaching, either at school or undergraduate level. Comments on educational utility are given, mostly at the end of each section; the word "student" refers to learners of all ages.

1. Antigos números coisas

As origens dos números e de sua aritmética não podem ser conhecidas com certeza, mas é provável que ambas tenham surgido em todas as culturas a partir da contagem e do intercâmbio comercial. Em tais contextos, os números podem ser filosoficamente considerados simplesmente como marcando estágios na contagem. Textos antigos, particularmente gregos e chineses, dão a impressão de que (por exemplo) 3 diz respeito a três *coisas* de algum tipo, mesmo se nenhum tipo particular é mencionado em explicações gerais. A palavra 'calculus' em latim significa 'seixo', fazendo alusão ao papel que símbolos desempenham no desenvolvimento da contagem, e talvez até da própria escrita (SCHMANDT-BESSERAT,1992).

Frações e razões suscitam novas dificuldades conceituais: um número racional parece ser um tipo de coisa diferente de um inteiro, embora as regras para a adição e subtração sejam similares (BENOIT E OUTROS, 1992). E números irracionais são até mais 'perigosos' (melhor do que 'irracional', 'sem lei' seria uma melhor tradução da palavra grega 'alogos').

Em aplicações a conceitos abstratos (em ciência, por exemplo), as perplexidades podem tornar-se grandes. No que diz respeito à multiplicação e à divisão, uma longa tradição originou-se do trabalho dos gregos com razões e proporções (isto é, sentenças relacionando um par de razões) mais do que com equações. Sejam a, b, c e d números, e compare a proporção

$$a : b :: c : d \text{ com } ad = bc \text{ e } a : c :: b : d. \qquad (1)$$

Se a e b se referem ao mesmo tipo de coisa (força ou volume, por exemplo), o mesmo ocorrendo com c e d (mas *não* necessariamente do mesmo tipo que a e b), então $a{:}b$ e $c{:}d$ serão razões *adimensionais*, de modo que a (des)igualdade entre elas (não) pode, sem dúvidas, ser afirmada em $(1)_1$ via "::". Esse foi o modo como Euclides trabalhou com razões e proporções, relacionando um par de linhas a um outro par de linhas ou a um par de números (GRATTAN-GUINESS,1966). Contudo, $(1)_2$ causa uma dificuldade conceitual acerca de dimensões; ad e bc podem ser iguais, mas em que unidades? Similarmente, a proporção-irmã $(1)_3$ poderia ser melhor evitada se as razões fossem entre dois tipos diferentes de coisas.

Tais ênfases nas proporções podem ter sido transferidas para visões metafísicas acerca da construção dos céus, para a cronologia dos mitos e para outras preocupações culturais em que ritmo ou periodicidade estivessem presentes (Mc CLAIN, 1978). A expressão 'música das esferas' ou 'harmonia das esferas' pode levar a mais implicações (como levou) do que se conhece atualmente.

Em várias culturas um primeiro interesse relativo a proporções surge da harmonia musical. A oitava foi fixada em 2 : 1, a quinta justa em 3 : 2, e assim por diante - mas como elas podem se ajustar, se nenhuma potência de 2 pode ser igual a qualquer potência de 3/2? Vários sistemas de 'temperamento' tinham sido divisados para colocar os sete tons ou doze semitons dentro da oitava, sobretudo na Idade Média (COHEN,1984): por exemplo, o diabólico caráter da nota média 'triton' (a quarta aumentada) foi associado com a razão irracional $\sqrt{2} : 1$.

Durante esse período a teoria das razões tornou-se mais aritmética e menos ligada à geometria via dimensões. Na nova abordagem foi permitido estabelecer, por exemplo,

$$a : b = c \text{ e deduzir que } a = b \times c. \qquad (2)$$

A distinção entre a fração e a razão tendeu a desaparecer, e as proporções foram substituídas por equações (SYLLA, 1984). Na verdade, por um longo tempo as palavras 'razão'e 'proporção' foram tratadas como sinônimos; um descuido que não foi praticado nos séculos anteriores.

O uso de razões não se restringiu aos tempos antigos. A mecânica, por exemplo, através da física matemática dos séculos XVIII e XIX, para evitar razões, usou exatamente os mesmos tipos de questões sobre, digamos, força ou carga eletrostática.

Comentário

As razões merecem um papel muito maior no ensino do que aquele que normalmente desempenham; sua longa história mostra que são um meio muito natural dos seres humanos compararem. As conhecidas dificuldades no ensino de frações podem ser aliviadas através da conversão em razões (assim 4/7 torna-se 4 : 7), apontando para exemplos na sala de aula e na vida ordinária onde ocorrem; a música é particularmente uma boa fonte para o último contexto, ou mesmo ambos.

2. Os Inteiros com propriedades

A autonomia dos inteiros e de sua aritmética a partir de fatores empíricos tornou-se mais evidente a partir do momento em que eles começaram a ser considerados como objetos em algum sentido (normalmente não especificado); isto é, quando se percebeu que eles possuiam *propriedades* tais como 'ser primo' ou 'ser fatores de outros inteiros'. Diofanto (cerca de 250 d.C.) usou tais propriedades para encontrar soluções de equações lineares, muitas das quais envolvendo tanto soluções racionais quanto inteiras.

Mas a importância já descrita das proporções é um exemplo dos contextos culturais nos quais os inteiros foram tratados como objetos. Eles envolvem formas de numerologia, nas quais uma comunidade garante 'status' especial a certos inteiros associando-os com suas crenças metafísicas ou religiosas. Provavelmente eles viram os inteiros como invariantes, os quais têm sido um tema forte em matemática; coisas que permanecem as mesmas enquanto outras coisas mudam em volta delas. Uma doutrina intimamente relacionada com a numerologia foi a gematria, criada quando uma cultura desenvolveu um alfabeto escrito; cada letra foi então associada com algum inteiro, e uma palavra ou frase da linguagem associada ao inteiro dado pela soma das suas letras constituintes.

Vários pensadores gregos, especialmente Platão e seguidores tais como Jâmblico (cerca do séc. III d.C.), defenderam a numerologia. Uma categoria importante foi a de 'números triangulares', partindo dos inteiros 3, 6, 10,... que podem ser escritos como 1+2+3...; o nome indica a propriedade de acordo com a qual eles podem ser representados espacialmente por triângulos. Talvez esta propriedade tenha dado origem à trindade do cristianismo ortodoxo, na qual se sustenta que Jesus viveu 3 × 10 anos na obscuridade antes de exercer um ministério por 3 anos e defender a Trindade antes de morrer com mais dois (totalizando 3) em uma cruz e ressuscitar 3 dias depois. Depois de sua ressurreição, Jesus apareceu 3 vezes ante os apóstolos restantes: a segunda vez foi diante de 7 (sic) deles no mar da Galiléia, depois do que Pedro pescou 153 peixes (JOÃO, 21:11) - o número triangular de 17, que foi o número das principais seitas e sociedades no reino judeu da época.

O relato completo é dado no Novo Testamento, que contém 27 livros: 3^3, a Trindade considerada através das 3 dimensões do espaço. Tais características incorporam profundamente uma metafísica significativa para os cristãos conscientes. Houve muitos deles na Idade Média, profundamente conscientes, tanto da numerologia quanto da gematria (HOPPER, 1938); mas agora isso é usualmente ignorado ou mesmo ridicularizado. Assim, os crentes não conhecem um fator significativo de seu sistema de crenças.

Estes exemplos mostram conexões entre a matemática e (uma) religião, um aspecto rico da matemática que é freqüentemente ignorado, mas que, na verdade, não está confinado à aritmética (mecânica e teoria da probabilidade são outros ramos que ilustram essa conexão). A tradição judaica é muito forte aqui. Por exemplo, as 22 letras do alfabeto hebreu são concebidas como 'Aleph' (a primeira letra) seguida por 3 grupos de 7 letras cada, significando graça, misericórdia e justiça estrita, respectivamente, enquanto 10 é caracterizado como o número de círculos conectados na árvore Sefirot da Cabala (JUDAICA, 1971). Para os hindus, 9 é especialmente importante, sendo o número de partes da própria religião e de pontos no seu símbolo especial, a suástica.

Comentário

A aritmética envolvida aqui é trivial; mas seu peso cultural é substancial e propicia um caminho em educação multiétnica.

3. Álgebra dentro e fora dos limites da aritmética

O florescimento da álgebra a partir do final da Idade Média se processou no âmbito da busca de raízes de equações polinomiais; mas também contribuiu para generalizar a aritmética por meio da expressão das propriedades básicas de qualquer número real, conhecido ou não, e até de números complexos. Este florescimento foi também encorajado pelo movimento neo-humanista do século XVI, que supervalorizou os méritos da herança da cultura grega (KLEIN, 1968). Um exemplo importante é Rafael Bombelli (1526-1572), que apresentou um manuscrito de Diofanto e reescreveu parte da sua 'Álgebra' antes de publicá-la em 1572, incluindo nesta publicação soluções para equações diofantinas. Como mostra explicitamente seu título de uma só palavra, ele desejou que, agora, a álgebra fosse não meramente um meio de ajudar o cálculo aritmético, mas uma disciplina autônoma dentro da matemática.

Um outro tema atacado por Bombelli foi 'frações contínuas', um correlato do algoritmo de Euclides. Seja $b > a$; divida b por a e use os sucessivos restos da divisão $c, d, \ldots$ como se segue:

$$b/a = C + c/a = C + 1/(D + d/a) = C + 1/(D + 1/[E + e/a]) = \ldots \qquad (3)$$

Alguns dos novos inteiros $C, D, \ldots$ podem ser zero; se houver um resto $b, c, \ldots$, então, o algoritmo pára, e b/a é uma fração racional. As propriedades das frações contínuas enriqueceram tanto a aritmética quanto a álgebra, embora tal tópico, curiosamente, esteja atualmente quase esquecido; por exemplo, ele é raramente ensinado.

O contemporâneo de Bombelli, Fraçois Viète (1543-1603), foi também influenciado pelo neo-humanismo. Isso porque, ele viu a nova arte da álgebra como "analítica", no sentido de um método de prova - o que foi defendido por gregos tal como Papus -, que começa do teorema e termina com axiomas ou com resultados previamente conhecidos, em contraste com o método de prova "sintético", que procede das suposições para o teorema e estava associado com a geometria. Este par de associações perdurou na filosofia da matemática, embora, muitas vezes, tenha-se mostrado pouco profícuo, à medida em que a geometria foi-se tornando mais analítica e a álgebra passou a utilizar métodos sintéticos de prova em suas mais avançadas teorias. Além disso, a filosofia da álgebra estava também limitada por considerações geométricas; por exemplo, uma vez que o espaço tinha só três dimensões, então, para Viète, *xxxx* era a potência "plano-planum" de x não sua "quarta potência". A liberação de tais limitações ocorreria somente com a introdução do "x^4" por René Descartes (1596-1650), na sua Géométrie (1637); contudo, como mostra o título dessa obra, a álgebra serviu como auxiliar para a criação da sua geometria analítica. (A propósito, esta *não* era uma geometria co-ordenada, em que um sistema de eixos é imposto sobre uma figura; nesse sentido, G.W.Leibniz (1646-1716) aparece como um pioneiro no desenvolvimento do seu cálculo diferencial e integral a partir de 1670).

A definição do 'status' dos números negativos, que mostrava-se problemática através dos séculos, era dependente do desenvolvimento da álgebra. Para alguns matemáticos (incluindo Descartes) o 'status' desses números estava ligado com o dos números complexos, uma vez que ambos os tipos de números tinham surgido em conexão com o problema da resolução de equações polinomiais. Embora se possa naturalmente pensar em interpretações dos números negativos (como débitos financeiros, por exemplo, ou como números marcados na direção oposta àquela dos números positivos), a legitimidade deles como objetos autônomos era freqüentemente questionada.

Considere as duas equações:

$$5 - 3{,}5 = 1{,}5 \qquad \text{e} \qquad 3{,}5 - 5 = -1{,}5. \tag{4}$$

Filosoficamente falando, poderia a segunda equação significar algo, ou seria ela apenas um modo diferente de expressar a primeira? A segunda posição foi a preferida por muitos dos matemáticos desde os primeiros dias do desenvolvimento da álgebra até o século XIX, especialmente na Inglaterra. Ao contrário, uma maior confiança nos números negativos evidenciou-se entre os europeus não-britânicos. Emanuel Kant (1724-1804) argumentou em 1763 que a negação deveria ser construída como o oposto dialético da positividade (é curioso que não se possa dizer "posição"!) mais do que como expressão de sua ausência. Mais tarde, o abade Condillac (1714-1780) concebeu a álgebra como a linguagem por excelência no interior da sua semiótica, e assim, em seu livro de álgebra ordinária, publicado postumamente em 1807 sob outro título impressionante: *La langue des calculs*, tratou as quantidades negativas ao lado das positivas.

Comentário

Este é um caso em que a lição histórica é negativa; isso porque, as duas interpretações naturais são fáceis de ensinar (a última como um componente básico em matemática financeira, a qual está se tornando uma tendência em educação). Suspeito que o fracasso em valer-se de tais casos no passado reflete *a ausência de um modelo de pensamento teórico em matemática naqueles tempos.* Esse ponto de vista, que floresceu somente século XX, permite que os números negativos sejam interpretáveis em tais contextos, embora não em outros. Vale a pena ensinar explicitamente, embora os detalhes técnicos do modelo teórico devam ser deixados para a época da carreira universitária.

4. Sistemas de numeração e cálculo

Os babilônios trabalharam com um sistema numérico de base 60, o qual ainda deixa seus traços em nosso sistema de medida de tempo. Eles também usaram o 10 como base, como o fez a maioria das culturas. Um sistema de contagem de base 12 é mais conveniente, uma vez que as contagens podem ser realizadas utilizando-se apenas uma mão, contando-se, com o polegar, as três articulações de cada um dos quatro dedos restantes; mas, infelizmente, este sistema, embora sendo mais rico pelo fato de 12 ter mais fatores do que 10 , nunca se tornou popular. Note que 10 e 12 são, ambos, fatores de 60, o que sugere que este último número poderia ter sido uma origem comum dessas duas bases: contrariamente ao que freqüentemente se afirma, *não* é forte a evidência lingüística de que a base 10 tenha se originado do número de dedos das mãos ou dos pés; talvez, a propriedade de que goza o número 10 de ser o quarto número triangular tenha também desempenhado algum papel.

Conhece-se uma variedade de outros sistemas numéricos; por exemplo, os Maias tomaram 1 e 5 como suas unidades básicas em sua aritmética posicional de base 20 (LOUNSBURY, 1978). Nem todos os sistemas distintos do sistema-padrão são antigos; de fato, a ciência moderna continua desenvolvendo uma coleção de adjetivos (na sua maioria derivados do grego) para os seguintes números 10^n :

n = ...	-18	-15	-12	-9	-6	
nome:...	atto-	femto-	pico-	nano	micro-	(5)
	-3	3	6	9	12	
	mili-	kilo-	mega-	giga-	tera-	

Alguns sistemas de numeração refletem as operações realizadas. Por exemplo, se em nosso sistema Hindu-Arábico (o qual, de agora em diante, será denotado por 'HA') eu acrescento 6 maçãs a 2 maçãs, então, eu obtenho 8 maçãs; mas, em algarismos romanos, parte-se de II e VI para VIII, e o sinal "VIII" exibe o processo de somar II e VI. Esta característica parece ter atraído contadores e outras pessoas, no século XVI, como uma forma de se controlar a honestidade em registros financeiros; assim, eles se opuseram à introdução do HA. Contudo, o HA tem outras vantagens, e tornou-se dominante. Simon Stevin (1548-1620?) mostrou uma dessas vantagens: se o HA fosse estendido a fim de se representar números decimais, então, as magnitudes poderiam ser facilmente comparadas. De fato, como poderia alguém dizer prontamente se, digamos, 83/35 é menor ou maior do que 71/29?

Embora peritos no uso do ábaco pudessem ser encontrados até recentemente em supermercados soviéticos, talento para o cálculo tem sido freqüentemente encontrado entre os expoentes do HA. Muitas questões interessantes - e, na verdade, pouco entendidas - surgem na Psicologia; por exemplo, "calculadores relâmpagos" geralmente desconhecem, eles próprios, o modo como calculam em tal velocidade, e a maioria deles não tem talento particular para a própria matemática (SMITH, 1983).

No outro extremo situam-se as pessoas que desconhecem quase que completamente a aritmética, e para as quais ela se converte num assunto assustador. Ainda que o condicionante social da má experiência educacional constitua o fator maior, a incapacidade mental também parece estar envolvida, especialmente quando ela se manifesta em algumas formas de cálculo e não em outras.

Uma característica que inibe a proficiência em multiplicação e divisão no HA é que os métodos padronizados não fazem uso completo do sistema de numeração. Para multiplicar dois números inteiros, o modo natural deveria ser multiplicar entre si as quantidades de unidades de cada um a fim de se encontrar o algarismo que ocupará a casa das unidades no número que expressa o produto; multiplicar a quantidade de unidades de cada um deles pela quantidade de dezenas do outro, para encontrar o algarismo que deverá ocupar a casa das dezenas; e assim sucessivamente. Este *insight*, que é devido à tradição védica na India (SHANKARACHAYA, 1965), produz o produto mais facilmente.

Por exemplo,

Primeiro inteiro	4 6 7	
Segundo inteiro	5 8	(5)
Produto	2 7 0 8 6	
Transporte	7 8 5	

O algarismo que deve ocupar a casa das centenas no produto - isto é, o 0 - surge assim: 8 x 4 + 6 x 5 + 7 x 0 = 62; some 62 com 8 (o qual havia sido transportado no cálculo do algarismo que deveria ocupar a casa das dezenas no produto) obtendo 70; como 70 significa 70 centenas, ou 7 milhares e 0 centenas, a casa das centenas no produto deve ser ocupada pelo 0, e a casa dos milhares pelo 7; leia o 70 diagonalmente nas duas últimas linhas do esquema acima. Um método semelhante para efetuar divisões (não muito) longas era também conhecido.

O maior problema que se apresentou no desenvolvimento dos métodos de cálculo durante a Idade Média foi *se os detalhes subjacentes aos métodos de cálculo deveriam ou não ser mantidos para propósito de verificação dos resultados.* Os métodos não-retentivos - tal como aquele baseado no uso de fichas mencionado no parágrafo 1 -, que se desenvolveram com base na movimentação de pedras sobre as várias posições de um ábaco (palavra latina para "superfície plana") a fim de se representar quantidades, vieram a ser conhecidos como "algoristas"; os outros métodos foram denominados "abbacistas". (Note que são usados dois b's para se evitar confusão entre nomes; o sentido de 'abbacista' veio da obra de Fibonacci - "Liber Abbaci" (1202) - que se constituiu numa importante fonte para a Europa das aritméticas e álgebras arábica e hebréia). Gradualmente, os métodos abbacistas prevaleceram principalmente devido à vantagem de permitirem a verificação dos cálculos. A figura 1 mostra uma ilustração clássica do triunfo de um abbacista sobre seu pobre companheiro algorista.

Fig.1: *Feliz abbacista, triste algorista (como no drama grego?); propaganda em* Margarita philosophica *de Georg Reisch, 1504.*

O algorista tem os seguintes números sobre a sua mesa: à nossa esquerda, 2+30+50=82; à nossa direita, 1+40+200+1.000=1.241.

Comentários

1) A questão da verificação de cálculos tem uma conexão freqüentemente negligenciada com a educação atual: por exemplo, a de que *uma calculadora eletrônica é um dispositivo algorista*, no qual não há maneiras de se checar as respostas dadas. Os princípios abbacistas deveriam ser enfatizados no ensino, pelo menos para que o estudante pudesse estimar a ordem de grandeza da resposta antes de pressionar as teclas da calculadora.

2) Erros no cálculo podem ilustrar casos engraçados, porém instrutivos. Por exemplo,

$$\cancel{6}4/1\cancel{6}=4 \text{ pode ser generalizado para } \cancel{a}b/\cancel{a}=b, \qquad (6)$$

o qual é um problema indeterminado requerendo, portanto, que o estudante examine opções em vez de se preocupar, à maneira mecânica usual, exclusivamente com a(s) resposta(s). Uma pequena discussão sobre fatores na expressão (6) acima fornecerá também

$$\cancel{9}5/1\cancel{9}=5; \text{ e há variantes tais como } \cancel{9}8/4\cancel{9}=8/4. \qquad (7)$$

5. A lógica e a teoria dos conjuntos da aritmética

A aritmética dos inteiros positivos recebeu dois novos níveis de fundamentação na década de 80 do século XIX. C. S. Peirce (1839-1914) e Giuseppe Peano (1858-1932) axiomatizaram a aritmética com base na noção de 1 como o número inteiro inicial e na operação de sucessão (2 como o sucessor de 1 e assim por diante). Um dos axiomas foi o princípio da indução matemática, o qual afirma que se uma propriedade é aplicável para $n = 1$, e se valendo para um dado número natural, também vale para o seu sucessor imediato, então, ela se aplicará a todo n. Esta formulação foi simplificada em 1907 por Mario Pieri (1860-1913). Richard Dedekind (1831-1916) deu um tratamento algo similar em 1888 em termos da noção de cadeia (uma relação que mapeia um conjunto de inteiros sobre si mesmo de tal modo que todos os sucessores de um inteiro inicial são obtidos); mas ele foi além ao provar um teorema que legitimava as provas por indução matemática, fornecendo uma justificação para as definições indutivas. Van HEIJENOORT (1967) contém muitos textos originais sobre fundamentos.

Em 1884, Gottlob Frege (1848-1925) elaborou uma base mais fundamental que esta quando deu definições nominais para os inteiros, as quais Bertrand Russell

(1872-1970) encontrou independentemente em 1901. Eles definiram os inteiros como conjuntos de conjuntos iniciando com o 0, definido como o conjunto dos conjuntos vazios Ø; 1 como o conjunto de conjuntos isomórficos (isto é, em correspondência um a um) ao {Ø} e assim por diante, sem cair em um círculo vicioso. A ascenção nessa hierarquia de conjuntos era infinita para Russell, uma vez que ele aceitava a teoria dos números transfinitos (a qual será descrita na próxima seção).

Frege apresentou definições adicionais de números reais (inteiros ou não) através de expansões de suas partes não-inteiras em séries de potências de base 2:

$$\sum_r a_r 2^{-r}, \text{ onde cada } a_r = 0 \text{ ou } 1; \qquad (8)$$

Russell definiu números racionais e irracionais como certos conjuntos de inteiros e racionais respectivamente. As operações aritméticas foram definidas em termos de combinações correspondentes de conjuntos (por exemplo, a adição a partir da união de conjuntos disjuntos). Frege e Russell tinham também meios para definir números negativos. Ambos definiram conjuntos em termos de funções proposicionais, uma vez que esses procedimentos se faziam necessários para a defesa de suas teses logicistas, quais sejam, a de que a aritmética (para Frege) ou toda a matemática "pura" (para Russell) deveria ser derivada unicamente de princípios e procedimentos lógicos. Uma versão moderna dessa abordagem considera os inteiros como quantificadores: a forma sentencial "há .... maçãs aqui" é limitada em uma sentença pela inserção do inteiro em questão (BOSTOCK, 1974, 1979).

Comentários

1) A intenção subjacente a estes empreendimentos, especialmente a de Russell, era a unificação da aritmética, da análise matemática e da geometria com base na teoria dos conjuntos e na lógica matemática. O propósito era epistemológico, pois o que se visava era à reestruturação e à "justificação" de teorias conhecidas com base na teoria dos conjuntos e na lógica matemática. Não houve qualquer novo conteúdo educacional ou heurístico, embora algumas partes dessas teorias possam ser ensinadas nos últimos anos do curso universitário. Lamentavelmente, versões parcialmente compreendidas das mesmas transitaram pela comunidade educacional, assegurando à teoria dos conjuntos um lugar central na "Nova Matemática" da década de 60. Um fator que contribuiu para isto foi a compreensão distorcida do empreendimento de Russell por Jean Piaget, sobretudo quando este último atribuiu um papel totalmente exagerado aos isomorfismos na "concepção de número da criança" (PIAGET, 1952).

2) O adjetivo "Nova" mostra realmente a ausência de conhecimento histórico (afinal, Sibelius dificilmente fazia Nova Música em seu tempo), a despeito da pro-

posta original e de suas limitações. O erro básico nessa abordagem foi *o rigor e generalidade prematuros*, pondo problemas que não podem, num primeiro momento, ser resolvidos pelos estudantes (GRATTAN-GUINNESS, 1973). Ademais, os erros encontrados nos textos atestam a sutileza da teoria dos conjuntos, tal como a distinção entre as propriedades de um conjunto e aquelas de seus membros. E a idéia de que a teoria é o caminho mais geral de manipular coleções *é duplamente errada*. Primeiro, porque ela assume que a relação de pertinência é sempre bem definida (isto é, com base nas opções: verdadeiro ou falso): a teoria dos conjuntos fuzzy* lida com as várias exceções (DUBOIS e PRADE, 1980). Segundo, ela apenas permite aos elementos pertencerem uma única vez ao conjunto - uma limitação elementar, como a evidenciada pelas múltiplas raízes de uma equação polinomial: em vez disso, torna-se necessária uma teoria de conjuntos múltiplos (RADO, 1975).

6. Aritmética transfinita

A partir de 1883, George Cantor (1845-1918) também começou a definir os números inteiros com base em conjuntos, mas por um meio bem diferente: de um dado conjunto *M*, abstrai (isto é, ignora mentalmente) a natureza de seus elementos para deixar para trás a 'tipo de ordem' $\overline{M}$ na qual seus membros se encontram; então, abstrai a ordem para deixar para trás o número cardinal $\overline{\overline{M}}$ de M (DAUBEN, 1979). O papel que ele atribuiu aos atos mentais foi rejeitado pela maioria de seus contemporâneos, embora alguns resíduos permaneçam na interpretação fenomenológica dos inteiros proposta por Edmund Husserl (1859-1928) em 1891, em parte sob a influência de Cantor (WILLARD, 1984).

Posteriormente, Cantor percebeu que os infinitos podiam ser de grandezas diferentes, introduzindo, nesse sentido, o conceito de desigualdade entre inteiros infinitamente grandes. Definiu a seqüência dos ordinais transfinitos começando com o menor deles - ω - cuja existência é assumida imediatamente depois dos ordinais finitos, não tendo ω qualquer predecessor ordinal:

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots 2\omega, 2\omega + 1, \ldots 3\omega, \ldots \omega^2, \ldots \omega^3, \ldots . \qquad (9)$$

* Nota dos Tradutores: Em matemática, os conjuntos fuzzy vêm estimulando novos tópicos de pesquisa em conexão com a Teoria das Categorias, Topologia, Álgebra e Análise. A *teoria dos conjuntos fuzzy* fundamenta-se na tradição das lógicas multivalentes. A *lógica fuzzy* é, basicamente, uma lógica multivalente que permite a definição de valores entre sim/não, verdadeiro/falso, branco/preto, etc. Noções tais como 'mais quente' ou 'muito frio' podem ser formuladas matematicamente e processadas por computadores. A *lógica fuzzy*, que tem se mostrado bastante útil no controle de sistemas subterrâneos e de processos industriais complexos, foi desenvolvida em 1965 por Lotfi A. Zadeh, professor de Ciência da Computação da Universidade da Califórnia em Berkeley.

Cantor também encontrou um caminho para dividir esta seqüência literalmente infinita em "classes de números" cujos tamanhos (isto é, cardinalidades independentes da ordem) se mostraram diferentes. A primeira, compreendendo os inteiros finitos, tem o menor número cardinal, $\aleph_0$; a segunda classe, começando em ω e definida pela propriedade de que a contagem de qualquer membro ordinal poderia ser reordenada em um conjunto de tamanho $\aleph_0$, era a próxima cardinalidade, $\aleph_1$, e assim por diante, infinitamente.

Outra inovação de Cantor foi o fato de ele ter-se dado conta de que os membros de um conjunto podem ser ordenados de diversas maneiras. Para preservar a generalidade da aritmética, ele afirmou o "princípio da boa ordem", segundo o qual qualquer conjunto poderia ter seus elementos arranjados na ordem exemplificada em (9). Isto foi um de seus problemas não resolvidos, cuja prova (em 1904) requereu o axioma da escolha (MOORE, 1982). O maior defensor deste axioma - axioma este que causou muita controvérsia entre os matemáticos e filósofos devido a suas várias formas e, especialmente, por seu caráter não-construtivo - foi Ernst Zermelo (1871-1953); mas Russell encontrou para ele uma forma um pouco melhor, no contexto de definição do produto infinito de números.

Cantor desenvolveu uma aritmética para cada tipo de inteiro, diferente uma da outra e diferentes da aritmética finita; por exemplo,

$$\omega + 1 > \omega, \qquad 1 + \omega = \omega; \qquad \text{e} \qquad \aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 \qquad (10)$$

No entanto, sua seqüência (10) também levou a paradoxos referentes à existência do suposto maior ordinal e também do maior cardinal; isso porque, qualquer que seja N, teríamos tanto $N = N$ quanto $N > N$. A tentativa de evitar esses paradoxos e aqueles semelhantes aos de Russell referentes apenas aos conjuntos, levou a definições modificadas dos números como conjuntos de conjuntos. Em particular, a teoria dos tipos de Russell, em seu logicismo pós-paradoxos, requereu que os inteiros fossem definidos e sua aritmética fosse desenvolvida para cada tipo.

Comentários

Este material constitui um bom curso para a graduação. Penso que os axiomas da escolha constituem uma fonte mais frutífera de apreciação do que os detalhes da aritmética transfinita, parcialmente porque a gama de conseqüências para a matemática excede em muito a teoria dos conjuntos e a aritmética, e em parte porque a ampla gama de axiomas equivalentes oferece excelentes exemplos de (não)construtividade aparente em matemática.

7. Muito barulho acerca do zero

Os babilônios usualmente indicavam o zero por um espaço vazio, mas era difícil distinguir, por exemplo, 3 5 de 3 5 (isto é, 305 de 30.005 no HA). Assim, a criação de um símbolo mostrou-se necessária; e eles inventaram um, algo parecido com ⋦, mas parece que ele foi usado somente para marcar os espaços em branco. O grande passo de usá-lo *também* como um número que poderia ser combinado aritmeticamente com outros números parece ser de origem hindu.

Culturalmente, o status do zero, bem como sua identificação errônea com o nada, tem sido uma preocupação bastante difundida (ROTMAN, 1987). Um importante exemplo é o do dramaturgo William Shakespeare, que escreveu, especialmente em seu "Rei Lear", que nada é tudo. Ele escreveu suas peças na virada do século XVI para o XVII, precisamente quando o HA começou a ter um uso generalizado na Grã Bretanha; sem dúvida, este processo despertou sua consciência.

No HA o símbolo para 'zero' é "0"; suas origens não são conhecidas com certeza, pois pode ter surgido na matemática grega, na indiana e na chinesa (possivelmente independentemente), talvez, a partir do século II d.C. Além disso, "o" é a primeira letra da palavra "ouden", que é a palavra grega para "nada". Ele pode também ter sido proposto como um símbolo para a vagina, o nada do qual as coisas nascem; isso porque, é bem conhecido que a fertilidade e os símbolos sexuais desempenharam um papel proeminente na vida religiosa e cultural das civilizações antigas. Outros símbolos usados eram similares ao "0"; um ponto • e algumas vezes, em grego, "ø" ou "θ".

Mesmo quando a necessidade de um símbolo foi percebida, muita perplexidade filosófica manifestou-se em torno do zero, especialmente por ele não satisfazer a lei do cancelamento ($a \times 0 = b \times 0$ sem que $a = b$). Além do mais, ele foi freqüentemente associado (muito) intimamente com o nada. Mesmo em suas formulações da aritmética relatadas aqui nos parágrafos 5 e 6, Cantor e Dedekind sempre iniciaram os conjuntos numéricos com o 1: Cantor não podia definir o zero, pois ele teria que abstrair (isto é, ignorar mentalmente) o conjunto $\varnothing$ do vazio (o que torna surpreendente sua notação $\aleph_0$!). Somente Russell e Frege compreenderam claramente a diferença entre nada, $\varnothing$ e 0. Desde então, a distinção tornou-se firmemente estabelecida, mesmo em sistemas em que os matemáticos podem *escolher* combiná-los. Por exemplo, o sistema de ordinais proposto em 1923 por Johann von Neumann (1905-1958) foi o seguinte:

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := \{\varnothing\}, \qquad 2 := \{0, 1\}, \ldots, \qquad \omega := \{0, 1, \ldots\}, \ldots \tag{11}$$

Comentários

1) O ensino do zero é freqüentemente deplorável, especialmente quando se identifica esta noção com o nada. Isto é completamente incorreto, pois o zero tem propriedades tais como: $7 + 0 = 7$ (ao passo que 7 + nada não é definido).

2) Pode-se também usar o zero para enfatizar a distinção entre igualdade e identidade; além disso, para casos-padrão tais como

$$2 + 2 = 4, \text{ exemplos tais como } 0 + 0 = 0 \qquad (12)$$

mostram ainda mais claramente essa diferença (há dois zeros do lado esquerdo e somente um do lado direito; portanto, não são idênticos). A identidade é um conceito filosófico difícil de se trabalhar; para se atingir propósitos educacionais em matemática, seria melhor apresentá-la como identificação (do 4 como a soma de 2 mais 2, por exemplo).

8. Formalismos e incompletudes

A palavra "formalismo" normalmente aparece em conexão com a filosofia da aritmética, mas vários tipos deveriam ser distinguidos. Há um tipo de formalismo em Cantor, segundo o qual ele via que a construção consistente dos números transfinitos garantia a existência dos mesmos. Cantor não possuía qualquer metateoria no interior da qual essa consistência pudesse ser provada, e esta ausência pode ter sido um dos estímulos para David Hilbert (1862-1943) conceber a metamatemática como uma teoria no interior da qual a consistência (e a completude) de uma teoria axiomatizada pudesse ser estudada.

O programa formalista de Hilbert, que floresceu principalmente nas décadas de 20 e 30 após ter sido lançado no início do século (DETLEFSEN, 1986), via a aritmética de uma forma muito similar à axiomatização de Peano mencionada no parágrafo 5, e considerou sua fundamentação como suficiente para fornecer os fundamentos de grande parte da (ou de talvez "toda" a) matemática. Mas a sua esperança de demonstrar a consistência da aritmética foi posta abaixo por um teorema provado em 1931 por Kurt Gödel (1906-1978); Isso porque, o corolário desse teorema mostrou que a consistência só pode ser provada em uma metateoria mais rica do que a aritmética, o que contrariava a visão de Hilbert de uma metateoria mais primitiva, e de uma meta-metateoria ainda mais primitiva, etc. Além disso, o mais importante teorema de Gödel refutou a crença (intuitiva) de Russell de que sua axiomatização logicista da aritmética poderia ser completa.

Mais ainda, o método de prova de Gödel, baseado em uma metateoria expressa em termos aritméticos, constituiu-se no principal estímulo para o estudo das funções recursivas, as quais tornaram-se uma técnica de destaque no desenvolvimento dos computadores com Alan Turing (1912-1954), e formaram os últimos elos duradouros entre a lógica e a matemática (DAVIS, 1965). Finalmente, a distinção entre teoria e metateoria requerida pela prova de Gödel mostrou aos lógicos o cuidado com o qual eles precisavam observar esta distinção. Para os matemáticos, no entanto, os teoremas de Gödel foram de uma importância marginal, uma vez que ele trabalhou com um conceito de prova muito mais estrito do que aquele com o qual eles estavam (ou ainda estão) acostumados.

Entretanto, a maior parte da recente filosofia da aritmética tem sido construída sobre versões da abordagem de Hilbert ou sobre uma abordagem teórica de conjunto; algumas têm sido de caráter construtivista ou intuicionista. Outros tratamentos são nominalísticos, tentando evitar de dar aos números um 'status' abstrato (FIELD, 1987). Em acréscimo a isso, interpretações sociais dos números e da aritmética - segundo as quais os números são experienciados, as operações aritméticas realizadas e as provas concebidas como ações - têm-se evidenciado com certo destaque (LIVINGSTONE, 1986); De acordo com essas interpretações sociais, a sentença "2 + 2 = 4" deveria ser vista como sendo menos do que uma tradicional verdade platônica e mais do que uma questão de opinião pessoal. Números são coisas antigas (ou símbolos, ou conjuntos, ou atos, ou ...); seu estatuto tem sido sempre obscuro, e, provavelmente, continuará a ser.

Comentários

1) Alguns aspectos do formalismo, especialmente a recursão e a computabilidade, ligam-se bem a cursos de graduação e pós-graduação em computação. Porém, contextos mais ricos surgem em contextos mais elementares, especialmente ao enfatizarem a diferença entre números e numerais, o sentido bruto do formalismo. Relações tais como "7 > 3" deveriam ser estudadas cuidadosamente, e também o despropósito de se perguntar qual três - "3", "3" ou "**3**" - é o verdadeiro número três; daí então, o caráter mais abstrato dos números em relação aos numerais pode ser claramente indicado, qualquer que seja o 'status' que se escolha para atribuir a eles.

2) Além de números e numerais, as *cadeias de dígitos ordenados* deveriam ser enfatizadas. Estamos de há muito familiarizados com elas em números de telefones, mas agora elas se apresentam também em códigos de barras, números PIN*, etc.

* Nota dos Tradutores: PIN é, em inglês, uma sigla para ***Personal Identification Number***. O *Número de Identificação Pessoal* nada mais é do que uma senha que permite o acesso do usuário a um tipo específico de serviço.

Embora uma cadeia de dígitos ordenados possa ser facilmente associada com seu número correspondente (numerologistas freqüentemente fazem isto, tais como os cristãos ortodoxos tomando 111 como o número da trindade), elas costumam ser tratadas de forma diferente daquela utilizada no tratamento dos números, isto é, com muito menos conteúdo matemático; em particular, a elas não está associada qualquer aritmética. Nós, igualmente, recitamos e escrevemos as cadeias de dígitos de um modo diferente ("um um um" em vez de "cento e onze") daquele utilizado para os números: por exemplo, há várias maneiras de se falar e escrever os números de telefones em diferentes países.

3) Há poucas superposições entre os números e as cadeias de dígitos ordenados: uma delas é a maneira de se ler os números decimais; o número 27,27, por exemplo, é lido como "vinte e sete vírgula dois sete", já que a parte decimal do número é lida da esquerda para a direita. Neste caso, há também um aspecto psicológico envolvido: devido às origens geográficas do HA, antes de procedermos à leitura de um número inteiro, costumamos separar seus algarismos em grupos de 3, no sentido da direita para a esquerda, contrariamente ao que fazemos na leitura das palavras de nossa língua. No caso de números inteiros contendo até a casa dos milhões, fazemos isso tão freqüentemente que nem constumamos perceber que o fazemos; mas quando nos defrontamos com, digamos, o número "463.563.640.863.759", então, o processo inverso a que fizemos referência se torna consciente.

Referências e outras leituras

Esta lista não pretende ser exaustiva. Muitos livros gerais sobre a história dos números são indiferentes ou péssimos como fontes de estudo.

BENOIT, P. and others (1992) (Eds.): Histoire de fractions, fractions d'histoire, - Basel: Birkhäuser.

BOSTOCK, D. (1974, 1979): Logic and Arithmetic, 2 vols. - Oxford: Clarendon Press.

CAJORI, F. (1928): A History of Mathematical Notations, Vol. 1. - La Salle, Ill.: Open Court [Extensive survey of symbols for numbers and operations].

COHEN, H.F. (1984): Quantifying Music. The Science of Music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580-1650. -Dordrecht: Reidel.

CROSSLEY, J.N. (1980): The emergence of Number. - Steel's Creek: Upside Down A Book Company [A refreshing survey of the development of numbers, including complex numbers].

DAUBEN, J.W. (1979): Georg Cantor. - Cambridge, Mass.: Harvard University Press. [Repr. 1990. Princeton: Princeton University Press].

DUBOIS, D.: Prade, H. (1980): Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. - New York: Academic Press.

DAVIS, M. (1965) (Ed.): The Undecidable. - Hewlett, New York: Raven Press [A source book].

DETLEFSEN, M. (1986): Hilbert's Program. - Dordrecht: Reidel.

FIELD, H.H. (1987): Science whithout Numbers. - Oxford: Blackwell.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1973): Not from Nowhere. History and Philosophy Behind Mathematical Education. In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 4, 421-453.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1994) (Ed.): Companion Encyclopaedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 2 vols. - London and New York: Routledge [Many relevant articles, especially in Parts 1, 2, 5, 6 and 12].

GRATTAN-GUINNESS, I. (1996): Numbers, Magnitudes, Ratios and Proportions in Euclid's Elements: How Does He Handle Them? - In: Historia Mathematica. Vol. 23, 355-375.

HOPPER, V.F. (1938): Medieval Number Symbolism. - New York: Cooper Square [Repr. 1969].

JUDAICA (1971): Articles on "Alphabet", "Astronomy", "Gematria", "Kabbalah", "Mathematics", "Numbers" and "Sefirot", *passim in Enciclopaedia Judaica.* 16 vols - Jerusalem: Keter [See also various biographical articles].

KLEIN, J. (1968): Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra. - Cambridge, Mass.: MIT Press.

LIVINGSTONE, E. (1986): The Ethnomethodological Foundations of Mathematics. - London: Routledge and Kegan Paul.

LOUNSBURY, F.L. (1978): Maya Numaration, Computation, and Calendrical Astronomy. - In: Dictionary of Scientific Biography, Vol. 15, 759-818.

MCCLAIN, E.G. (1978): The Myth of invariance. - York Beach, Maine: Nicolas-Hays.

MOORE, G.H. (1982): Zermelo's Axiom of Choice. - New York: Springer.

PIAGET, J. (1952) The Child's Conception of Number. - London: Routledge and Kegan Paul. [French original 1941].

RADO, R. (1975): The Cardinal Module and Some Theorems on Families of Sets. - In: Annali di Matematica Pura ed Applicata (4)7, 135-154.

ROTMAN, B. (1987): Signifying Nothing: the Semiotics of Zero. - London: MacMillan.

SCHMANDT-BESSERAT, D. (1992): Before Writing: from Counting to Cuneiform, Vol. 1. - Austin, Texas: University of Texas Press [Volume 2 is a catalogue of tokens].

SHANKARACHAYA (1965): Vedic Mathematics. - Delhi: Motilal Babarsidass.

SMITH, S.B. (1983): The Great Mental Calculators. - New York: Columbia University Press.

SYLLA, E. (1984): Compounding Ratios: Bradwardine, Oresme, and the First Edition of Newton's Principia. - In: E. Mendelsohn (Ed.). Transformation and Tradition in the Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 11-45.

Van HEIJENOORT, J. (1967) (Ed.).: From Frege to Gödel. - Cambridge, Mass.: Havard University Press [A source book].

WILLARD, D. (1984): Logic and the Objectivity of Knowledge: A Study in Husserl's Early Philosophy. - Athens, Georgia: Ohio University Press.