ISSN (versão *online*): 2317-5125
95
Amazônia
243
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

A distância entre o saber acadêmico e o saber ensinado revelado em um livro didático de matemática do 7º ano: o caso da adição e subtração com números inteiros

The distance between academic knowledge and taught knowledge revealed in a 7th grade textbook of mathematics: the case of addition and subtraction with integers

Kleber Ramos Gonçalves [1]
Marilena Bittar [2]

Resumo

Neste artigo apresentamos recortes de uma pesquisa que teve por objetivo compreender distanciamentos e aproximações entre a Matemática presente na construção do conjunto dos números inteiros e a Matemática proposta para o ensino das operações de adição e subtração nesse conjunto em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental. Utilizamos a teoria antropológica do didático para estudar as tarefas, suas formas de resolução, as possíveis justificativas matemáticas e as adaptações realizadas pelos autores deste livro. A análise das praxeologias matemáticas modeladas nesse livro nos forneceu elementos para atingirmos nosso objetivo, alguns dos quais trazemos nesse artigo.
Palavras chaves: Números Inteiros; Teoria Antropológica do Didático; Livros Didáticos; Transposição Didática.

Abstract

In this paper, we present cutouts of a research that aimed to understand distances and approximations between the Mathematics present in the construction of the set of integers, and Mathematics proposal for the teaching of the operations of addition and subtraction in this set in a textbook of the 7th year of elementary school. We use the anthropological theory of the didactic to study the tasks, their ways of resolution, the possible justifications of the mathematical and the adaptations made by the author of this book. The analysis of the praxeologias mathematical modeled in this book have provided us with the elements to achieve our goal, some of which we bring in this article.
Keywords: Integers; Anthropological Theory of Didactic; Textbook; Didactic Transposition.

[1] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul | kleberemic@gmail.com
[2] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul | marilena.bittar@ufms.br

Introdução

Nossa pesquisa de mestrado[3] (GONÇALVES, 2016) teve como objetivo compreender distanciamentos e aproximações entre a Matemática presente na construção do conjunto dos números inteiros relativos e a Matemática proposta para o ensino das operações de adição e subtração nesse conjunto em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental. Realizamos o estudo da construção axiomática desses números e a análise da apresentação desse conteúdo no referido livro didático para, assim, identificar e compreender a transposição didática realizada pelos autores do livro didático, da matemática formal para a escolar. Nesse texto apresentamos alguns resultados dessa pesquisa.

As práticas de ensino em Matemática na educação básica revelam que alguns conteúdos apresentam mais dificuldades de ensino que outros. Tais dificuldades podem ser, por vezes, decorrentes de impedimentos oriundos das escolhas didáticas. Como exemplos de situações que podem gerar dificuldades referentes ao ensino e à aprendizagem do estudo do conjunto dos números inteiros relativos e que pudemos identificar em nossa pesquisa, citamos:

- uso dos sinais "mais" e "menos" que em alguns casos representam operações e, em outros, representam o sentido positivo e negativo de um número;
- contextos com temperaturas, principalmente com o uso do ar condicionado, quando se ouve a seguinte frase: "aumenta pra mim!". Mas, aumentar o quê? Estou com frio, então *aumento* a temperatura, ou estou com calor, então *diminuo* a temperatura?
- utilização das palavras "atraso", "dívida", "profundidade";
- reprodução da regra dos sinais da multiplicação em outras operações, entre outras situações que exporemos no decorrer da nossa escrita.

A teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999), referencial teórico e metodológico de nosso estudo, nos permitiu mapear praxeologias propostas em um livro didático do 7º ano sobre as operações de adição e subtração dos números inteiros relativos. Por meio delas, buscamos compreender justificativas matemáticas presentes (ou ausentes) que permitissem que esse saber vivesse nessa instituição.

Nesse texto, apresentamos, inicialmente, algumas dificuldades de ensino dos inteiros relativos, seguida da análise da praxeologia matemática relativa aos números inteiros relativos e às operações de adição e de subtração propostas no livro didático que analisamos.

---

[3] Essa pesquisa é vinculada ao Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática – DDMat /UFMS que tem um dos focos de investigação a análise de livros didáticos. Agradecemos aos membros do grupo por todo o debate durante a realização da pesquisa, em especial a Danielly Regina Kaspary dos Anjos.

Dificuldades no ensino dos números inteiros relativos: alguns elementos

Para a construção dos inteiros no ensino superior estudamos alguns livros[4] que tratavam da teoria dos números, e cuja ênfase fosse esse conjunto. Como nossas análises preliminares do livro didático não revelaram elementos acerca de algumas justificativas relativas aos conceitos ensinados, voltamo-nos a esse estudo com intuito, não de complementar o livro didático, e sim, de compreender possíveis razões de tais elementos não estarem presentes nesse livro, bem como fundamentar nossa compreensão dos procedimentos e dos algoritmos do conjunto dos números inteiros relativos.

Buscamos, assim, articular como os conceitos de anel, domínio de integridade e as propriedades dessas estruturas algébricas (presentes na construção dos inteiros) são adaptados, ou não, por autores de um livro didático para o ensino fundamental. Esse estudo nos permitiu compreender melhor as dificuldades desse conteúdo na educação básica.

Em um dos livros do ensino superior a introdução aos números inteiros relativos é iniciada com a apresentação do conjunto dos naturais, que no desenvolver do trabalho axiomático é expandido aos inteiros. Uma das primeiras noções estudadas é o fato de os naturais satisfazerem aos axiomas de Peano[5]. Assim, com intuito de aproximarmos essa construção à realidade da educação básica e ao observarmos o primeiro axioma de Peano, percebemos que o trabalho com o sucessor é aplicado à construção da reta numérica e, como veremos posteriormente, à construção das operações. Mas, alguns conceitos que comporiam as justificativas matemáticas não fazem parte diretamente do currículo dessa etapa de escolaridade. Conceitos tais como funções, noções de conjuntos e de lógica Matemática (proposições, conectivos e tautologias) são alguns exemplos.

Nossas análises preliminares, juntamente com a leitura das pesquisas de Nogueira (2008), Queiroz (2006) e Pommer (2010) apontaram que o trabalho de justificar o ensino, de forma geral na educação básica, passa pela apresentação de exemplos práticos e memorização de regras. Esse tipo de trabalho pode estar vinculado estritamente às escolhas didáticas ou, a depender do conceito estudado, ao fato de realmente não ser possível ser justificado matematicamente, o que observamos acontecer com o caso do estudo dos números inteiros relativos.

Como exemplo de memorização podemos citar como se determina o valor absoluto de um inteiro, ou seja, o módulo de um inteiro sempre será um número positivo, pois, se o número for positivo, seu valor absoluto será ele mesmo e; se for negativo, será seu oposto. E, o exemplo prático pode se dar pela criação de contextos adaptados advindos de situações cotidianas. A criação desses recursos pedagógicos, pensando em uma

---

[4]Os livros escolhidos para esse estudo foram: Introdução à Álgebra (GONÇALVES, 2006) por ter composto a bibliografia de um dos cursos de graduação; Introdução à Álgebra Abstrata (EVARISTO, PERDIGÃO, 2012) e; Curso de Álgebra (HEFEZ, 2002) por trazerem elementos que complementassem o primeiro.

[5]*Axiomas de Peano*: i. Existe uma função injetiva s de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (a função s é chamada sucessor e, para cada n $\in$ $\mathbb{N}$, a imagem s(n) é dita sucessor de n); ii. Em $\mathbb{N}$ existe um elemento, chamado um e indicado por 1, tal que $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1\}$; iii. Se um predicado p definido em $\mathbb{N}$ é tal que, p (1) é verdadeiro, e se p (n) é verdadeiro, acarreta que p(s(n)) é verdadeiro, então p é uma tautologia em $\mathbb{N}$.

aproximação com a construção axiomática dos inteiros, seria equivalente ao estudo e à demonstração, por exemplo, da seguinte <u>*proposição:*</u> "Seja *A* um anel. Para todos *a*, *b* ∈ *A*: *i.* (–1). *a* = –*a*; *ii.* (–*a*). *b* = *a.* (–*b*) = – (*a.b*); *iii.* (–*a*). (–*b*) = *a.b*".

Dentre os processos de ensino e de aprendizagem dos inteiros relativos, existem contextos que apresentam mais dificuldades do que outros. A experiência em lecionar esse conteúdo nos indica que, o conceito de comparação de inteiros relativos pode acarretar algumas dessas dificuldades. Por exemplo, os estudantes sabem, do estudo de naturais, que 3 é maior que 2, e transportam esse raciocínio para os negativos, ou seja, se compararmos –*3* e –*2* alguns deles podem responder que –*3* é maior. Geralmente, a comparação de inteiros relativos é tratada com o estudo das retas, e por meio de contextos envolvendo temperaturas, altitudes e saldos bancários. Um modelo de atividade que encontramos no livro didático é a comparação de dois negativos: utilizando um termômetro e associando cada inteiro a uma marcação desse instrumento e, por meio da observação daquele que está representado por um ponto mais baixo, determinamos o menor entre eles. Logo, em um livro em que se realiza esse trabalho, a comparação de dois inteiros relativos é dada de forma pragmática.

A operação de subtração dos inteiros relativos também pode ser tratada como um conceito que pode gerar dificuldades de ensino, pois o sinal de menos além de representar que um número é negativo, nesse novo contexto será também indicativo de uma operação. No ensino superior essa operação pode ser deduzida por meio da definição de Anel[6] de Integridade, a partir da verificação que o simétrico de um elemento é único. Ou seja, *a* + (–*a'*), pode ser denotado por *a* – *a'*, isto é, dados *x* e *y*, *x* – *y* = *x* + (– *y*). Dessa forma, define-se a operação de subtração para um domínio de integridade. Nota-se que, como *a* + (– *a*) = 0, o elemento simétrico de – *a* é *a*, isto é, – (– *a*) = *a*. Outro ponto a ser enfatizado é sobre o conceito de simétrico de um inteiro, pois ele também é representado pelo sinal de menos, o que gera algumas outras confusões conceituais. Assim, há três situações: representativo de um negativo, operação de subtração e simétrico.

O conceito de números simétricos também é utilizado em expressões numéricas, pois para "se eliminar parênteses, chaves e colchetes", uma das formas de ensino perpassam o seu uso. Por exemplo, para a expressão "– (– 2) + (– 2)" calculamos o simétrico de – 2 e somamos esse resultado à – 2, que nos dá como resposta "0". Diante dessas três situações em que o sinal de menos pode ser utilizado, ressaltamos que, dependendo da forma de ensino, os alunos podem ser conduzidos a decorar sem compreensão, e assim, não serem capazes de identificar o momento correto de usar essa ou aquela regra.

Percebe-se assim, que o ensino dos inteiros relativos pode ser repleto de regras, pois para se identificar um número negativo, ou para comparar dois inteiros relativos, ou ainda, para o cálculo do valor absoluto, do simétrico e das operações, o ensino via regras é uma opção de ensino.

Se o estudo for o valor absoluto, por exemplo, uma possível definição, diz que módulo é a distância entre um número dado e o zero. E, um exercício que envolve várias discussões

---

[6]Anel: Dado um conjunto qualquer D e as operações de adição (+) e de multiplicação (·). A terna (D, +, ·), será denominada de Anel se as propriedades a seguir forem válidas: $\forall x, y \; e \; z \in \mathbb{Z}$, Associativa da soma, Comutativa da soma, Existência do elemento neutro, Existência do inverso aditivo, Associativa da multiplicação, Comutativa da multiplicação, Existência da unidade em $\mathbb{Z}$, Distributiva do produto em relação à soma.

e que propicia aos alunos o trabalho de criar hipóteses acerca do comportamento dessas propriedades seria a aplicação do conceito em outras situações. Ou seja, o estudo do valor absoluto não ficaria no nível de aplicação de uma regra em exercícios semelhantes, tais como, determinar o módulo de um inteiro; identificar entre dois inteiros relativos qual tem maior módulo; somar o módulo de dois ou mais inteiros relativos; determinar a representação gráfica do valor absoluto de um inteiro dado, entre outros.

Um material bastante utilizado para as operações, e que também pode se tornar em dificuldade à aprendizagem, são as barrinhas azuis e vermelhas, que representam, respectivamente, valores positivos e negativos. As regras válidas para a adição e subtração geram confusões conceituais para a multiplicação e divisão. Por exemplo, (– 2) + (– 3) significa somar duas quantidades negativas, ou seja, a soma de duas quantidades de barrinhas vermelhas resulta em um número negativo. Mas, para multiplicar duas quantidades negativas, (– 2) . (– 3), o resultado será positivo, pois, segundo a regra do jogo, partimos da ideia de representar o zero. Sabendo que uma barrinha azul e uma vermelha representam zero, podemos então, organizar seis barrinhas azuis e seis vermelhas também como representativo do zero. Como a regra pede para retirar dois grupos de três barrinhas vermelhas, sobrará essa mesma quantidade de barrinhas azuis.

Sendo assim, a falta de compreensão de algumas regras, alguns conceitos válidos para os naturais, a impossibilidade de se justificar matematicamente alguns conceitos, a criação de recursos didáticos – jogos, regras e materiais concretos – para tais justificativas, são alguns exemplos de dificuldades à aprendizagem dos números inteiros relativos.

A seguir apresentamos um breve recorte das análises realizadas em um livro didático, buscando articular o que estudamos sobre o conceito dos inteiros no ensino superior alinhavado com as análises dos dados produzidos. Para esse estudo, identificamos as praxeologias presentes no livro didático, o que significa modelar o quarteto praxeológico definido por Chevallard (1999).

Análise de alguns dados produzidos

O livro didático analisado foi o volume destinado ao 7º ano da coleção "Praticando Matemática - Edição Renovada", cujos autores são Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos e, também a mais vendida no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD /2014. Nesse volume, buscamos elementos que possibilitassem descrever e analisar a estruturação da sequência de ensino dos inteiros relativos propostas pelos autores.

Como para a análise e descrição [de uma] proposta de ensino a teoria antropológica do didático nos propicia "instrumentos claramente operatórios" (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa), mobilizamos esse modelo denominado de organização praxeológica, que é composta por quatro elementos que constituem a anatomia da atividade matemática (CASABÒ, 2001) dessas propostas de ensino.

> Em torno de um tipo de tarefas, T, se encontra [...], em princípio, uma tripla formada por uma técnica (ao menos), τ, por uma tecnologia de τ, θ, e por uma teoria de θ, Θ. O total, indicado por [T, τ, θ, Θ], constitui uma praxeologia pontual, onde este último qualificativo significa que se trata de uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefas T. Uma tal praxeologia – ou organização praxeológica – está então, constituída por um bloco prático/técnico, [T, τ], e por um bloco tecnológico-teórico [θ,

> Θ]. O bloco [θ, Θ] que se identifica habitualmente como um saber, enquanto que o bloco [T, τ] constitui um saber-fazer. Por metonímia designa-se usualmente como "saber" a praxeologia [T, τ, θ, Θ] completa, ou qualquer parte dela (CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa).

Sendo assim, nossa descrição se deu por meio da praxeologia matemática ou organização matemática desse livro, ou seja, pelos tipos de tarefas Ti, que podem ser caracterizados por situações a serem resolvidas, e estas por sua vez, dão origem às atividades matemáticas. Essas tarefas necessitam de uma técnica (τ), ou seja, "a realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica [τ]" que a resolve (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.5, tradução nossa). Essa técnica deve ser justificada por algumas propriedades, definições ou conceitos matemáticos, denominado de discurso tecnológico (θ) ou tecnologia. E, esses elementos são fundamentados por um discurso teórico (Θ), por exemplo, a teoria dos números. A teoria vista de outra forma, "possui as mesmas funções da tecnologia, porém, com um aspecto mais abrangente" (KASPARY, 2014, p.42).

Os resultados das análises também foram descritos e analisados via organização didática. O trabalho com essa organização se dá pelo estudo das escolhas das formas de apresentação dos conteúdos matemáticos, e foi realizado por meio dos momentos didáticos. As organizações matemáticas e didáticas foram modeladas de forma concomitante.

Chevallard (1999) enumera seis momentos que revelam uma funcionalidade dos estudos das organizações didáticas, e que, no decorrer do desenvolvimento da praxeologia, podem ser identificados aleatoriamente, concomitantemente ou deixar de acontecer. Esses momentos são denominados: o primeiro encontro com a organização matemática é o momento em que é apresentado à praxeologia; o segundo momento, exploração dos tipos de tarefas Ti e da elaboração de uma técnica τi, trata da construção de uma forma de resolver aquela situação; O terceiro momento, a constituição do entorno tecnológico-teórico [θ/Θ] relativo à τi; o quarto momento, o trabalho com a técnica, será a situação de aperfeiçoamento da técnica por meio de sua aplicação a um conjunto de tarefas representativas do objeto matemático em estudo; o quinto momento, a institucionalização, é o momento de definição da organização matemática, de explicitação do objeto de estudo, inserindo e retirando os elementos que fizeram parte do trabalho; o sexto momento, referente à avaliação da praxeologia, é a ocasião em que o que foi produzido durante o processo será objeto de estudos, em que será verificado o "quanto vale, de fato, a organização matemática que foi construída e institucionalizada" (CHEVALLARD, 1999, p. 23, tradução nossa).

No livro Praticando Matemática, o estudo dos números inteiros relativos emerge de um contexto em que os alunos não conseguiriam resolver uma subtração com o conhecimento sobre números naturais de que dispunham até essa etapa de escolaridade, tais como "8 – 10" ou "3 – 7". A forma como esses autores escolheram para discutir o tipo de tarefa que permite identificar quando um número representa ideias negativas, possui características do primeiro momento (CHEVALLARD, 1999). E, para os contextos das operações, nessa fase inicial, as ideias de "grandezas subtrativas" são utilizadas, como por exemplo, interpretar "– 2" como a subtração de duas unidades. Essa abordagem será modificada a partir da construção das operações de adição e subtração.

Na figura 1 trazemos dois excertos do livro que retratam a intenção dos autores em propor contextos7 de aplicações dos "números negativos". Tais excertos encontram-se em uma mesma página, porém não lado a lado, conforme apresentado na figura, o que foi feito aqui para facilitar a leitura dos mesmos.

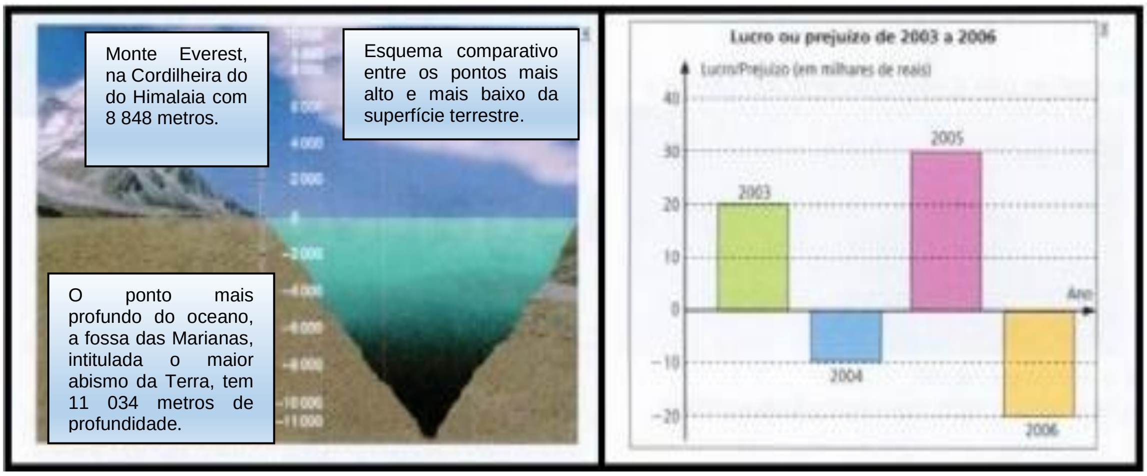


Figura 1 – Exemplo de contexto com números negativos. **Fonte**: adaptado de Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 56.

Nessa figura são trazidos pequenos textos que informam aos alunos que a profundidade abaixo do nível do mar (altitude zero) é representada por números negativos, assim como os prejuízos mostrados no gráfico dos balanços financeiros referentes a uma empresa. A apresentação da ideia de números negativos e positivos, e dos contextos em que podem ser aplicados, foi realizada por meio de três situações, dentre as quais temos a da figura 1. Essa apresentação revela que os autores parecem acreditar que, por meio de situações reais, tem-se oportunidade de construir um trabalho com os números negativos, mais preocupado com a exploração daquilo que os alunos trazem como conhecimentos sobre os inteiros relativos. As situações cotidianas que foram modeladas podem ser a conexão entre os conceitos já estudados e os que serão desenvolvidos nessa etapa de escolaridade, atenuando o fato de que, nos estudos dos inteiros relativos, alguns conceitos não podem ser trabalhados com toda a formalização matemática que os caracterizam.

Até essa parte da coleção, nossa análise observou praticamente quatro momentos da organização didática, a saber, o *primeiro encontro com a organização*, realizado por meio de situações cotidianas modeladas para a linguagem Matemática; a *exploração de um tipo de tarefa e de sua técnica*, trabalhada de forma simultânea com o primeiro momento, ou seja, o primeiro contato com o conceito é dado pela exploração da tarefa que se pretende ensinar; o *trabalho com a técnica*, situações de aperfeiçoamento da técnica aplicada a tarefas representativas do que se estudou e; a *institucionalização* dessa organização, que é feita por meio de deduções realizadas a partir dos encadeamentos das ideias de algumas figuras e textos dispostos, muitas vezes, sem ter uma articulação entre elas ou uma sequência dada pelos autores.

---

7 Não é objetivo desse texto discutir o quão significativos são ou não tais contextos.

Ainda pensando nessa primeira seção de estudo do volume do 7º ano, modelamos dois tipos de tarefas, T_1 e T_2, que são possíveis de serem identificadas em quase todas as seções do livro, descritas no quadro 1.

Quadro 1 – Tipo de tarefa e técnicas: praxeologia adição.

Tipo de Tarefas	Técnicas
T_1: Dado um problema enunciado na língua materna, converter as informações para linguagem Matemática.	τ_1: Associar as informações a uma das situações a seguir: i. Contextos Monetários (lucros - positivo e prejuízos - negativo); ii. Reta numérica: À direita de zero positivo e à esquerda negativo; iii. Temperaturas: acima de zero positivo e abaixo de zero negativo.
T_2: Dado um problema ou situação-problema, identificar se os valores, frases ou respostas são representados por números negativos ou positivos.	τ_2: Usar um ou mais passos: 1. Utilizar τ_1; 2. Escolher uma operação; 3. Resolver a operação;

Na escrita de τ_1, foram suprimidos os contextos cujas técnicas demandariam conceitos de outras áreas do conhecimento e estamos considerando tarefas e técnicas de cunho matemático (da matemática escolar). Vemos que, apesar de a modelagem da técnica não conter elementos matemáticos formais, esses são os procedimentos passíveis de serem ensinados nessa etapa de escolaridade. E, quando se fala em reta ou lucros, vários são os elementos matemáticos presentes, apesar de não estarem explícitos.

Vale ressaltar que a elaboração da T_1 foi necessária devido ao fato de que, em várias situações-problema, exige-se a tradução tanto da língua materna quanto de outra representação matemática, para uma linguagem matemática adequada ao problema. O tipo de tarefas T_1 é comum em vários contextos da matemática escolar, mas a técnica descrita é própria do subconjunto das tarefas – que envolvem o conjunto dos números inteiros relativos – desse tipo de tarefa maior.

Salientamos ainda que algumas tarefas exigem certo grau de interpretação do problema, e as classificamos nesse tipo de tarefa. Nós o fizemos, pois, quem realiza as mudanças, precisa compreender os dados e aquilo que se solicita para a solução do problema. Lembremos que para T_1 a descrição de uma técnica é muito difícil e, nesse caso, nos pautamos em algumas ações propostas pelos autores, ações essas inerentes a esse tipo de tarefas. Os autores não enunciaram que o aluno deveria converter o problema da língua materna para a matemática, mas essa tarefa tem que ser executada durante muitas das resoluções das atividades propostas.

A seção que trata da operação de adição é iniciada por alguns reencontros, pois, no decorrer desse livro, em várias oportunidades, há tarefas em que se efetuou essa operação ou com inteiros positivos ou quando a primeira parcela fosse maior que a segunda. Nossas análises também foram pautadas nos momentos didáticos descritos por Chevallard (1999), observamos assim, retomadas "das noções já estudadas, [não] sendo as mais variadas, [mas procurando] novos níveis de formalização das atividades realizadas" (PAIS, 2012, p.34).

Tomamos a figura 2 como a nova organização praxeológica que permitiu descrever o reencontro de alguns elementos dos procedimentos de adição com os números inteiros relativos. Nessa seção, o *primeiro momento* foi dado por meio de um problema – modelado por nós como uma tarefa – envolvendo ideias monetárias: dívidas e lucros. Nessa situação as representações das operações de adição são passadas da língua materna para a linguagem matemática, e essa é a primeira tarefa que trata dessa operação e das ideias de dívidas e lucros.

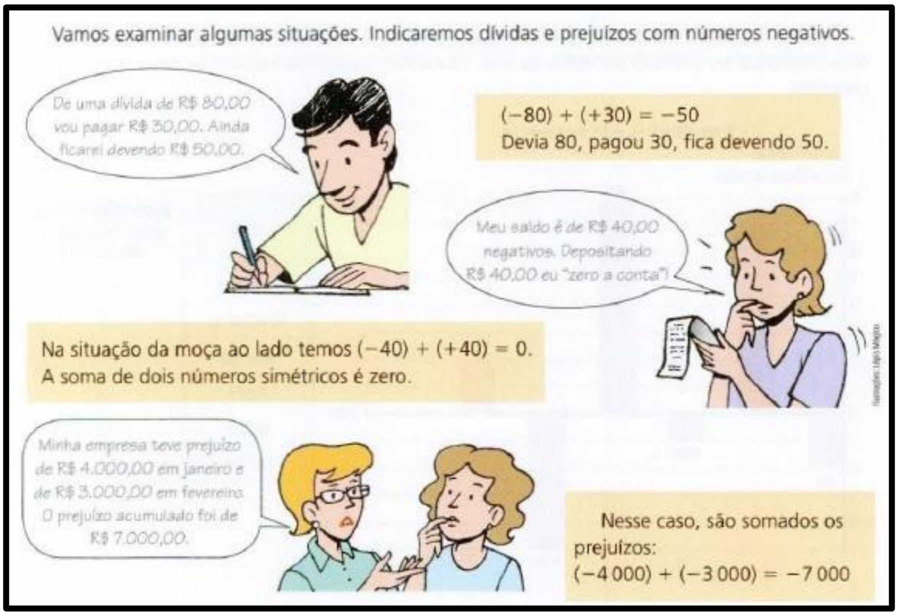


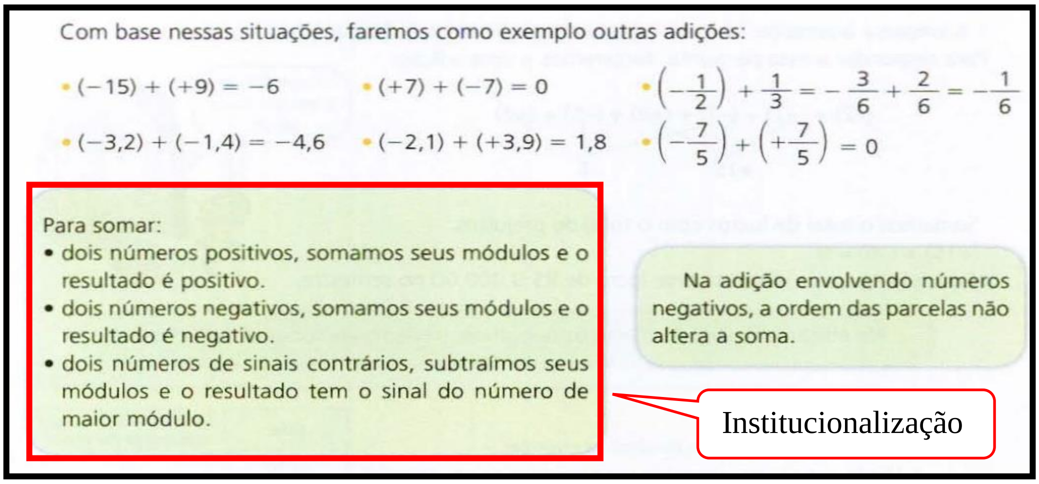
Figura 2 – Exemplo de tarefa envolvendo ideias monetárias com a operação de adição (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 63)

Na figura 2 é apresentada uma tarefa que envolve contextos monetários de dívida. Primeiramente, os autores realizam uma tradução para linguagem matemática e, posteriormente, para um contexto mais específico, revelando sua proposta de ensino. A frase "devia 80" é associada ao número – 80; "pagou 30", ao número + 30 e, "fica devendo 50" ao número – 50. Nesse caso, fica evidente a mobilização dos tipos de tarefas T_1 e T_2.

As justificativas para as ideias contidas na figura 2 apoiam-se nas seguintes "explicações": se devemos uma quantia superior à que temos, mesmo se dermos toda essa quantia continuaremos devendo, pois nosso saldo não é suficiente para quitar a dívida. Esse fato justifica parte da regra para se somar números de sinais contrários dada na figura 3, a seguir: "subtraímos seus módulos e o resultado tem o sinal do número de maior módulo". Esses contextos são criados para introduzir a soma de números relativos, revelando a organização didática dos autores. Na figura 2 ainda encontramos o caso de a dívida ser igual à quantia de dinheiro que temos, assim, ao pagar tudo, ficaremos sem dívida e sem dinheiro, ou seja, saldo zero. E há ainda o caso em que temos uma dívida e contraímos outra, ou seja, nossa dívida obviamente aumenta.

Mesmo não sendo explicações matemáticas, tais ideias servem de *justificativas* para algumas técnicas presentes no 7º ano. Apesar de não fazerem parte da matemática científica, no 7º ano do ensino fundamental tais justificativas constituem o bloco tecnológico-teórico que explicam e legitimam o uso das referidas técnicas. É importante lembrar que os elementos do quarteto praxeológico são modelados em função da instituição na qual eles vivem, nesse caso, o 7º ano do ensino fundamental, logo, o que é uma justificativa aceitável nessa instituição pode não ser em outra, por exemplo, ensino superior.

A adição de números inteiros relativos é exemplificada por meio de seis exercícios resolvidos, em que as explicações e os detalhes das resoluções são suprimidos, isto é, os autores apresentam a "conta" e, somente, a solução é dada, como pode ser observado na figura 3. Apesar de se tratar do estudo de números inteiros relativos, os autores, ao longo do capítulo, apresentam também números racionais, talvez pelo fato de esses já terem sido trabalhos em capítulos anteriores. Dessa forma, o que é apresentado na figura 3, refere-se a números relativos.


Com base nessas situações, faremos como exemplo outras adições:

- $(-15) + (+9) = -6$
- $(+7) + (-7) = 0$
- $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$
- $(-3{,}2) + (-1{,}4) = -4{,}6$
- $(-2{,}1) + (+3{,}9) = 1{,}8$
- $\left(-\frac{7}{5}\right) + \left(+\frac{7}{5}\right) = 0$

Para somar:
- dois números positivos, somamos seus módulos e o resultado é positivo.
- dois números negativos, somamos seus módulos e o resultado é negativo.
- dois números de sinais contrários, subtraímos seus módulos e o resultado tem o sinal do número de maior módulo.

Na adição envolvendo números negativos, a ordem das parcelas não altera a soma.

Figura 3 – Institucionalização da praxeologia das adições com números relativos (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 63)

Nessa figura podemos identificar *a institucionalização* da adição entre números relativos dada pelos autores. Vejamos: para a adição (–15) + (+9), é mostrado no livro que (–15) + (+9) = – 6, cuja "dica" é utilizar as ideias de dívida para uma melhor compreensão de como se chega a "– 6". Este procedimento revela a técnica dada pelos autores para se encontrar as soluções de uma adição.

Assim, podemos identificar alguns elementos tecnológicos, que assumem o papel de técnicas. Dizemos que são técnicas, pois, nos dão uma maneira de somar dois inteiros relativos, o procedimento de como realizarmos a tarefa. Esse procedimento também nos assegura o que foi pedido, uma das características de uma tecnologia. Nessa organização matemática, como dito anteriormente, vários são os elementos tecnológicos apresentados, por exemplo, os conceitos de distância entre pontos, de módulo e de simétrico. Os autores sempre haviam apresentado justificativas em nível empírico, utilizando situações do cotidiano e as adaptações para fundamentar algumas escolhas. Esse fato revela uma evolução da organização praxeológica modelada nesse livro.

tipo de tarefas e suas respectivas técnicas, que atendem aos exercícios nos quais o subtraendo é maior que o minuendo, apresentada no quadro a seguir:

Quadro 2 – Tipo de tarefas e técnica: adição de números relativos.

T_9: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar o resultado da operação $a + b$.	
$\tau_{9.1}$: Quantidades de mesmo sinal:	Quantidades de sinais contrários:
- Calcular o $\lvert a \rvert$ e o $\lvert b \rvert$; - Calcular $\lvert a \rvert + \lvert b \rvert$; Ao resultado da adição dos módulos, associar o sinal dos inteiros *a* e *b;*	- Calcular o $\lvert a \rvert$ e o $\lvert b \rvert$; - Identificar o maior módulo; - Se $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$, calcular $\lvert a \rvert - \lvert b \rvert$; - Se $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$, calcular $\lvert b \rvert - \lvert a \rvert$; -Ao resultado da subtração dos módulos associar o sinal do inteiro de maior módulo;

No quadro 2 temos que o conceito de módulo é fundamental para a compreensão e para a execução desse tipo de tarefa, pois, quando os autores usam as ideias de dívidas para a resolução das subtrações, essas ideias são posteriormente traduzidas na técnica descrita para quantidades de sinais iguais ou diferentes. Na sequência da parte curso, apresentada pelos autores, são propostos treinos das técnicas por meio de exercícios e problemas. Identificamos, assim, aspectos do quarto momento didático, *trabalho com a técnica*, explorado em listas de exercícios com intuito de fixar as técnicas apresentadas.

Por sua vez, o estudo das subtrações é iniciado com uma tabela que apresenta as variações de temperaturas de três cidades europeias.

Vemos tal situação a partir da figura 4:

Navegando na internet, Maurício encontrou uma tabela com as temperaturas mínimas registradas em três cidades da Europa num fim de semana:

Temperatura mínima (°C)		
Cidade	**Sábado**	**Domingo**
Roma	+2	+6
Paris	+3	−1
Viena	−7	−4

Ele percebeu que houve variação nas temperaturas. Em algumas cidades a temperatura baixou e em outras, subiu.

A diferença de temperaturas em cada cidade pode ser calculada efetuando uma subtração:

temperatura do domingo − temperatura de sábado

Vamos fazer os cálculos com Maurício?

Figura 4 – Subtração com inteiros relativos (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 67)

Nota-se que o cálculo das diferenças está relacionado ao fato de as temperaturas aumentarem ou diminuírem. O cálculo realizado é referente a uma subtração entre os valores das temperaturas de domingo e os valores das temperaturas de sábado. Assim, as temperaturas de domingo são comparadas com as de sábado, ou seja, a questão é: as temperaturas nestes dias aumentaram ou diminuíram? Esse contexto determinou o *primeiro encontro* com a praxeologia das subtrações com os números inteiros relativos, pois até então o sinal de "menos" estava sendo usado para determinar que certas quantidades representavam ideias negativas. Ou para uma subtração em que o subtraendo (positivo) é menor que o minuendo. As informações, explanações e os conteúdos representados na figura 4, permitiram-nos descrever o tipo de tarefa que segue:

Quadro 3 – Tipo de tarefas e técnicas: subtração de números relativos.

T_{10}: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar o resultado da operação *a – b*.
τ_{10}: Substituímos operação de subtração pela de adição (operação inversa), e *b* pelo seu oposto *(– b)* e aplicamos $\tau_{9.1}$

Vemos na figura 5 como a técnica τ_{10} é mobilizada pelos autores para a resolução de uma tarefa do tipo de tarefas T_{10}.

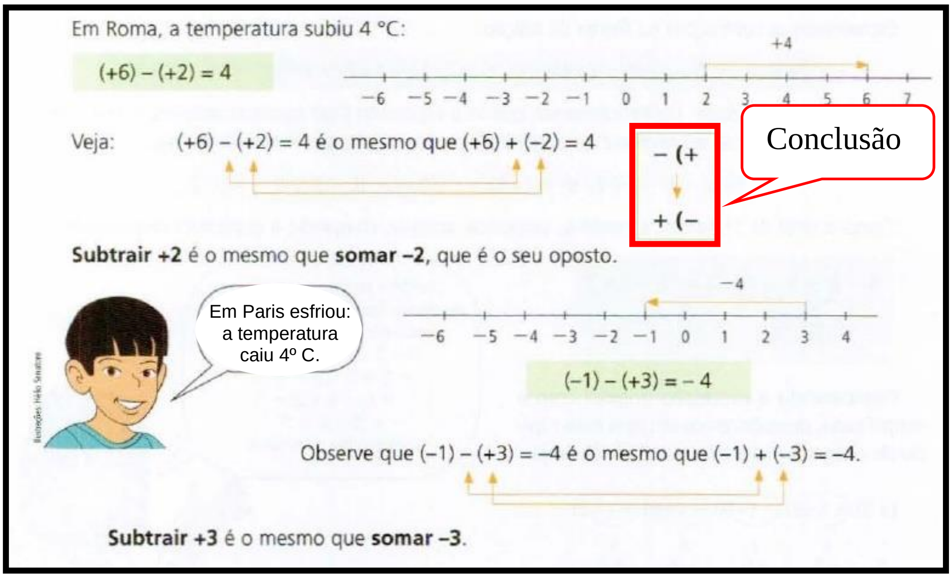


Figura 5 – Primeiro exemplo do ensino da subtração: reta numérica e oposto (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 67), grifos dos autores

Na figura, para a cidade de Roma, temos que a temperatura no sábado estava em 2º C, subindo para 6º C no domingo. Portanto, um aumento de 4º C, representado pelo uso da reta numérica e a semirreta laranja. A “caminhada” começou em "+2" e terminou em "+6". Houve um deslocamento de 4 unidades para o sentido positivo, indicado com o sentido da semirreta laranja e o número +4 acima dela. Esse aumento também é representado por meio da subtração “(+ 6) – (+ 2) = 4”, ou seja, a subtração entre as temperaturas de domingo e de sábado. Os autores chamam atenção para o fato de que “subtrair um número é o mesmo que somar seu oposto” (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.67), mobilizando o resultado da seguinte operação: “(+ 6) + (– 2) = 4”. Nesse caso, os autores partem de uma resolução gráfica, que é representada por meio de uma operação, finalizando com a comparação de uma outra operação que tem mesmo resultado. As justificativas para essa comparação perpassam os conceitos de oposto8, materializado por

[8]Cada elemento *a* possui um simétrico (ou inverso aditivo) *-a*, o qual cumpre a condição *-a+a=a+(-a) = =0*. Daí resulta que o simétrico *-a* e caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se *b + x* = 0, então x = *-b*, como se vê somando *-b* a ambos os membros. Em particular, como *-a + a = 0*, concluímos que *a= -(-a)*, ou seja, que o simétrico de *-a* é *a*. Uma primeira consequência da distributividade da multiplicação é o fato de que *a. 0 = 0*, seja qual for o número *a*. Com efeito, *a+a.0=a.1+a.0=a(1+0) =a.1= a =a + 0*. Assim, *a + a*. 0 = *a + 0,*

meio da representação gráfica destacada em vermelho na figura 4 e das duas subtrações cujas soluções resultam em 4. A partir dessas ideias foi elaborada a técnica τ_{10}: Substituímos operação de subtração pela de adição (operação inversa), e b pelo seu oposto (– b) e aplicamos $\tau_{9.1}$.

Vemos que a técnica $\tau_{9.1}$ também foi mobilizada, pois, ao utilizar a troca de uma subtração pela adição do oposto, implicitamente o tipo de tarefa T9 torna-se uma técnica auxiliar e complementar a τ_{10}, uma vez que, após as trocas, é necessário que se encontre a solução dessa nova adição, o que justifica a aplicação da técnica $\tau_{9.1}$.

A operação efetiva é determinada por meio das trocas de sinais, que não se relacionam explicitamente com o uso da reta numérica e das setas (uso do ostensivo sem aparente conexão com a técnica dada no contexto dado pelos autores), pois, uma representação se dá a partir da temperatura de domingo contando-se as unidades para se chegar a sábado. Assim, se a temperatura aumentou, a resposta é positiva e vice-versa, e em outra valendo-se do conceito de oposto, troca-se a operação de subtração pela de adição, evidenciando que se obtém a mesma solução.

Em geral, as praxeologias da adição e da subtração com inteiros relativos utilizam a reta para auxiliar no processo de construção desses conceitos. Porém, como a quantidade de texto trazida pelos autores na parte curso é mínima, não há indícios explícitos, dados pelos autores, da articulação dessa representação gráfica na reta com a técnica ensinada. Dessa forma, os modelos geométricos e aritméticos são usados de forma isolada sem qualquer associação aparente. Percebemos que o uso da reta foi dado como um tipo de instrumento direto de validação, como uma forma de mostrar uma solução, e o processo para se obter tal resposta foi realmente expresso pela técnica para se subtrair.

Salientamos que, a operacionalização do ostensivo reta numérica foi dada por meio da validação da técnica empregada, ou seja, com a evolução da organização matemática algumas tarefas tornam-se mais antigas (a mobilização da reta) e, portanto, mais rotineiras, auxiliando na legitimação de novas técnicas. Segundo Bosch e Chevallard (1999), podem ser denominados de objetos ostensivos não apenas as figuras, mas tudo aquilo que é perceptível aos nossos sentidos e que pode ser utilizado, tais como: os sons, os registros gráficos, a escrita, o material dourado, os risquinhos, as notações Matemáticas, entre outros.

Vemos na figura 6, um terceiro exemplo em que os autores se propõem em reafirmar a técnica proposta. Novamente há o uso da reta numérica para representar o aumento da temperatura. Em seguida, esse cenário é traduzido em linguagem matemática, que por sua vez, é comparado com outra operação cuja solução é a mesma. A frase "Você percebeu? Subtrair um número é o mesmo que somar seu oposto" é resumido com o quadro destacado em vermelho na figura 6.

---

logo *a·0 = 0.* Agora podemos mostrar que *(-1). a = -a* para todo número *a*. Com efeito, *a+(-1).a = 1·a+(-1)·a = [1 +(-1)].a = 0 . a = 0*, logo (-1).*a* é o simétrico de *a*, ou seja, (-1).*a = -a*. Em particular, (-l)(-1) = -(-1) = 1. Daí resulta, em geral, que *(-a). (-b) = a.b*, pois (*-a*). *(-b) = [(-1) a]. [(-1) b] =(-1) (-1) a.b* = ab. *(LIMA, 2008, p. 78).*

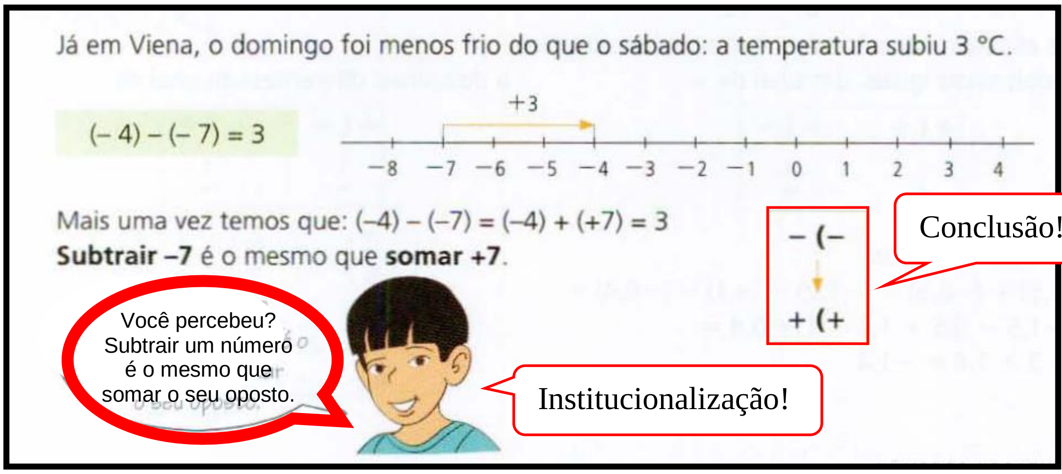


Figura 6 – Segundo exemplo do ensino da subtração: reta numérica e oposto. (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 67), grifos dos autores.

A técnica proposta para o tipo de tarefa T10 é justificada pela mobilização da reta numérica e pela comparação entre as operações que se articulam pelo uso dos conceitos de oposto. Percebemos, assim, algumas das adaptações realizadas pelos autores referentes aos conceitos a serem ensinados, que nos permitem observar a transposição didática realizada.

De posse desses dados, apontamos, a seguir, algumas considerações sobre o livro analisado articulado com as justificativas para algumas técnicas dadas pelos autores do livro didático, apresentadas na construção do conjunto dos números inteiros relativos.

Considerações finais

Analisando o saber acadêmico e o saber a ser ensinado, presente no livro didático, concluímos que, no ensino superior todos os conceitos são deduzidos e construídos pela lógica formal, o que nem sempre acontece na educação básica. Nessa etapa os conceitos sofrem transformações adaptativas para ser possível organizar uma sequência que se aproxime do nível de desenvolvimento cognitivo desses estudantes. Em relação à organização matemática, apesar de os objetivos de ensino serem diferentes, quase todos os conceitos são trabalhados em ambos os níveis escolares. Por exemplo, a comparação de números inteiros relativos provém da relação de ordem e do princípio da boa ordenação. Mas as intenções se afastam, uma vez que o primeiro tem conotação de saber quem é maior e, o segundo, de organizar e ordenar os elementos de um conjunto.

Na educação básica os conceitos matemáticos podem ser trabalhados a partir de materiais de apoio, jogos e situações reais como motivadores para propiciar a institucionalização de conhecimentos empíricos em matemáticos, compondo assim, os elementos da transposição didática realizada pelos autores. Mas nem todos esses conceitos receberão um tratamento formal, e é no decorrer da escolarização que vão "ganhando" o rigor necessário. Esse fato está vinculado à condição de que o entorno tecnológico-teórico da educação básica se constitui de argumentos próprios de escolhas didáticas e, é isso que sustenta a sobrevivência desse conteúdo nessa instituição, ainda que essas justificativas sejam distantes daquilo que chamamos por rigor matemático.

Nossos dados apontaram para a dificuldade de justificar matematicamente conceitos tais como: módulo, simétrico, ordem no conjunto dos inteiros relativos e, principalmente, as operações e os seus elementos. Tal dificuldade é justificada pelo nível de complexidade matemática dos conceitos envolvidos, o que gera a necessidade de adaptações e de materiais de apoio para produção de explicações que sejam plausíveis aos olhos dos estudantes da educação básica. Tais conceitos sobrevivem em ambos os contextos – Matemática escolar e a Matemática dos matemáticos, mas, suas abordagens em cada um desses contextos diferem em vários aspectos.

O trabalho introdutório revelado no livro didático está voltado à preparação do ensino da operação de adição, em que muitas das tarefas iniciais foram utilizadas para compor as técnicas dessa operação. Ao analisar o quantitativo dos tipos de tarefas da operação de adição, verifica-se que há 85 aparições num total de 194, o que evidencia a valorização desse tipo de tarefa. No manual do professor afirma-se que um dos objetivos é "efetuar operações e resolver problemas que envolvem números negativos" (ANDRINI E VASCONCELLOS, 2012, p. 62, MANUAL DO PROFESSOR). Essa valorização é condizente com o que os autores propuseram ao longo do volume analisado, pois grande parte dos tipos de tarefas da parte que chamamos de introdução aos inteiros relativos foi utilizada para a construção das técnicas para adicionar inteiros relativos e, esta compõe a técnica para se subtrair inteiros relativos.

Para a construção dos conceitos de módulo, oposto e comparação usa-se reta numérica e distâncias entre pontos, abordagem que se assemelha à visão geométrica que, historicamente, muitos matemáticos atribuíram aos inteiros. Para o trabalho de somar inteiros relativos, o principal algoritmo está vinculado ao cálculo do módulo e a subtração é tratada como inverso da adição. Logo, os conceitos referentes à determinação dos módulos e dos estudos das retas constituem as técnicas de somar e subtrair.

Outro fato verificado pode ser associado ao que Gascón (2003) diz sobre a evolução das praxeologias, em que algumas técnicas são substituídas à medida que novos conteúdos são ensinados. Por exemplo, para a tarefa de comparar inteiros relativos, a primeira técnica continha ostensivos gráficos e algumas ideias empíricas e, a seguir, ao institucionalizar esse estudo os autores apresentaram uma técnica cujas justificativas contém elementos matemáticos.

Para alguns contextos foi verificado que o uso dos ostensivos não foi operacionalizado, ou seja, foram apresentados, mas não tinham articulação matemática com aquilo que estava sendo ensinado. Por vezes, aparentemente, estavam apenas encenando o contexto de ensino, como por exemplo, "se estou falando de temperaturas, então uso termômetros". Mas, em alguns casos, salientamos que o uso desses ostensivos foi realizado com intuito de legitimar a técnica empregada, isto é, foram utilizados para além da ilustração do que havia sido explicado. Exemplo disso é quando os autores se valem da reta numérica para validar a técnica para subtrair inteiros relativos. Sendo assim, com a evolução da organização matemática algumas tarefas mais rotineiras auxiliaram na legitimação de novas técnicas, tais como as tarefas para determinar o módulo de um número e aquelas relativas ao cálculo das adições algébricas.

Dessa forma, as adaptações que se fizeram necessárias pautaram-se nas criações de contextos de perdas e ganhos, de altitudes e profundidades, de lucros e prejuízos, entre tantos outros contextos utilizados. Criou-se, assim, um ambiente de ensino que pudesse apresentar números que fossem respostas a operações do tipo 3 – 5, para as quais os números naturais não eram mais suficientes. Essa tarefa é delicada, pois, trata-se do ensino de um conteúdo em que alguns conceitos (matemáticos) estão distantes dos alunos e, por isso, algumas adaptações se fazem necessárias; o bloco tecnológico-teórico apoia-se em situações concretas como dívida, temperatura e altitude. Assim, é preciso pensar e realizar tais ações de forma que não gerem novos problemas à aprendizagem.

Referências

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**, 7. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos**, PNLD/2014. Brasília: MEC/SEF, 2013.

BOSH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'estude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensé Sauvage-Éditions. v.19, n.1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35> Acesso em: 2 jun. 2014.

CASABÓ, Marianna Bosch. Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad Matemática. In: **Cuarto Simpósio de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. p. 15 – 28.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. Publicado em: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>. Acesso em: 2 jun. 2014.

EVARISTO, Jaime; PERDIGÃO, Eduardo. **Introdução à Álgebra Abstrata:** Aplicações à Ciência da Computação e o estudo do Sistema de Criptografia RSA. 2. ed. formato digital, versão 02/2012. Maceió, 2012. Disponível em: http://www.ic.ufal.br/professor/jaime/livros/Introducao%20a%20Algebra%20Abstrata.pdf. Acesso em: 24 fev. 2015.

GASCÓN, Josep. **La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las Matemáticas**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11 – 37, 2003.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

GONÇALVES, Kleber Ramos. **A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas**: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande, 2016.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra**. 3.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v.1, 2002.

KASPARY, Danielly Regina dos Anjos. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.** (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande, 2014.

LIMA, Ellon Lages. **Porque (-1) (-1) = 1?** Coleção explorando o ensino da Matemática - Artigos, Brasília: MEC - Secretaria de Educação Básica, v.1. p. 76-78, 2004.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica**. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande, 2008.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias A. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012. p. 11-48.

POMMER, Wagner Marcelo. **Diversas abordagens das regras de sinais s elementares em Z.** São Paulo: USP, 2010. Disponível em: <http://www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2014.

QUEIROZ, Flávia da Costa. **Números relativos: uma análise de natureza epistemológica de alguns livros didáticos nacionais do terceiro ciclo do ensino fundamental**. Universidade Federal Fluminense, 2006.