SCHÖN, D. *The reflective Practitioner: How professionals Think in Action*. Jossey-Bass: New York, 1983.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 1986, pp. 4-14.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. En En G. HAREL y E. DUBINSKY (Eds.) *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington DC: MAA, 1992, pp. 25-58.

SIMON, M. Y TZUR, R. Expliciting the teacher's perspectives from researchers' perspective: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 1999, pp. 252-264.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processess and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1992, pp. 1-36.

STEIN, M.K.; BAXTER, J. & LEINHARDT, G. Subject-matter knowledge for elementary instruction: a case from functions and graphing. *American Educational Research Journal* 27(4), 1990, pp. 639-663.

TOM, A.R. & VALLI, L. Professional knowledge for teachers. En W.R: HOUSTON (Ed.) *Handbook of research on teacher education* . New York: Macmillan, 1990, pp. 373-392.

VINNER, S. Y DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Reserach in Mathematics Education*, 20(4), 1989, pp. 356-366.

VOIGT, J. Pattern and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Matematiques*, 6(1), 1985, pp. 69-118.

WAGNER, A.C. 'Knots' in teachers' thinking. En J. CALDERHEAD (Ed.) *Exploring teachers' thinking*. Cassell Education: London, 1987.

WATSON, A. (Eds.) *Situated cognition and learning of mathematics*. Oxford: Center for Mathematics Education Research of the University of Oxford, 1998.

WILSON, S.; SHULMAN, L. & RICHERT, A. '150 different ways of knowing: representations of knowledge in teaching. En J. CALDERHEAD (Ed.). *Exploring teachers' thinking*. London: Cassell Education, 1987, pp. 104-124

WOOD, T. An emerging practice of teaching. En P. COBB & H. BAUERSFELD (Eds.) *The emergence of mathematical meaning*. Hillsdale, NJ: LEA, 1995, pp. 203-227.

Número Racional: uma teia de relações[1]

Mauro Carlos Romanatto[2]

RESUMO: O número racional é um assunto considerado importante na escolaridade básica de Matemática e o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. Esse estudo pressupõe que a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são "personalidades" que o número racional assume, representadas por notações da forma a/b, decimal e percentual.

PALAVRAS-CHAVE: Número racional; Educação Matemática .

ABSTRACT: Rational Number: a net of relationships

Rational number is a subject that is considered an important subject in the basic education of Mathematics, and the way it is taught to the students may be an obstacle to its full comprehension. One of the aspects that

[1] Este estudo é um dos resultados da Tese de Doutorado defendida pelo autor na FE – UNICAMP (ROMANATO, 1997).

[2] Docente do Departamento de Didática da Faculdade de Ciências e Letras – UNESP – Campus de Araraquara

may justify such a situation is its complexity. Rational number should be understood as a net of relationships where the mathematical notions, principles and procedures are built or acquired through different contexts. This study is based on the premise that the full comprehension of rational number could be obtained by means of a meaningful work in all contexts in which this subject appears. Accordingly, in each context, the notion of number and the mathematical operations should be re-conceptualized in relation to the natural number. Relationships such as measure, quotient, ratio, multiplicative operator, probability and number are "personalities" impesonated by the rational number, these relationships being represented by means of as a/b, decimal and percentual notations.

KEYWORDS: Rational number; Mathematics Education.

Apresentando a idéia

CONFREY & HAREL (1994) afirmam que para a plena compreensão da noção de número racional, poderíamos associá-lo a uma teia de relações ou a uma teia de conceitos inter-relacionados. Tais relações serão construídas ou adquiridas tomando por base contextos significativos nos quais esse tipo de número esteja presente. Tais contextos podem ser exemplificados por atividades ou situações-problema em que a noção de número racional assume diversas "personalidades", tais como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, um número na reta numérica e probabilidade (KIEREN, 1976 e 1988; BEHR, LESH, POST & SILVER, 1983; FREUDENTHAL, 1983; VERGNAUD, 1983; NESHER, 1985; OHLSSON, 1987; SCHWARTZ, 1988; GIMENEZ, 1988 e BEHR, HAREL, POST & LESH, 1992). Nenhum desses autores citam, explicitamente, todas essas relações que, neste estudo, assumimos como necessárias para a plena compreensão da noção de número racional. Tais relações expressam noções, princípios, operações e procedimentos matemáticos bastante distintos.

Um aspecto a ser ressaltado é que os contextos, concretizados em atividades, exemplos ou situações-problema, são diversos e independentes para a construção ou aquisição de relações matemáticas as quais, em um primeiro momento, serão expressas ou representadas pela notação a/b. Aí parecem residir as primeiras dificuldades com o processo de ensinar e de aprender os números racionais. Tal tipo de número pode representar um contexto em que a idéia de fração (relação parte/todo) esteja presente, mas também em situações nas quais a idéia de razão (relação parte/parte) é a relação construída, envolvendo, por exemplo, grandezas de naturezas diferentes como a densidade (massa/volume).

A representação a/b não é uma síntese das relações presentes nos mais diversos contextos. Talvez a melhor palavra para a notação a/b seja confluência. A notação a/b não sintetiza o que esse tipo de número tem em comum. Nesse sentido, é a própria notação a/b que é o aspecto comum entre as várias relações que assumem os números racionais. Porém, a própria representação do número racional, ao longo do Ensino Fundamental, assume outras notações, tais como: número decimal e percentagem.

Assim sendo, um caminho promissor para o processo de ensinar e de aprender os números racionais seria o professor eleger atividades, exemplos ou situações-problema que pudessem concretizar os mais variados contextos nos quais tais números fossem empregados. O que diferenciaria tais contextos não seriam as atividades ou as situações-problema trabalhadas, mas as relações matemáticas construídas ou adquiridas e suas repercussões conceituais e operacionais.

Em determinado momento, a notação a/b estará presente como uma necessidade, mas as idéias, as relações, as noções, os princípios, as operações e os procedimentos implícitos em cada contexto serão diferentes. Com certeza, seria essa compreensão diversificada, diferenciada, que permitiria ao aluno o pleno entendimento desse tipo de número, possibilitando-lhe superar as dificuldades.

Nessa perspectiva, o mais importante seria deslocarmos a atenção dos objetos em si para as relações que esses objetos podem representar ou para as relações que podem ser construídas ou adquiridas com tais objetos em seus mais variados contextos de significação. Por exemplo, a fração 2/3 (dois terços) expressa uma relação (quantidade e medida) que pode ser compreendida ou que pode estar representando um determinado contexto. Entretanto, para outros contextos, assumem relações bem distintas.

Nesse caso, a dificuldade nem seria do aluno entender o problema e depois aplicar os algoritmos - uma dificuldade muito comum. Considerando a explicitação, no ato de ensinar, da estrutura lógica do problema, o aluno compreenderia que algumas relações valem para as frações e outras para as razões, e, os algoritmos são válidos, ou não, em função dessas relações. Portanto, levando em consideração o trabalho com determinados contextos, construímos ou adquirimos relações, utilizamos representações para os números racionais e, então, definimos as operações.

Esse percurso não é assim tão linear. As relações construídas ou adquiridas em contextos diferentes serão as marcas desses contextos. A não compreensão dessa particularidade poderá impedir o trabalho competente em tais contextos.

As técnicas operatórias, na maioria das vezes iniciadas com as frações, ao serem estendidas aos números racionais no sentido mais amplo, precisam ser reconceitualizadas em alguns contextos, por exemplo, nos casos em que a/b é uma razão ou uma probabilidade.

O número racional, para a sua efetiva compreensão, deveria ser visto como uma teia de relações nele incidente ou dele emergente. Dos mais variados contextos nos quais o número racional está presente deve emergir ou incidir uma teia de relações que possibilitará a sua plena compreensão. No processo de ensinar e de aprender, o mais importante deverá ser o trabalho com essa teia de relações, e assim é que se dará o efetivo entendimento desse conteúdo matemático, que quando referido a um contexto particular, implicará algumas relações e outras não.

A maioria dos conteúdos matemáticos tem seus estudos prolongados e aperfeiçoados para resolver classes de problemas cada vez mais amplas e complexas, relacionadas com outros assuntos da Matemática ou até mesmo com assuntos de outras disciplinas.

Em muitos casos, a observação acima é caracterizada quando noções, princípios e operações apenas se ampliam, se aperfeiçoam. Com os números racionais, a seqüência de seu estudo implica em outras classes de problemas que são caracterizadas por outras relações e, como já dissemos, essas novas relações não significam, necessariamente, ampliações ou aperfeiçoamentos de outras anteriormente construídas. São relações de naturezas distintas. A competência dos alunos em determinados contextos que envolvem os números racionais não garante, necessariamente, um bom desempenho em outros contextos. Por exemplo, o domínio qualitativo e quantitativo das relações presentes nos problemas relacionados à idéia de fração pode pouco contribuir quando o assunto é razão ou probabilidade.

O que queremos é que o aluno, na construção da noção de número racional, e, posteriormente, na resolução de situações-problema a ele relacionados, interaja constantemente com os objetos e com o feixe de relações emergente ou incidente desses objetos. Por exemplo, a partição de uma grandeza contínua ou discreta e a idéia de probabilidade podem ser descritas por uma relação parte/todo, mas tal relação tem particularidades em cada um dos contextos.

Os equívocos e dificuldades apresentados pelos alunos no aprendizado dos números racionais podem estar relacionados à não compreensão tanto das mais variadas relações implícitas na notação a/b, com a e b inteiros e b diferente de 0, quanto das operações que podem ser feitas com esse tipo de número, obedecidas tais relações.

Quando perguntamos a um aluno: o que representa 3/4; 0,75 ou 75% podemos estar nos referindo tanto a contextos iguais ou distintos quanto a relações iguais ou distintas.

Os contextos e as relações

Os contextos significativos ou de significação podem ser traduzidos como atividades, exemplos ou situações-problema nos quais o número racional está presente. São nesses diferentes contextos que devem ser construídas, adquiridas ou investigadas as mais diferentes relações que fundamentarão as noções, princípios e operações envolvendo esse tipo de número.

Um dos primeiros contextos nos quais se poderia iniciar o estudo dos números racionais é aquele em que está presente a relação medida (parte/todo), como se faz na escola, por exemplo: 2/3 de uma pizza (unidade/todo: 1 pizza) ou 2/3 de um grupo de nove pessoas (unidade/todo: 9 pessoas).

As duas situações representam uma relação parte/todo (medida) nos quais as idéias de quantidade e medida estão presentes. Devemos dividir o todo, o inteiro, o grupo, enfim, a unidade em partes iguais e tomarmos um determinado número delas.

Uma observação faz-se necessária neste momento: a importância que devemos dar à conceptualização da unidade em diversas situações, envolvendo os números racionais. Quando estudamos os números naturais, durante a passagem das situações aditivas para as multiplicativas, aparecem já algumas situações que requerem do aluno que passe a conceber um conjunto de várias unidades simples como uma nova unidade (por exemplo, 12 unidades simples deverão ser interpretadas como uma nova unidade de "12", como no caso da situação de pagarmos os ovos à dúzia), e, conseqüentemente, amplie o seu conceito de unidade. Nessa ampliação do conceito de unidade, alterações mais profundas ocorrem quando os alunos são confrontados com os números racionais.

HIEBERT e BEHR (1988) comentam que as primeiras experiências dos alunos com esses números são de parte/todo em que o novo símbolo (fração, decimal ou percentagem) representa parte de uma unidade que foi dividida em partes iguais. As unidades, até aqui consideradas como um todo, passam a ser divididas. Por outro lado, a unidade que serve de contexto e que aporta significado à nova representação, nem sempre é explicitada nas situações propostas aos alunos, como acontece ao trabalharmos num campo puramente simbólico. Por exemplo: como determinarmos a soma de 1/3 com 1/4, no qual não aparece explícita a unidade a que se referem esses símbolos. Para além disso, cada uma das partes nas quais a unidade é dividida pode agora funcionar como um novo tipo de unidade que não mantém as mesmas características da unidade inicial, como por exemplo em situações em que é necessário compreendermos 0,01 como sendo 0,1 de 0,1. As atividades de quantificação são agora, em lugar de contagem, a medição e a divisão de uma unidade composta. Por exemplo, 1/3 de uma unidade contínua ou 1/3 de um conjunto discreto de 15 elementos são situações diferentes, e o fato de 5 (unidades simples) corresponder à segunda situação pode constituir um motivo de dificuldade para os alunos.

Em um outro contexto, é possível trabalharmos a idéia de quociente quando um número de objetos precisa ser dividido igualmente num certo número de grupos, por exemplo: repartir 3 pizzas entre 4 pessoas. Nesse caso, o resultado da divisão de 3 por 4 é igual a 3/4. Portanto, o número 3/4 representa o quociente de uma divisão exata.

Enquanto no caso medida (parte/todo), a idéia é de comparação, nesse segundo contexto, a idéia presente é a de partição. Concordamos com GIMENEZ (1988) que diz ser o primeiro contexto mais estático, enquanto no segundo, a situação-problema tem um caráter mais dinâmico. A divisão vista como uma partição significa que, conhecido o número de grupos a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo.

Ainda no caso da relação quociente, é possível imaginarmos exemplos do tipo: "Quantas vezes 1/8 cabe em 3/4 de um todo?" ou "Quantas vezes 3/4 cabem em 1/8 de um todo?" Nesses dois exemplos, o quociente representa também uma medida ou uma quotidade: quantas vezes um pedaço cabe dentro de outro.

Frações particulares, como as citadas nos exemplos, permitiriam soluções visuais fáceis de serem compreendidas e que mostrariam de forma bem mais clara a idéia de medida.

O terceiro contexto envolve o significado de razão. Uma razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma medida, por exemplo, 2/3 pode representar dois rapazes para cada três moças e pode ser escrito 2:3. Quando diferentes medidas forem comparadas multiplicativamente, e a segunda é dependente da primeira, a razão é chamada taxa (por exemplo a densidade que é expressa em kg/m^3).

Esse contexto pode ser desenvolvido com a idéia de números proporcionais. Por exemplo: "Qual é a compra mais vantajosa: 300g por R$ 5,40 ou 400g por R$ 7,60?" Ou, ainda um outro exemplo mais concreto do tipo: "Duas jarras iguais contêm suco de laranja. Em uma, para cada duas partes de suco, juntam-se três partes de água e, na outra, para cada uma parte de suco, misturam-se duas partes de água. Em qual das jarras o suco é mais concentrado?"

Essas duas situações-problema poderiam, em momento posterior, ser retomadas para a construção de outras relações, por exemplo, juntando-se as duas jarras de suco, qual é a razão do suco para a água? Esse é um bom exemplo para trabalharmos o fato de que não é possível somarmos razões, quando elas expressam uma relação parte/parte.

Nesse contexto, a notação a/b serve para comparar razões e há possibilidade de darmos uma solução para a situação-problema, mas a relação expressa na razão

é de parte/parte (suco/água). No caso de juntarmos as duas jarras de suco, para expressarmos a nova razão entre suco e água devemos tomar alguns cuidados.

Na soma de frações, estamos somando, por exemplo, parte/todo mais parte/todo mais... mais parte/todo, sendo que o todo sempre é o mesmo.

Na soma de razões poderíamos estar somando parte/parte mais parte/parte e isso nos levaria a alguns equívocos. Uma das soluções seria recompor as razões do suco e da água em função da mistura (todo) e assim seria possível expressar a nova razão.

O quarto contexto seria aquele no qual focalizaríamos o número racional como um operador multiplicativo. Um exemplo de situação-problema que pudesse representar tal contexto seria calcular, por exemplo, 3/4 do número 20. O operador faria então duas operações: uma divisão do todo em "quartos", e, em seguida, uma multiplicação tomando-se 3 dessas partes. O operador nos dá uma idéia de máquina: um todo que vai ser transformado e tal transformação está relacionada à notação a/b.

Para as grandezas contínuas, por exemplo, o significado de um operador multiplicativo é semelhante ao processo de "encolher" ou de "esticar", de "reduzir" ou de "ampliar". Portanto, a relação operador multiplicativo define uma estrutura multiplicativa dos números racionais e é a mais algébrica das idéias básicas desse tipo de número. Ainda, como multiplicação, a x b, no qual "a" é o multiplicador e "b" é o multiplicando, o resultado 3/4 pode ser entendido como:

a) 3/4 = três vezes 1/4

b) 3/4 = uma vez 3/4

c) 3/4 = 3/4 de um

d) 3/4 = 1/4 de três

Situações-problema envolvendo a idéia de operador nos números racionais são excelentes exemplos antecipadores da noção de função. Em algumas oportunidades, o ensino de funções é precedido do trabalho com as noções de relação ou de produto cartesiano entre dois conjuntos e, então, função passa a ser uma relação particular, um subconjunto do produto cartesiano entre dois conjuntos. Nesse sentido, a noção de função é construída de maneira muito formal, muito técnica.

No entanto, a idéia de função como um operador ou, analogicamente, como uma máquina, facilitará, com certeza, a compreensão dessa importante noção matemática, sobretudo, por ser mais concreta, mais intuitiva.

Nessa perspectiva, quando vemos o número racional como um operador multiplicativo podemos, mais tarde, nos níveis superiores do ensino, relacionarmos tal idéia com a noção de função.

O quinto contexto envolveria a idéia de número racional como uma probabilidade. Esse contexto extrapola a seqüência, quase sempre rígida, dos conteúdos matemáticos da escola. Situações-problema envolvendo a noção de probabilidade poderiam ser trabalhadas até como a extensão da relação parte/todo e com isso já se estaria preparando os alunos para uma das mais importantes idéias matemáticas que é a relação entre o possível e o necessário (ou favorável).

A relação parte/todo em uma probabilidade deve ser entendida como uma comparação entre chances favoráveis ou necessárias e as chances possíveis.

O sexto contexto envolve a idéia de que a notação a/b expressa, em algumas situações, um número na reta numérica. Assim sendo, é imprescindível que no início dos trabalhos com os números racionais, principalmente, nas atividades que envolvem as idéias de medida e de quociente, seja feita a localização desses números na reta numérica. Alguns alunos já apresentam dificuldades para entender 2/3 (dois terços) como um número, e, talvez, a representação na reta numérica pudesse ajudá-los nessa compreensão.

O estudo dos números racionais, ampliado com assuntos tais como razão, proporção, regra de três e percentagem, poderiam ajudar o aluno a desenvolver idéias essenciais da Matemática. Os reflexos seriam extremamente importantes, não apenas no aprendizado desses assuntos mas, sobretudo, na explicitação para os alunos do alcance e do poder dos conteúdos matemáticos. Por exemplo, no estudo de razões e de proporções, as grandezas inversamente proporcionais possibilitariam uma abertura intelectual aos alunos, principalmente quando esses assuntos estiverem relacionados a fatos, eventos e fenômenos do dia-a-dia.

Ainda em relação à idéia de trabalharmos o número racional em contextos, envolvendo a noção de probabilidade, é importante ressaltar que, quanto mais cedo os nossos alunos forem introduzidos em atividades ou situações-problema, envolvendo o raciocínio probabilístico, mais rápido eles se aproximarão dos modelos científicos atuais. A Física, a Biologia e a Economia, por exemplo, trabalham com modelos probabilísticos tanto para descreverem/explicarem/interpretarem a realidade, quanto para predizerem fatos, eventos e fenômenos futuros.

Esses seis contextos discutidos e que apresentam atividades, exemplos ou situações-problema particulares não significam o esgotamento do assunto em relação a outros contextos e, por conseqüência, a outras idéias e relações. Podem existir outros contextos em que seriam construídas novas relações. Pode, também, acontecer que contextos ou situações-problema gerem idéias e relações distintas daquelas que identificamos.

O fato de expormos esses contextos e suas relações é por achá-los essenciais, por estarem presentes nos mais diversos estudos sobre os números racionais, por fazerem parte da programação dos conteúdos matemáticos do ensino fundamental e, porque contêm implicitamente idéias matemáticas imprescindíveis para um trabalho competente nessa área de conhecimento.

O exercício de uma sistematização e a conseqüente exposição das preocupações com o processo de ensinar e de aprender os números racionais têm como objetivo identificar as relações necessárias a uma plena compreensão e utilização desse tipo de número, bem como apontar ou apresentar algumas atividades, exemplos ou situações-problema para que o professor as utilize quando do trabalho com tal assunto.

Um caminho promissor, portanto, seria trabalharmos, na medida do possível, os mais diversos contextos em que o número racional esteja presente. Isso durante toda a escolarização na qual esse assunto aparece.

O trabalho com contextos mais amplos ou distintos faria que, tomando por base construções de relações, ora mais abrangentes ora diferentes, os alunos tomassem consciência de que esse tipo de número é poderoso e necessário. E, na perspectiva do número racional como uma teia de relações, os alunos poderiam identificar tanto os contextos quanto as relações e assim a compreensão seria facilitada.

Aqui poderíamos inferir que quanto mais atividades, exemplos ou situações-problema envolvendo diferentes contextos fossem experienciados pelos alunos, mais teríamos as condições necessárias para as construções de idéias, relações e operações que articuladas com as técnicas e os algoritmos poderiam dar a plena compreensão da noção do número racional.

Se um dos atributos da ciência matemática é representar idéias, no caso dos números racionais, essa representação de idéias acaba sendo decorrente da vivência e da resolução das mais variadas situações-problema em que tal tipo de número está presente. Desse modo, a vivência e a resolução de problemas são momentos significativos para a construção, compreensão e posterior representação do número racional. Se os exemplos ficarem apenas no corte de figuras geométricas ou na divisão de pizzas entre pessoas, certamente, a noção de número racional será bastante restrita. Nesse caso, um razoável desempenho nos algoritmos envolvendo tais números se contraporá a um fraco desempenho na resolução de problemas, nos quais as técnicas operatórias são elementos, na maioria das vezes, de importância menor.

O trabalho com os mais diversos contextos nos quais o número racional está presente precisa, necessariamente, harmonizar-se com as grandezas envolvidas, ora as de caráter contínuo, ora as de caráter discreto.

Outro aspecto, também comentado anteriormente, refere-se à idéia de situações concretas ou materiais concretos. Enquanto no processo de ensinar e de aprender determinados conteúdos matemáticos, as situações concretas ou cotidianas são importantes e significativas para o aprendizado, no caso dos racionais, especialmente no trabalho com as frações, os modelos manipulativos são os que parecem apresentar vantagens. Por exemplo, dividir uma pizza em 4 partes exatamente iguais pode se apresentar como uma tarefa trabalhosa, enquanto que numa folha de sulfite a mesma operação, inclusive com formas diferentes, é bem mais simples e a igualdade entre as partes é mais fácil de ser mostrada.

Por fim, um outro aspecto para o qual professores devem estar atentos, durante os anos em que se estuda os números racionais, é o das representações utilizadas para esse tipo de número.

Ao longo do estudo dos números racionais várias representações são apresentadas aos alunos e é preciso que os professores tenham certeza de que tais notações sejam plenamente compreendidas. Poderíamos dizer que os números racionais também possuem um feixe de representações. Assim 3/4, 0,75 ou 75% podem ser representações de uma mesma situação-problema, mas as relações que tais notações expressam precisam ser efetivamente entendidas. Entretanto, as notações 2/3 (dois terços), ou 2/3 (dois para três), com certeza, representam situações bem distintas.

Ainda em relação à representação, podemos identificar algumas delas que merecem comentários, tais como: a representação falada: três quartos, setenta e cinco centésimos ou setenta e cinco por cento; a representação escrita: 3/4, 0,75 ou 75%; a representação pictórica, que é feita basicamente com desenhos e na qual a ênfase está nas figuras geométricas bidimensionais, representando as grandezas contínuas. As grandezas discretas são representadas por desenhos dos próprios objetos envolvidos nas atividades, exemplos ou situações-problema.

É também possível encontrarmos desenhos de grandezas contínuas como pizzas, chocolates, etc., nos quais o pictórico representa situações do mundo real. Materiais e modelos manipulativos, utilizados para o trabalho com os números racionais, também podem ter a função de representação desse tipo de número.

A variabilidade de representações pode trazer mais um complicador para o trabalho com os números racionais. Por exemplo, dependendo da representação, as operações obedecem determinadas regras. Assim, para dividirmos duas frações, seguimos um procedimento e quando dividimos dois números decimais, o algoritmo é outro. No entanto, quando as operações são compreendidas efetivamente, podemos mostrar que os procedimentos são equivalentes.

Em resumo, acreditamos que um modelo analógico bastante adequado para os números racionais é o de uma teia de aranha, sendo que no centro estaria a notação a/b, com a e b inteiros e b diferente de zero. Emergindo ou incidindo desse ponto central, teríamos um feixe de relações construído ou adquirido considerando diferentes

contextos em que esse número esteja presente. Por fim, enredando o feixe de relações emergente ou incidente, estariam as representações do número racional que poderiam ser os enredamentos mais distintos associados à linguagem falada, a modelos manipulativos e a desenhos (pictóricos). Nos enredamentos mais próximos do centro estariam as notações: barra fracionária, número decimal e percentagem.

Esse modelo analógico para os números racionais como uma teia que envolve relações e representações revela a complexidade desse conteúdo matemático. Tal complexidade, quando reduzida a uma definição (a/b, com a e b inteiros e b diferente de zero) e a técnicas operatórias, parece não ser um bom caminho. Para assuntos nos quais a complexidade está presente a compreensão passa por um caminho exatamente oposto, ou seja, os aprendizados tanto conceitual quanto operacional podem acontecer quando o maior número de eventos/fatos/fenômenos associados aos assuntos forem trabalhados.

Talvez possamos dizer que, para os números racionais, o conceito unificador seja o de compreensão, ou seja, a teoria é uma expressão de um conjunto de fatos/eventos/fenômenos obtida após um alto grau de compreensão. Assim, o pleno entendimento dos números racionais deveria ser a expressão compreensiva dos mais variados contextos e das relações neles construídas ou adquiridas.

Novamente, querer entender os números racionais por meio de uma definição, de princípios gerais e de um conjunto de técnicas operatórias, seria, muito provavelmente, inadequado. Também, quando subdividimos os assuntos relacionados aos números racionais e os estudamos independentemente, podemos estar comprometendo a sua complexidade.

Assim, o caminho mais promissor poderia ser aquele que, em momento algum, tentássemos unificar noções, princípios, operações e procedimentos matemáticos, envolvendo os números racionais. Mas, ao contrário, deveríamos fazer um trabalho metodológico que tivesse uma analogia com a própria natureza desse componente curricular.

Os números racionais representam um assunto que está presente em um amplo espectro de contextos, e que, a partir daí, expressa diversas e distintas idéias, relações, princípios, operações e procedimentos matemáticos e condiciona o trabalho docente a expressar uma variedade de princípios ou estratégias metodológicas. Deste modo, o ensino pela definição; o caminho do simples para o geral, do concreto para o abstrato; a compartimentalização de assuntos afins, assim como a questão que envolve as situações cotidianas associadas a determinados conteúdos precisam, urgentemente, ser revistos, se o que queremos, para os nossos alunos, é a plena compreensão desse importante assunto da Matemática básica.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. R. & SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R. & LANDAU, M. (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process. New York: Academic Press, 1983. p. 91-l26.*

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. & LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D.A.(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BOTTA, L. S. *Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem*. Rio Claro: UNESP, 1997. (Dissertação de Mestrado)

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Brás Monteiro, 1975.

CONFREY, J. & HAREL, G. Introduction. In: ___ (Eds), The development multipli- cative of reasoning in the learning of mathematics. [s. 1.] , [s. n.], 1994. p. 1-26.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DORGAN, K. "What textbooks offer for instruction in fraction concepts." *Teaching Children Mathematics*. v.1, n.3, p.150-155, nov. 1994.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Boston: D. Reidel, 1983.

GIMENEZ, J. "Propuesta metodológica sobre la enseñanza de las fracciones en la educación básica." *Educación matemática*, UAM Mexico, n. I, p. 20-29, 1988.

HIEBERT, J. & BEHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, l976. p. 101-144.

KIEREN, T. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 162-181.

LIMA, J. M. de F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, T. N. (Org.). *Aprender Pensando*. Petrópolis: Vozes, 1986. p. 81-127.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 1995.

MOCHON, S. "When can you meaningfully add rates, ratios and fractions?" *For the Learning of Mathematics*. v.13, n 3, p. 16-21, 1993.

MONTEIRO, C. e COSTA, C. "Dificuldades na aprendizagem dos números racionais." *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 40, p. 60-63, out.-dez., 1996.

NESHER, P. *An outline for a tutorial on rational numbers*. Unpublished manuscript. 1985.

OHLSSON, S. Sense and reference in the design of iterative illustrations for rational numbers. In: LAWLER, W. & YAZDANI, M. (Eds.), *Artificial intelligence and education*. Norwood, NJ: Ablex, 1987. p. 307-344.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p.53-92.

ONUCHIC, L. de la R. & BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. *Revista de Educação Matemática*. Ano 5, nº 3, p. 5-8, 1997.

POTHIER, Y. *Partitioning: Construction of rational number in young children*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton, 1981.

QUINTELLA, A. *Matemática: primeira série ginasial*. São Paulo: Nacional, 1963.

ROMANATTO, M. C. *Número racional: relações necessárias à sua compreensão*. Campinas: UNICAMP, 1997. (Tese de Doutorado)

SANGIORGI, O. *Matemática: primeira série ginasial*. São Paulo: Nacional, 1964.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de Matemática - 1º grau*. São Paulo: SE/CENP, 1993.

SCHWARTZ, J. L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 41-52.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R. & LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. Psicología Cognitiva y del Desarrollo y Didáctica de las Matemáticas. In: HUARTE, F. (Coord.). *Temas actuales sobre Psicopedagogía y Didáctica*. Madrid: Narcea, 1988. p. 239-254.