Números reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura[1]

*Eliana Farias e Soares**
*Maria Cristina Costa Ferreira***
*Plínio Cavalcanti Moreira***

RESUMO: Os autores acreditam que uma nova abordagem dos sistemas numéricos deve ser construída especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem teria que partir fundamentalmente da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto R que efetivamente instrumentalize para o ensino.

Para conhecer melhor essas imagens conceituais, foi aplicado um questionário a 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC e os resultados são analisados neste artigo. O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passam ao largo de quase todas as respostas. Esse parece ser o ponto central das dificuldades na compreensão de uma série de conceitos ligados à estrutura dos reais.

PALAVRAS-CHAVE: Formação de professores; Licenciatura em Matemática; Formação matemática do Licenciando; Números reais; Números irracionais.

ABSTRACT: Real numbers: conceptions of perspective mathematics teacher

The authors believe that a specific approach to the numeric sistems - especially designed for the teaching degrees - should be developed. They propose that such an approach should spring from whatever conceptual idealizations are current among undergraduate students and reach a global understanding that will actually aid teaching at the fundamental and high school level.

---

[1] Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES através do SPEC 01/94-01

* Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

** Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

This article presents some analysed results of a survey conducted among 84 students of Mathematics with the Federal Universities of Minas Gerais and Santa Catarina, Brazil, aimed at a greater understanding of their "conceptual images" about the set of the real numbers. It was noted that very few students are aware of the meaning of the incomensurability of two line segments, and the consequent need for the irracional numbers. This may be the core of the usual difficulties found among Brazilian students to comprehend various concepts related to the structure of the real number set.

KEYWORDS: Teacher training; Prospective Mathematics Teacher; Mathematics for Prospective Teacher; Irrational numbers; Real numbers.

Introdução

A literatura existente em português sobre o ensino-aprendizagem dos números irracionais e reais é escassa. Pesquisas que procuram captar as concepções de alunos, professores da escola básica e licenciandos sobre números irracionais, incomensurabilidade, representação decimal infinita, continuidade, etc., quando existem, não são acessíveis. Após um extenso levantamento bibliográfico sobre o assunto encontramos apenas trabalhos produzidos no exterior. TALL, (1994), TALL e SCHWARZENBERGER (1978), J. ROBINET (1986), FISHBEIN, TIROSH e HESS (1979), FISHBEIN, JEHIAM e COHEN (1995), são exemplos de trabalhos que procuram conhecer as concepções dos alunos sobre noções subjacentes ao conceito de número real. Estes trabalhos são muito interessantes e úteis para qualquer estudioso do assunto, mas não refletem necessariamente, nem completamente a realidade no Brasil. Para que se possa formar uma massa de informações mais completa referenciada na nossa realidade e comparar os resultados, além de conhecer e analisar outros ângulos de visão, achamos importante que se amplie, aqui, o volume de trabalhos nessa direção.

Os números reais são tema de fundamental importância na formação do professor de Matemática. Se, por um lado, o aluno que entra para a Licenciatura não tem ainda uma visão teórica mais abrangente sobre os números reais, por outro, ele possui uma experiência escolar de vários anos ao longo da qual construiu certas "imagens conceituais" (TALL e VINNER, 1981)- corretas ou não do ponto de vista da teoria matemática - que constituem o seu saber sobre este conjunto numérico. Detectar essas imagens torna-se extremamente importante, do ponto de vista da ação didático-pedagógica, na medida em que elas são "psicologicamente resistentes" (FISHBEIN, JEHIAM e

COHEN, 1995) e, quando ignoradas no processo de ensino, podem se transformar em obstáculos para a aprendizagem. É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias. Um aluno do 5.º período da Licenciatura em Matemática da UFMG, respondendo a uma questão, em sala de aula, explicita essa dinâmica. A questão é a seguinte :

Marque a alternativa correta: a) $0,999... < 1$ b) $0,999...$ tende a 1 c) $0,999... = 1$.

A resposta do aluno foi:

- Existe uma justificativa matemática, uma demonstração através de operações com dízimas periódicas e frações que prova que a igualdade (c) é verdadeira. Não me recordo dela agora, mas sei que é verdadeira. Num primeiro momento tem-se o ímpeto de achar que todas as afirmativas são satisfatórias. Na verdade eu ainda acho (grifo nosso) que as duas primeiras não são falsas, pois, dentro do que é passado no 1.º e 2.º graus, elas têm uma lógica bastante aceitável.

D. Tall comenta sobre o ensino de Matemática na Universidade:

> *... a logical presentation may not be appropriate for the cognitive development of the learners. Indeed, much of the empirical theory reported in the later chapters of this book reveals cognitive obstacles which arise as students struggle to come to terms with ideas which challenge and contradict their current knowledge structure. Fortunately, we are also able to report empirical evidence that appropriate sequences of learning and instruction designed to help the student actively construct the concepts can prove highly successful. (TALL, 1991, cap.1, p. 3).*

A questão que se impõe, então, na formação matemática do futuro professor, é o estabelecimento de uma seqüência didático-pedagógica eficaz que substitua a seqüência puramente lógico-formal usualmente adotada.. Para a elaboração dessa seqüência didática é fundamental conhecer e analisar as imagens que os alunos possuem sobre os conceitos a serem trabalhados. Esse procedimento, não usual no espaço da formação matemática dentro das Licenciaturas, consiste fundamentalmente em reconhecer, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, não somente aquilo que se vai ensinar, mas também aqueles que se empenham em aprender.

Para conhecer melhor essas "imagens conceituais", aplicamos um questionário a 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC, sendo 34 do 2º período, 38 do 4º e 12 do 7º. Dividimos as questões em dois grupos A e B, cada um deles com 11 perguntas, sendo as 6 primeiras comuns aos dois grupos. Esta divisão foi feita para que o questionário não ficasse muito extenso. O grupo A foi respondido por 36 alunos e o B por 48 alunos.

A aplicação se deu em condições normais de sala de aula, com duração de 100 minutos, respostas individuais e sem identificação dos alunos.

Como já foi observado, nosso objetivo não era provar conjecturas, obter dados estatísticos ou caracterizar certas dificuldades no aprendizado como "obstáculos epistemológicos" (mesmo porque não temos uma visão reprodutivista do processo cognitivo). Queríamos conhecer as pré-concepções e imagens que pudessem obstaculizar a aprendizagem dos conceitos relativos aos números reais na Licenciatura. Daí a forma como estruturamos o questionário. As questões são abertas e às vezes convidam à apresentação de respostas numa linguagem mais informal e espontânea; a análise dos resultados é, conseqüentemente, mais qualitativa.

A seguir, comentamos os resultados questão por questão. A íntegra do questionário, bem como o quadro de respostas podem ser encontrados em FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C., e SOARES, E. F. (1999) e SOARES, E. F. (1999).

Análise dos Resultados

Existência do elemento máximo (ou mínimo) em subconjuntos de R

Na nossa experiência de ensino na UFMG e UFSC, temos encontrado, com certa freqüência, referências ao "primeiro número (racional) depois do 1", ao "último número (real) antes do 2", ou expressões dessa natureza. Trata-se, ao nosso ver, de uma espécie de recorrência "inconsciente" ao conjunto dos números naturais, o que indica alguma falha no processo de ampliação dos conjuntos numéricos (dos naturais até os reais) por que passou o aluno. Muitas vezes a ênfase é posta apenas nas novas possibilidades de operação no conjunto mais amplo de forma que se perdem relações importantes entre o conjunto original que foi ampliado e o novo.

Analisando as respostas dadas à seguinte questão:

Questão 1: a) O conjunto A={$x \in Q$; $0<x<1$} tem um menor elemento? b) O conjunto B={ $x \in Q$; $x^2<1$} tem um maior elemento?

vimos que mais do que um, em cada três alunos, não reconhece claramente quando um determinado subconjunto limitado de R possui elemento máximo ou elemento mínimo.

Estes resultados sugerem que é preciso enfatizar, para além da simples relação de inclusão, uma visão global dos conjuntos numéricos: como um se situa dentro do outro, as propriedades que são generalizadas para o campo mais amplo e aquelas que são específicas do conjunto mais restrito.

Por exemplo, qualquer subconjunto não vazio de N pode ser enumerado de tal maneira que a ordem da enumeração respeite a ordem dentro do subconjunto. Isso decorre do fato evidente de que todo subconjunto não vazio de N possui um menor elemento. É verdade também que todo subconjunto de N não-vazio, limitado, possui um maior elemento. Em Q, que é uma ampliação de N, nada disso acontece, embora todo subconjunto seja enumerável.

Essa "imagem" de Q e de R como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico.

Caracterizações de número irracional

As caracterizações de número irracional mais encontradas nos livros didáticos para a Escola Basica são as seguintes:

a) o número que não pode ser escrito como fração;

b) o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica.

Em ambas fica pressuposto o entendimento do que seja número, isto é, número real. Apesar disso, em seguida, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Essa falta de consistência na conceituação de número revela-se nas respostas dadas à seguinte questão:

Questão 2: Para você, o que é um número irracional?

- Vinte e dois alunos apresentaram a caracterização a) acima, quatro a caracterização b) e sete outros citaram as duas. Isto perfaz cerca de 38% das respostas;
- cinco alunos deixaram em branco ou responderam que não sabiam ou não sabiam explicar;
- quatro alunos caracterizaram os irracionais como números que não podem ser escritos na forma a/b, sem mencionar que a e b deveriam ser inteiros;
- dois alunos escreveram: "Um número irracional é um número que não conseguimos escrever da forma a/b com a, b $\in$ R." e "É aquele que não pode ser expresso em forma de razão".

Essas últimas respostas, assim como algumas respostas a outras perguntas deste questionário, sugerem que muitos dos alunos que deram a caracterização a), usando a palavra fração, poderiam não ter em mente que esta significava a razão de dois inteiros.

Os quase 50% restantes associam, às vezes de maneira bem explícita, os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido. Isto mostra o ar de mistério que cerca os irracionais mesmo para alunos que optaram pelo curso de Matemática no 3.º grau. Eis algumas das respostas apresentadas:

- números difíceis de imaginar;
- números que não são exatos;
- são números indefinidos, sei que existem, mas não sei como determiná-los;
- números que só podem ser representados por i;
- um número que, depois da vírgula, apresenta infinitas casas decimais;
- são as frações que não dão exatas (dízimas periódicas);
- um número irracional é aquele formado pela divisão do numerador de uma fração pelo denominador desta fração de modo que esta divisão não é exata e nunca tem fim.

Chamamos atenção para as três últimas respostas, que associam, de alguma maneira, irracionais com representação decimal infinita. Observamos ainda que

grande parte dos alunos que conceituaram os irracionais em alguma das duas formas (a) ou (b) mencionadas anteriormente, mostraram dificuldade com questões que exigem a compreensão do verdadeiro significado dessas definições (veja questões 3, 4 e 5 em seguida e também a questão 11 dos questionários A e B).

Aprofundando o conceito de irracionalidade

Como vimos na questão 2, aproximadamente 38% dos alunos apresentaram uma definição formalmente correta de número irracional. Vejamos o que acontece quando é necessário ultrapassar o simples enunciado da definição e penetrar em seu significado.

Com esse objetivo, foram incluídas as seguintes questões:

Questão 3: O que leva você a acreditar na existência de números irracionais?

Questão 4: Você quebra uma barra de chocolate em dois pedaços ao acaso. É sempre possível exprimir a razão entre os "tamanhos" desses dois pedaços (as áreas deles, por exemplo) por um número racional?

Questão 5: Sabe-se que π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Chamando de C o comprimento da circunferência (em cm) e de D a medida do diâmetro (em cm) obtemos $\pi = C/D$. Isso levou um aluno a concluir que π era racional. O que você diria a um aluno que lhe apresentasse tal conclusão?

Estas questões demandam um entendimento um pouco mais aprofundado do conceito de irracionalidade.

Nós esperávamos que quase todos os alunos dessem a seguinte resposta à questão 2: "número irracional é aquele que não pode ser escrito como fração". Por isso a questão 3 tem a intenção de complementar a 2, como se perguntássemos: "mas existe número que não pode ser escrito como fração?". É claro que não poderíamos ter formulado a pergunta nessa forma para não induzir a resposta à questão 2.

Das 84 respostas apresentadas à questão 3 consideramos 15 (menos de 18%) satisfatórias (mencionaram, mesmo que de forma imprecisa, algum elemento relevante associado à necessidade de criação dos números irracionais). Eis duas destas respostas:

- o fato de que existem segmentos que medem por exemplo $\sqrt{2}$ (a diagonal de um quadrado de lado 1);
- se não tivesse esses números a reta teria pequenos furos.

Isto significa que pelo menos 52% daqueles que apresentaram, na questão 2, uma das duas definições lá mencionadas, não conseguem citar uma razão que os leve a acreditar que certas quantidades não podem ser expressas como uma razão de inteiros, isto é, um argumento que os convença de que os racionais não nos bastam.

◊ Vinte alunos (quase 24%) responderam que nunca haviam pensado sobre o assunto, que não sabiam ou deixaram em branco.

Eis algumas outras respostas:

- os professores e os livros didáticos;
- nada me leva a ver os irracionais;
- a infinidade de números existentes entre 2 inteiros;
- os exercícios que eu tenho que resolver;
- talvez eu nem acredite, apenas aceite;
- na praticidade, na viabilidade, na facilidade que eles nos auxiliam nos cálculos. Como por exemplo o número π. O que seria da nossa trigonometria sem o mesmo?

Na questão 4 queríamos verificar com que freqüência a possibilidade da incomensurabilidade está presente nas considerações dos alunos.

Embora cerca de 64% dos alunos tenham respondido não (a resposta correta), somente em dois casos essa resposta foi acompanhada de uma explicação satisfatória. Nas outras explicações, entretanto, aparece com certa freqüência a conclusão de que a razão entre 2 números reais é irracional se um deles (ou ambos) for irracional. Eis algumas respostas que indicam isso:

- não, pois na quebra os pedaços podem apresentar valores irracionais;
- não, pois se um pedaço partido for um círculo não se consegue exprimir a razão entre a área restante e a do círculo por um número racional.

(Note-se a idéia de que a área de um círculo - provavelmente por envolver o número π - é sempre irracional).

Observamos que se o valor total da área da barra de chocolate for considerado racional (T) e os pedaços x e y forem irracionais, então a razão $\frac{x}{y} = \frac{T-y}{y} = \frac{T}{y} - 1$ é irracional. Dois alunos parecem ter considerado esse raciocínio, embora não o tenham explicitado claramente. Eis suas respostas:

- não, pois poderiam ser ambos os pedaços com área irracional e quando somados dar um número racional que é a área total, por exemplo.
- não, pois essa razão pode ser irracional. Se chamamos de 1 o comprimento do chocolate, entre 0 e 1 existem infinitos números irracionais.

Por outro lado, cerca de 29% dos alunos responderam sim. Na maioria dos casos a resposta sim veio sem nenhuma explicação e talvez possa estar relacionada com a compreensão incorreta da idéia de razão (veja questão 2). Quando se estuda o conjunto dos racionais, a palavra razão é geralmente utilizada como sinônimo de fração e, portanto, toma o sentido particular de razão entre inteiros. A extensão de Q para R, sendo feita sem o cuidado necessário, pode manter a associação do conceito de razão com número racional. A resposta de um aluno parece indicar isto:

- acredito que sim, pois uma vez partido o chocolate, por exemplo, terá a noção de divisão, e que eu represento como fração, logo é um número racional.

As outras explicações para a resposta sim podem ser resumidas como: "toda medida é expressa por um número racional". A análise destas respostas ficou prejudicada pela forma ambígua com que a questão foi formulada. Num sentido estritamente prático toda medida é realmente expressa por um número racional e o contexto em que deveria ser interpretado o problema ficou indefinido.

Na questão 5, obtivemos o quadro de respostas apresentado a seguir:

◊ onze alunos (cerca de 13%) afirmaram que a conclusão do hipotético aluno está errada e explicaram corretamente onde está o erro;

◊ oito alunos responderam "não sei";

◊ cinco deixaram em branco (cerca de 16%);

◊ cinco afirmaram que a conclusão era correta;

◊ quarenta alunos (cerca de 48%) disseram que a conclusão é falsa mas não souberam apontar corretamente onde está o erro no raciocínio. Eis algumas respostas:

- π não é realmente (grifo nosso) igual a c/d. É aproximadamente igual;
- c/d não é uma divisão exata, portanto não é um número racional;
- que nem sempre a razão de dois racionais é racional;
- geometricamente sua representação estaria correta, mas π tem seu valor matemático que é irracional, e portanto não seria possível representá-lo na forma a/b, $b \neq 0$.

◊ Quinze (cerca de 18%) afirmaram que a conclusão era falsa, sem dar nenhuma explicação.

Além da identificação da idéia de razão entre números reais com fração (razão entre inteiros) as explicações dadas nesta questão apontam ainda em duas direções, que analisamos abaixo.

Na prática, toda medida é expressa por um número racional e, portanto, uma razão entre duas medidas é sempre racional. Esse consenso extrapola a prática imediata e é levado a situações teóricas em que faz sentido considerar também os irracionais. Assim, toda razão entre "números" se converte em razão entre inteiros. No caso da questão 5, aparece então uma contradição: por um lado π é a razão entre 2 números (o comprimento e o diâmetro da circunferência) e, portanto, deve ser racional. Mas, por outro lado, é sobejamente conhecido o fato de π ser irracional.

O aluno também tende a associar ao número irracional a idéia de imprecisão, não exatidão. A falta de significado para a representação decimal infinita e não periódica é uma das responsáveis por isso ("não se sabe o que vem depois da vírgula"). Sendo o perímetro da circunferência e seu diâmetro entes geométricos cujos comprimentos são finitos, suas medidas são pensadas como números racionais, o que também leva à contradição mencionada.

Alguns alunos reconheceram a razão c/d como um número irracional. Mas ao tentarem justificar deixaram claro que, para verificar se a divisão de dois reais é racional, olhavam para cada um deles separadamente. Assim, se para estes alunos, c, por exemplo, era irracional, então a razão c/d também seria (compare com a questão 4).

A distribuição dos números racionais e irracionais na reta real

Aqui investigamos a percepção dos alunos sobre a maneira como os racionais e os irracionais se distribuem dentro dos reais. Essa questão é importante já

que os irracionais "completam" os racionais para formar R. Uma boa percepção de como se situam Q e R - Q na reta numérica é fundamental para compreender o papel desses conjuntos na formação dos reais e a própria natureza do contínuo numérico.

> Questão 6: a) Encontre um número racional e um irracional entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.
>
> b) Encontre três números racionais e três irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.
>
> c) Quantos números racionais existem entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$? E irracionais?
>
> Explique sua resposta.

◊ Apenas 42% dos alunos afirmaram que existem infinitos racionais e infinitos irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, mesmo computando as respostas sem justificativa ou com justificativa incorreta.

◊ Nove alunos (cerca de 10%) apresentaram uma justificativa correta para o caso dos racionais e apenas três para o dos irracionais.

◊ Apenas 25% conseguiram exibir 3 irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ enquanto 44% exibiram 3 racionais.

Transcrevemos abaixo algumas das explicações referentes a esta questão.

- Creio que existam infinitos números racionais, porém um número finito de irracionais, porque o conjunto dos racionais é muito maior que o dos irracionais. Além disso há um limite para este conjunto $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$.
- Não conheço nenhum método de encontrar números irracionais. Talvez pudesse solucionar este problema descobrindo primeiro um irracional através de uma fórmula que não me lembro mais.
- Não há números irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.
- Irracionais infinitos. Racionais apenas a média entre os dois.
- É complicado achar números entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, pois só obteremos esta resposta se dividirmos um número irracional por um número racional.
- Muitos racionais. Irracionais também acho que muitos.

- Racionais, nenhum; irracionais, infinitos. Entre dois números quaisquer existem infinitos outros números.

É interessante observar que muitas das respostas incorretas nos itens a) e b) associavam dízimas periódicas com irracionalidade, isto é, representações decimais infinitas com irracionalidade. (Veja a questão 2 deste questionário.)

Passamos agora a comentar as questões de n.º 7 a 11 de cada questionário. Lembramos que as 6 questões que acabamos de analisar eram comuns aos questionários A e B.

Formas decimais infinitas (Questionário A)

Parece bastante aceitável para os alunos que qualquer forma decimal, finita ou não, periódica ou não, corresponda a um número real. Isso era esperado. Dos 36 alunos que responderam à

> Questão 7: Seja $\alpha = 0{,}12345678910111213\ldots$ (as próximas casas decimais continuam a seqüência dos naturais). Pergunta-se: α é um número? Explique sua resposta.

◊ Trinta e dois alunos responderam que α é um número, muitos acrescentando que se trata de um número irracional.

◊ Um aluno disse que "é um número esquisito, mas é número".

◊ Apenas um aluno afirmou que α não é um número por ter infinitas casas decimais.

As explicações, entretanto, não indicam que tal consenso seja resultado de uma compreensão verdadeira do significado da representação decimal infinita. Eis algumas explicações apresentadas:

- α é um número, pois é uma seqüência numérica;
- α é um número, pois é formado por casas decimais que são algarismos;
- α é um número, pois é gerado por uma seqüência;

- α é um número racional pois é uma dízima periódica e poderá ser representado na forma de fração.

Nenhuma resposta caminhou na direção de uma interpretação mais consistente da forma decimal infinita como representando uma "quantidade" (o limite da soma $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \ldots$) ou um ponto precisamente situado na reta orientada.

Um aluno parece ter percebido a dificuldade da explicação diante da falta de uma conceituação dos números reais. Ele diz:

- Acho que α é um número. Só que eu não vi (não sei se existe) uma definição de número, portanto não sei explicar por que α é um número.

Possibilidade de divisão infinita de um segmento (Questionário A)

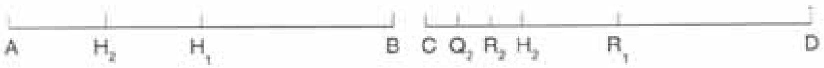
As perguntas 8, 9 e 10 a seguir foram extraídas, com pequenas modificações, de FISHBEIN, TIROSH e HESS (1979).

> Questão 8: Considere o segmento AB (figura abaixo). Sejam H_1 o ponto médio de AB, H_2 o ponto médio de AH_1, H_3 o ponto médio de AH_2 e assim sucessivamente. Deste modo estabelecemos um processo de divisão ao meio dos segmentos AB, AH_1, AH_2, etc.
>
> Este processo terá necessariamente um fim ou pode ser continuado indefinidamente?
>
> 
>
>
> Questão 9: Considere dois segmentos AB e CD com AB maior que CD (veja figura abaixo). Sejam H_1 o ponto médio de AB, H_2 o ponto médio de AH_1, H_3 o ponto médio de AH_2 e assim sucessivamente. Deste modo estabelecemos um processo de divisão ao meio dos segmentos AB, AH_1, AH_2, etc. Em cada etapa do processo consideramos o ponto médio do segmento obtido na etapa anterior. Estabelecemos um processo análogo para o segmento CD considerando agora os pontos Q_1 e R_1 em CD de tal modo que CQ_1, Q_1R_1 e

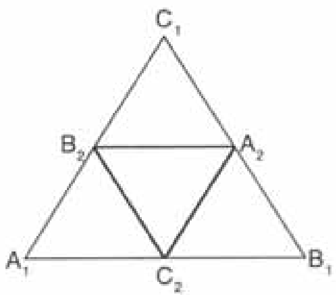
R_1D têm o mesmo comprimento, isto é, os pontos Q_1 e R_1 dividem o segmento CD em três partes iguais. Numa segunda etapa deste processo, sejam Q2 e R2 pontos que dividem CQ_1 em três partes iguais, isto é, CQ_2, Q_2R_2 e R_2Q_1 têm o mesmo comprimento e assim sucessivamente (veja figura). Pergunta-se:

a)Você acha que um destes processos terá mais etapas do que o outro?

b)Se você respondeu sim em a), qual deles terá maior número de etapas?



Questão 10: Considere um triângulo equilátero ABC e sejam A_1, B_1 e C_1, respectivamente, os pontos médios de AB, BC e AC (veja figura). Considere o novo triângulo $A_1B_1C_1$ e sejam A_2, B_2 e C_2, os pontos médios de seus lados e assim sucessivamente. Deste modo estabelecemos um processo de construção de triângulos equiláteros a partir de um triângulo equilátero dado. Este processo terá necessariamente um fim ou pode ser continuado indefinidamente?



Agrupamos estas 3 perguntas porque tratam essencialmente da mesma questão: a possibilidade da subdivisão infinita de um segmento. Não pedimos nenhuma explicação para as respostas porque estávamos interessados em detectar a intuição imediata dos alunos e não algum tipo de raciocínio elaborado.

Uma percepção incorreta desta questão pode se constituir em obstáculo para a compreensão de uma série de conceitos importantes ligados aos números reais: incomensurabilidade, representação decimal infinita, número irracional, continuidade dos reais, etc.

Observando as respostas de cada aluno para as 3 perguntas, notamos que o mesmo aluno pode responder corretamente à questão 8 e incorretamente à questão 10, por exemplo. Assim verificamos que, dos 36 alunos que responderam às 3 questões, apenas 17 demonstram segurança e coerência nas 3 respostas. Os outros 19 responderam incorretamente ou deixaram em branco pelo menos uma das 3. Isso sugere a necessidade de alguma reflexão sobre esse assunto em sala de aula, pois mais de 50% dos alunos não estão completamente seguros da possibilidade (teórica) de subdivisão infinita de um segmento. Provavelmente estes alunos ainda não distinguem claramente a diferença entre a divisão sucessiva do segmento como uma consideração do pensamento abstrato e a ação concreta e prática de subdividi-lo. Nesse último caso, quando cada uma das partes se torna tão pequena que o ato de dividi-la efetivamente em partes menores se inviabiliza, o aluno então bloqueia a possibilidade de imaginar idealmente a continuação do processo. Compare com as questões 8 e 9 do Questionário B.

Incomensurabilidade e irracionalidade (Questionário A)

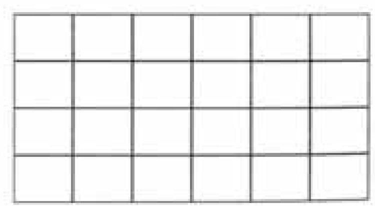
A próxima pergunta se refere, de novo, à questão da incomensurabilidade.

Questão 11: Considere quatro retângulos cujas dimensões, x e y, em cm, são dadas por:

a) $x = 15$ e $y = 35$; b) $x = 1{,}5$ e $y = 3{,}5$;

c) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35\sqrt{2}$; d) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35$.

Quais desses retângulos podem ser divididos em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais? (Ver figura abaixo)



Em cada caso possível determine o menor número de quadrados que podem ser formados.

Apenas sete alunos (menos de 20%) responderam corretamente (a, b e c), encontrando também corretamente o número mínimo de quadrados a ser formado. Nenhum dos sete, entretanto, explicou por que no caso d) não se poderia efetuar a subdivisão pedida. No caso a) eles acharam o máximo divisor comum de 15 e 35. Dividindo esse inteiro por 10 e multiplicando-o por $\sqrt{2}$ eles obtiveram as respostas para os casos b) e c). Como isso não funciona em d), eles podem ter concluído que nesse caso a subdivisão é impossível, sem considerar a incomensurabilidade entre a base e a altura do retângulo dado.

De qualquer modo, os alunos perguntados não parecem considerar a possibilidade de incomensurabilidade de segmentos, o que nos remete, de novo, à questão da relação confusa com a irracionalidade.

Potência com expoente irracional (Questionário B)

Queríamos detectar nessa pergunta se os alunos, após o estudo das funções exponenciais e logarítmicas no 2.º grau e nos cursos de Cálculo na Universidade, já tinham desenvolvido uma reflexão mais elaborada sobre o significado da potência com expoente irracional.

> Questão 7: a) $2^{\sqrt{2}}$ representa um número?
>
> b)$(-2)^{\sqrt{2}}$ representa um número?
>
> Explique suas respostas.

◊ Apenas 11 alunos (menos de 25%) responderam Sim e Não para as letras a) e b) respectivamente. Destes, 6 justificaram suas respostas para os itens a) e b).

◊ Para a letra b), 4 justificativas se basearam em manipulações algébricas, sendo três delas corretas: "$(-2)^{\sqrt{2}} = e^{\ln(-2)\sqrt{2}} = e^{\ln(-2)}$ e ln(-2) não existe". Os outros dois justificaram assim:

- $(-2)^{\sqrt{2}}$ não representa um número pois não há como definir se o mesmo representa um número positivo ou negativo.
- o sinal menos tem que ser elevado a um expoente inteiro.

◊ Vinte e quatro alunos (50%) responderam Sim em a) e b). As explicações dadas por esses alunos indicam que entre eles predomina a idéia simplista expressa pela seguinte resposta: "Sim para a) e b), pois um número elevado a outro número tem que dar como resultado um número".

◊ Seis alunos responderam Não em a) e b). As justificativas transcritas abaixo são exemplares: mostram claramente a inexistência de um conceito de potência para expoentes não racionais e novamente o mistério que cerca os números irracionais:

- a meu ver não há como resolver uma potência na qual o expoente é irracional;
- como conseguiria aplicar o conceito de potência a um expoente que não sei ao certo quem é? Quantas vezes multiplicaria o 2 ou (-2)? 1,41...vezes?

Infinito e representação decimal (Questionário B)

A igualdade $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ é facilmente aceita pelos alunos. Mas ela identifica uma forma simples e familiar (1/3) com uma representação decimal infinita que, por envolver a idéia de limite, não é tão simples, embora seja familiar. (Por outro lado, a igualdade 1 = 0,999..., que envolve as mesmas dificuldades técnicas, costuma intrigar os alunos e chega a ser recusada).

Se $0{,}33=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}$ então $0{,}333...= \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...$, isto é, 0,333... representa uma soma de infinitas parcelas. Por um lado, o resultado de uma soma é concebido como o número que se obtém no final do processo de somar e, por outro, é impossível chegar ao final nesse caso. Uma forma de conciliar estas constatações costuma ser o entendimento do infinito como "um número muito grande".

Queríamos checar, com as questões 8 e 9 a seguir, a freqüência dessa imagem "finitista" de alguns processos cujos resultados se expressam como limites no infinito (compare com as questões 8, 9 e 10 do Questionário A).

Na questão 9 não explicitamos a ligação com a representação decimal. Utilizamos uma versão "geométrica" da questão 8.

Nesse caso também não estávamos interessados em respostas elaboradas e com justificativas. Queríamos captar a intuição imediata do aluno sobre o problema. Por isso pedimos apenas que respondesse sim, não, ou não sei, sem necessidade de explicações.

Questão 8: Considere os números $x_1=0,3$ $x_2=0,33$ $x_3=0,333$ $x_4=0,3333$ e assim sucessivamente, isto é, se n é um natural, x_n é o número decimal da forma 0,333...3 com as n primeiras casas depois da vírgula iguais a 3 e as outras todas iguais a 0.
Existe um número natural n muito grande para o qual $x_n=1/3$?

Questão 9: Considere um ponto C, escolhido arbitrariamente, no interior de um segmento AB. Comece dividindo o segmento AB em 10 partes iguais. Depois divida cada uma das 10 partes em 10 partes iguais. Continue o processo. Será que depois de um número finito de etapas desse processo (talvez um número muito grande), o ponto C vai coincidir necessariamente com um dos pontos de subdivisão?

Dos 48 alunos, apenas 18 (menos de 38%) foram seguros nas respostas corretas (não) para as duas questões. Apesar de não se ter pedido uma explicação para a resposta, 20 alunos (41%) mostraram, em pelo menos uma das questões, o entendimento de que em alguma etapa (longínqua) o limite é atingido.

O conceito de número real e algumas propriedades estruturais (Questionário B)

Estas perguntas visam obter algumas imagens globais dos alunos relativas ao conjunto dos reais e verificar como eles percebem a necessidade de extensão dos racionais até o conjunto R.

Questão 10: Para você o que é um número real? Baseado no seu conceito de número real, verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

a) a cada ponto da reta corresponde um único número real;

b) a cada número real corresponde um único ponto da reta;

c) se você marcar na reta todos os números racionais, ficam sobrando alguns pontos;

d) Existe um intervalo da forma $\{x \in R;\ a < x < b\}$ que só contém números racionais;

e) Se acrescentarmos aos números racionais positivos todos os números da forma $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ com n, p e q naturais, obtemos todos os números reais positivos.

Questão 11: Os números naturais são utilizados, por exemplo, para contar e os racionais para medir. E os números irracionais, para que servem eles? E os reais?

Apenas 44 alunos responderam essas questões. Elas estavam impressas no verso da folha onde apareciam as 9 primeiras e 4 alunos não perceberam que deveriam virar a página.

◊ Seis respostas, tratando da questão "para que servem os reais?", referem-se à necessidade de se expressar "qualquer quantidade" ou às "grandezas contínuas". Embora tenham formulado os argumentos de modo vago, tocaram na característica fundamental do conjunto dos números reais.

◊ Dez alunos disseram que "número real é aquele que é racional ou irracional" embora, como vimos na questão 2, ninguém tenha apresentado uma conceituação para número irracional que evitasse essa circularidade.

◊ As outras respostas indicam imagens bastante precárias e/ou inconsistentes:

- número real é aquele que possui raízes reais;
- número real é aquele que não é complexo;
- nas disciplinas de Análise estudamos sobre eles. Mas na fabricação de peças com alta precisão onde um milímetro é fatal, este tipo de número aparece.

A idéia sobre os reais dominante neste grupo poderia ser resumida da seguinte forma: "embora eu não consiga penetrar no significado disso, sei que existem números que são frações e números que não são frações. É o que afirmam livros e professores. Os que se expressam como frações são racionais, e os outros irracionais. Juntando todos temos os reais". Tais imagens sugerem fortemente uma discussão aprofundada do significado das expressões: ser fração - não ser fração. Caso contrário acreditamos que a noção de irracionalidade e o conceito de número real vão se manter como um mito na formação do futuro professor.

Com relação aos itens em que pedimos para assinalar verdadeiro ou falso e apresentar as justificativas, obtivemos o seguinte quadro de respostas:

Item	V	F	Não Sei
A	79%	16%	5%
B	86%	9%	5%
C	77%	16%	7%
D	12%	79%	9%
E	20%	34%	46%

Quase nenhum aluno justificou suas respostas nestes itens. Mas em algumas tentativas aparece uma curiosa identificação do número real com a forma com que o representamos: 4 alunos afirmaram que a assertiva: "a cada ponto da reta corresponde um único número real" é falsa porque existem vários números correspondentes ao ponto $\frac{1}{5}$, por exemplo: $\frac{2}{10}$; 0,2; $\sqrt{\frac{1}{25}}$. Outro aluno afirmou que a assertiva era verdadeira, se consideramos como iguais $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

A porcentagem de acerto nos itens a), b) c) e d) foi bem grande. Entretanto, a análise das respostas das outras questões e das justificativas apresentadas nesta mesma questão, sugerem que esse grande índice de acerto se deve mais a que as afirmativas apresentadas nesses itens sejam fatos conhecidos de memória pelos alunos do que a um entendimento mais profundo da estrutura do conjunto dos números reais.

Inferências para o trabalho de formação de professores

O fato de que as razões entre inteiros não podem exprimir todas as "quantidades" não é tão simples como pode parecer. Envolvidas no campo conceitual dos

irracionais aparecem idéias relativamente sofisticadas como as de limite, continuidade, infinito. Por outro lado, como já observamos, e as respostas a este questionário mostram, os licenciandos possuem suas imagens, às vezes simplistas, às vezes ingênuas, mas todas resultantes da sua vivência escolar. Esses alunos vão retornar eventualmente à escola como professores. Trabalhar, na Licenciatura, o conceito de número irracional a partir da problematização e do questionamento dessas imagens é seguramente mais eficiente do ponto de vista didático e pedagógico do que simplesmente apresentar as definições corretas e provar formalmente os resultados.

Destacamos, em forma de síntese, dois pontos que podem ser deduzidos da análise dos resultados que acabamos de apresentar:

1) O contraste racionalidade versus irracionalidade parece ser percebido como pura formalidade, na medida em que a distinção é apenas na forma de representação (fração x não fração - decimal finito ou periódico x decimal infinito não periódico). O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passa ao largo de quase todas as respostas. Nesse sentido é que se torna compreensível a identificação bastante freqüente de formas decimais infinitas com os números irracionais: se a distinção entre racional e irracional é uma formalidade, se ela é uma separação arbitrária de dois tipos de número, faz mais sentido colocar de um lado os decimais finitos e de outro os infinitos do que agrupar os finitos e os infinitos periódicos contrastando-os com os infinitos não periódicos.

2) Se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. Por exemplo, o que significa $2^{\sqrt{5}}$? Qual o sentido da forma decimal infinita? Os irracionais são densos em R?

O estudo dos sistemas numéricos é de fundamental importância na formação matemática do futuro professor. Mas os resultados deste questionário, assim como outros estudos que temos feito nessa direção (ver FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. e SOARES E. F., 1999) , indicam que uma abordagem do tema, especificamente voltada para a formação do futuro professor, deve ser construída na Licenciatura.

Porque uma nova abordagem? Em que consiste sua especificidade? Na sua formação matemática dentro da Licenciatura, o futuro professor realiza um estudo sistemático dos números reais geralmente a partir de um enfoque axiomático: R é apresentado como um corpo ordenado completo, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades.

O conflito entre esse tipo de abordagem e as imagens conceituais que acabamos de descrever termina por acentuar a desorganização e a inconsistência do conjunto de modelos com que os alunos elaboram seu pensamento conceitual.

A formação matemática na Licenciatura deve, ao nosso ver, tomar como parâmetro essencial o fato de que seus alunos vão se tornar professores da escola básica. Isso significa, entre outras coisas, que eles irão, eventualmente, ajudar as crianças a construir, criticar e reformular seus próprios modelos intuitivos. Por isso a abordagem específica dentro da Licenciatura deveria partir fundamentalmente da problematização das concepções e das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão teórica global do conjunto R que, efetivamente, instrumentalize para o ensino na escola básica. Uma formação matemática sólida para o professor do ensino básico não consiste, ao nosso ver, em "superar o intuitivo" e se ater às definições formais e às provas rigorosamente dedutivas.

O desafio é trabalhar sobre esse mosaico de representações que o aluno possui, proporcionando-lhe a oportunidade de reelaborar a sua intuição sobre os elementos conceituais que vão se colocar em questão na sua prática de ensino na escola. Em outras palavras, aprofundar a formação matemática do professor é, na nossa concepção, aprofundar a sua visão intuitiva dos conceitos relevantes dentro da sua prática. Isso significa uma superação tanto da abordagem formal axiomática dos cursos de Análise como daquela encontrada nos textos didáticos escolares a qual, de certo modo, se reflete nas respostas do questionário que analisamos neste trabalho. Em outro artigo apresentaremos uma proposta de abordagem para os sistemas numéricos (racionais e reais) na Licenciatura em Matemática, com a qual esperamos contribuir para o debate em torno desta questão.

Referências Bibliográficas

FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C., SOARES, E. F. - *Relatório de Projeto de Pesquisa* - Departamento de Matemática - UFMG - 1999

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R. ; COHEN, D. - The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, pp. 29-44,1995.

FISHBEIN, E.; TIROSH, D. ; HESS, P. - The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 3-40,1979.

ROBINET, J. - Les Réels: quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, pp. 359-386, 1986.

SOARES, E. F. - *Relatório de Projeto de Pesquisa* - Departamento de Matemática - UFSC- 1999

TALL, D. in *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, (Tall, D. ed), Dordrecht, 1991, cap. 1, p. 3.

TALL, D. - *Cognitive Difficulties in Learning Analysis* - Mathematics Educational Research Centre, Warwick University, England, 1994.

TALL, D. ; SCHWARZENBERGER, R. L. E. - Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, vol. 82, pp. 44-49, 1978.

TALL, D. ; VINNER, S. - Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp 151-169, 1981.