LION, C.G. Mitos e Realidades na Tecnologia Educacional. In: LITWIN, E. (Org.). *Tecnologia educacional*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997, p. 23-36.

MARCELO GARCIA, C. *El Pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC, 1987, 180 p.

_______. A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In: NÓVOA, Antonio. *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 2 ed., 1995, p 53-76 .

MOREY, M. Introduccion: La cuestion del metodo. In: FOUCAULT, M. *Tecnologias del yo y otros textos afines*. Barcelona: Paidós, 1996, p.9-44.

PÉREZ GÓMEZ, A. O pensamento prático do professor. In: NÓVOA, A. (Org.). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1995, p. 93-115.

SACRISTÁN, G. e PÉREZ GÓMEZ, A. *Compreender e transformar o ensino*. Porto Alegre: Artes Médicas, 4 ed, 1998, 396p.

SANTAMARINA, C. e MARINAS, J.M. Historias de vida e historia oral. In: DELGADO, J.M. e GUTIÉRREZ, J.(Org.). *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. Madri: Editorial Sintesis, 1994, p.257-285.

SANTOS, B. S. *Pela mão de Alice: o social e o político na pós-modernidade*. Porto: Afrontamento, 1994, 298 p.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.) *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1995, p.77-91.

SHULMAN, L. Those who understand knowledge growth in teaching. In: *Educational Researcher*, Arlington-USA, v. 15, n. 2, 1986, p.4-14.

TANUS, S. *Reestruturação dos cursos de Licenciatura em Matemática: Teoria e Prática*. Dissertação de Mestrado, Rio Claro:UNESP, 1995, 286p.

TINOCO, L. et al. Formação inicial do professor de Matemática. In: *Revista Zetetike*, Campinas, v.5, n7, jan/jun 1997, p.37-50.

VEIGA-NETO, A. Michel Foucault e Educação: há algo de novo sob o sol? In: SILVA, T.(Org). *Crítica pós-estruturalista e Educação*. Porto Alegre:Sulina, 1995, p.9-56

Aproximações de um Valor de Bifurcação Usando uma Planilha

*Gilda de La Rocque Palis**

RESUMO: A disponibilidade e flexibilidade das planilhas eletrônicas torna estas ferramentas computacionais muito interessantes, principalmente em nosso ambiente carente de recursos em termos de software educacionais. A demanda atual pela introdução de atividades com computadores em nossas escolas e universidades nos encorajou a desenhar um conjunto de atividades para serem realizadas com o apoio de uma planilha (Excel) e analisar como licenciandos e professores em serviço trabalham em um ambiente aberto para exploração interativa como o propiciado por essa tecnologia. Descrevemos uma dessas atividades e algumas das estratégias utilizadas por licenciandos ao procurar resolver o problema proposto.

PALAVRAS CHAVE: Ensino Superior; computador; planilha; seqüência recorrente.

ABSTRACT: Approximations of a bifurcation value using a spreadsheet.

The relative availability and flexibility of spreadsheets make them very attractive, especially in an environment where computer

* Professora Associada do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

resources are scarce. The present demand for the introduction of computer work in schools and colleges in Brazil has led us to design a set of spreadsheet-supported activities to examine how pre-service and in-service teachers behave in an exploratory computer setting. We describe the content of one of the activities devised and some of the strategies used by pre-service teachers in carrying it out.

KEYWORDS: Un dergraduate teaching; computer; spreadsheet; recurrence relation.

Introdução

Um meio atualmente em voga para a apresentação e estudo de diversos aspectos do conteúdo matemático é o computador. Através da informática, chega uma nova oportunidade de rever o ensino dessa ciência, trazendo novos modos de ensinar e aprender, inclusive de fazer conexões entre diversos aspectos da matemática. Entendemos, entretanto, que nas escolas e universidades, assim como em qualquer campo da atividade humana, o novo, por si só, não garante mudanças ou transformações qualitativas. Logo, é preciso separar as expectativas acerca das novidades tecnológicas do valor efetivo das mesmas na consolidação de alguns dos desafios educacionais postos para a Educação Matemática. A simples introdução dos computadores na sala de aula não garante a mudança no ensino de matemática; os agentes dessa mudança na educação devem ser os professores. Portanto, é importante que professores e licenciandos reflitam sobre o uso de computadores como ferramenta de ensino a fim de não serem inadvertidamente mobilizados por expectativas sem fundamento, nem desperdiçar possibilidades valiosas de melhorar a qualidade do aprendizado de seus alunos.

Na prática, algumas escolas e universidades já começaram a organizar laboratórios com computadores e um número crescente de professores tem acesso a um computador pessoal. Ao mesmo tempo, poucos professores já tiveram a oportunidade de explorar as potencialidades dos computadores no ensino/aprendizagem de matemática. A demanda por

conhecimentos nessa área pode ser sentida em diversas reuniões nas quais as atividades envolvendo computadores e Educação Matemática atraem um número bastante grande de participantes.

Planilhas Eletrônicas

As planilhas eletrônicas (usamos o Excel) estão dentre os tipos de software mais antigos disponíveis comercialmente e, ao lado de um processador de textos e um banco de dados, encontram-se instaladas em um grande número de computadores, o que inclui equipamentos de escolas, universidades, professores e alunos. Este fato já torna interessante o estudo de suas potencialidades no aprendizado de conteúdos específicos, principalmente em nosso ambiente carente de recursos em termos de software educacionais.

Por outro lado, não é somente na Educação Matemática que as potencialidades das planilhas vêm sendo investigadas. Este instrumento é também mencionado em estudos relacionados com o ensino de várias outras disciplinas: Química, Física, Biologia, Geologia e Estatística, além de ser uma ferramenta essencial em Contabilidade, Economia, Administração, Finanças, etc. Mesmo nos restringindo à matemática, atividades com planilhas têm sido propostas no contexto de uma diversidade de tópicos matemáticos, desde resolução de situações-problema simples até o estudo de equações diferenciais parciais.[1]

Uma planilha eletrônica é essencialmente uma ferramenta para manipulação de tabelas de dados matemáticos com recursos gráficos e numéricos. Segundo HENLE (1995), apesar das planilhas não trabalharem simbolicamente, seu campo de ação se restringindo a manipulações numéricas e gráficas, elas apresentam várias vantagens do ponto de vista do ensino de Matemática:

i. São de fácil utilização e de aprendizado rápido.

ii. Constituem ferramentas práticas muito usadas em disciplinas variadas e ambientes profissionais diversos.

1. Ver http:// sunsite.univie.ac.at/ spreadsite/ spreaded.html para ter uma idéia da abrangência mencionada.

iii. São "transparentes", no sentido de que toda quantidade gerada em uma planilha é calculada por uma fórmula numérica explícita introduzida pelo usuário que sabe então exatamente como os resultados numéricos são obtidos. O mistério da "caixa-preta" e o emprego de técnicas desconhecidas do usuário, presentes na maior parte dos software matemáticos, não se apresenta aqui. HENLE (1995) diz ainda que uma planilha "sabe" tanto quanto o usuário, ou seja, é quase impossível usá-la corretamente sem entender o que se está fazendo.

Há uma certa dose de exagero nessa última afirmativa. Primeiro porque o conjunto de números disponíveis para cálculo nas diversas tecnologias, dados por suas expansões decimais, não coincide com o conjunto dos números reais. As máquinas trabalham numericamente somente com um certo conjunto finito de racionais contido no conjunto $X=\{0\}\cup\{[10^{-m},10^{m}]\}\cup\{[-10^{m},-10^{-m}]\}$ e expresso com base dois, onde m é um inteiro positivo cujo valor depende da tecnologia. Além da impossibilidade de representar todos os números, que são arredondados por algum processo para a quantidade de dígitos com a qual a máquina trabalha, as diversas funções pré-programadas são calculadas por algoritmos geralmente desconhecidos do usuário e que fornecem aproximações de seus valores. Não conhecemos, freqüentemente, nem como os diversos instrumentos computacionais calculam valores das funções elementares. De acordo com REISZ (1981), nas calculadoras as funções pré-programadas (seno, exponencial,...) são aproximadas por construtores utilizando funções polinomiais ou racionais cuja forma explícita permanece "um segredo de fabricação."

No entanto, como veremos adiante, o fato de uma ferramenta não simbólica como a planilha não trabalhar com números irracionais, mas com aproximações racionais dos mesmos, pode dar origem a momentos de aprendizagem bastante interessantes.

A planilha eletrônica é uma excelente ferramenta para exploração numérica e gráfica de situações-problema modeladas por seqüências recorrentes. A rapidez de produção e modificação de dados gerados podem criar um ambiente aberto para exploração interativa, o que as torna um excelente meio auxiliar para gerar conjecturas baseadas em evidências numéricas e gráficas. Como ressalta GARDINER (1991), os números nada "dizem" ao iniciante até que ele começa a ver como eles aparecem; pois os computadores produzem respostas numéricas e o que se necessita, ao ensinar matemática discreta, são respostas estruturadas.

Algumas Investigações

A fim de explorar e analisar as potencialidades de uma planilha desenhamos um conjunto de atividades para serem resolvidas com apoio desse instrumento computacional.

O objetivo das atividades é essencialmente o trabalho com seqüências definidas recursivamente e sua descrição em forma fechada (quando existe), a exploração de situações-problema que podem ser modeladas por seqüências recorrentes e o estudo de diferentes comportamentos dessas seqüências quando fazemos mudanças em suas condições iniciais e parâmetros. Além disso pretendemos criar uma oportunidade para uma discussão sobre os diferentes papéis de variáveis e parâmetros e sobre a concepção característica de um raciocínio indutivo de que exemplos são suficientes para provar um enunciado matemático.

Estas atividades foram propostas a professores em cursos de especialização e em minicursos de reuniões, bem como para licenciandos na Puc-Rio. Algumas reflexões sobre estas implementações baseadas em observações e registros gravados em fita podem ser encontradas em PALIS (1998). Uma investigação mais sistemática foi realizada no contexto de uma dissertação de Mestrado, desta vez estando a análise baseada em gravações em vídeo do trabalho de três professores enquanto resolviam as situações-problema propostas (BOTELHO, 1998).

A seguir apresentamos uma das atividades desenvolvidas e que foi proposta a quatro alunos da Licenciatura em Matemática da Puc-Rio. Trata-se de um problema envolvendo uma seqüência do tipo de Fibonacci. Descrevemos também os nossos objetivos ao propor a atividade e como ela se mostrou bastante rica através do relato da resolução empreendida pelos alunos.

Uma Atividade com uma Seqüência de Fibonacci

A atividade consiste no seguinte problema, para ser realizado com apoio do Excel:

1) Considere a seqüência (A_n) dada por $A_0 = 1$, $A_1 = 1$ e $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ para $n \geq 0$. Qual é o limite desta seqüência quando n tende a infinito?

2) O que acontece se modificarmos o valor de A_1 (deixando A_0 fixo)? Como o comportamento da seqüência varia com o valor de A_1?

3) Agora faça $A_1 = (1 - \sqrt{5})/2$. O que acontece?

4) Considere a seqüência (B_n) dada por $B_n = ((1-\sqrt{5})/2)^n$, $n \geq 0$. Implemente-a na planilha e faça uma conjectura sobre o seu comportamento. Procure provar a sua conjectura.

5) Mostre que as seqüências consideradas nos dois itens anteriores são iguais (isto é, são diferentes descrições da mesma seqüência)

6) Tendo em vista o resultado do item 5) como você explica os resultados que você obteve em 3) e 4) ?

O objetivo da atividade é levar os alunos à reflexão sobre as diferenças entre um valor exato (resultado teórico) e aproximações (resultados numéricos obtidos com a planilha), sobre números disponíveis para cálculos numéricos em uma tecnologia e sobre como pequenas mudanças numa condição inicial de uma equação de diferenças podem produzir resultados bastante diferentes.

Resolução dos Alunos

Os alunos perceberam com facilidade que a seqüência dada no item 1 diverge a ∞. Ao trabalhar com o item 2 também concluíram rapidamente que se A_1 é não negativo, então a seqüência diverge a ∞. Experimentaram então com valores de A_1 menores ou iguais a -1 e decidiram que nesses casos a seqüência diverge a $-\infty$. Eles não pensaram em atribuir valores entre -1 e 0 a A_1, até que isso lhes foi sugerido. Após algumas tentativas, três deles (a essa altura um dos alunos já estava completamente perdido) observaram que nos casos em que $A_1 \geq -0,61$ a seqüência parece divergir a ∞, e quando $A_1 \leq -0,62$, a seqüência parece divergir a $-\infty$. Na Figura 1 pode-se ver uma tabela gerada na planilha para os casos em que $A_1 = -0,62$ e $A_1 = -0,61$

	A n	A n
0	1 ,0 0	1 ,0 0
1	- 0 ,6 2	- 0 ,6 1
2	0 ,3 8	0 ,3 9
3	- 0 ,2 4	- 0 ,2 2
4	0 ,1 4	0 ,1 7
5	- 0 ,1 0	- 0 ,0 5
6	0 ,0 4	0 ,1 2
7	- 0 ,0 6	0 ,0 7
8	- 0 ,0 2	0 ,1 9
9	- 0 ,0 8	0 ,2 6
1 0	- 0 ,1 0	0 ,4 5
1 1	- 0 ,1 8	0 ,7 1
1 2	- 0 ,2 8	1 ,1 6
1 3	- 0 ,4 6	1 ,8 7
1 4	- 0 ,7 4	3 ,0 3
1 5	- 1 ,2 0	4 ,9 0
1 6	- 1 ,9 4	7 ,9 3
1 7	- 3 ,1 4	1 2 ,8 3
1 8	- 5 ,0 8	2 0 ,7 6
1 9	- 8 ,2 2	3 3 ,5 9
2 0	- 1 3 ,3 0	5 4 ,3 5
2 1	- 2 1 ,5 2	8 7 ,9 4
2 2	- 3 4 ,8 2	1 4 2 ,2 9
2 3	- 5 6 ,3 4	2 3 0 ,2 3
2 4	- 9 1 ,1 6	3 7 2 ,5 2
2 5	- 1 4 7 ,5 0	6 0 2 ,7 5
2 6	- 2 3 8 ,6 6	9 7 5 ,2 7
2 7	- 3 8 6 ,1 6	1 5 7 8 ,0 2
2 8	- 6 2 4 ,8 2	2 5 5 3 ,2 9
2 9	- 1 0 1 0 ,9 8	4 1 3 1 ,3 1
3 0	- 1 6 3 5 ,8 0	6 6 8 4 ,6 0

Figura 1

Além disso, eles notaram que poderiam continuar procurando "melhores aproximações do ponto de virada" do comportamento da seqüência. Através de um processo de busca binária (método de bisseção) atribuíram os valores - 0,615, - 0,6175 e - 0,61875 a A_1 chegando assim à conclusão que "o ponto de virada" estava entre – 0,61875 e – 0,6175.

As Figuras 2, 3 ,4, 5 e 6 mostram gráficos da seqüência obtidos para os valores de A_1 iguais a – 0,62, – 0,61, - 0,615, - 0,6175 e - 0,61875, respectivamente.

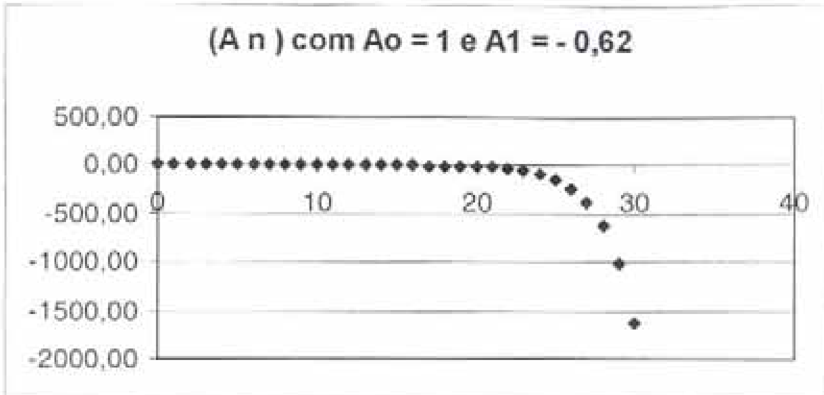

Figura 2

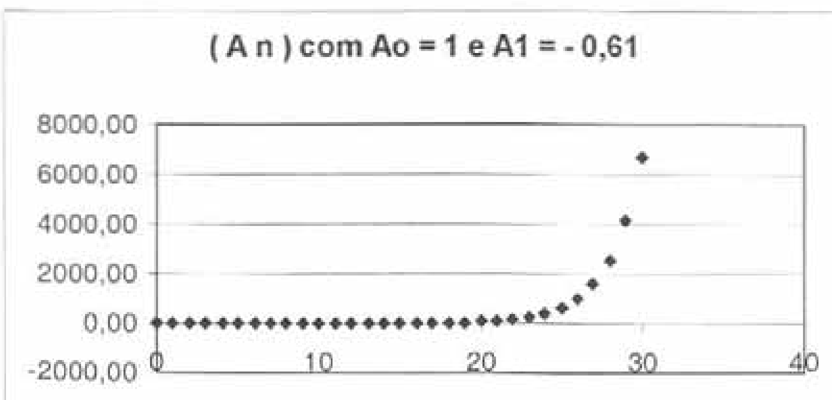

Figura 3

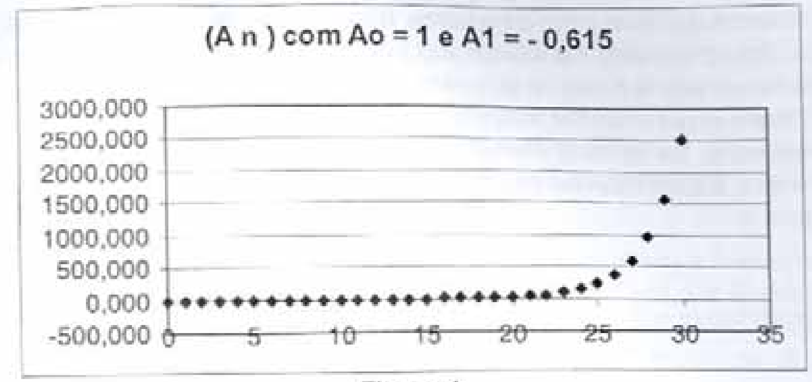

Figura 4

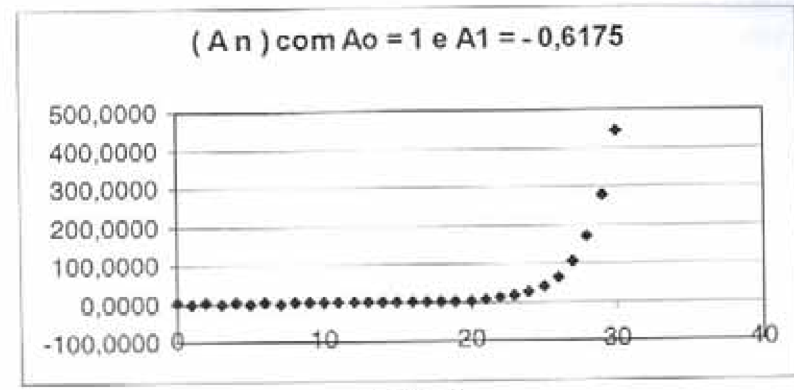

Figura 5

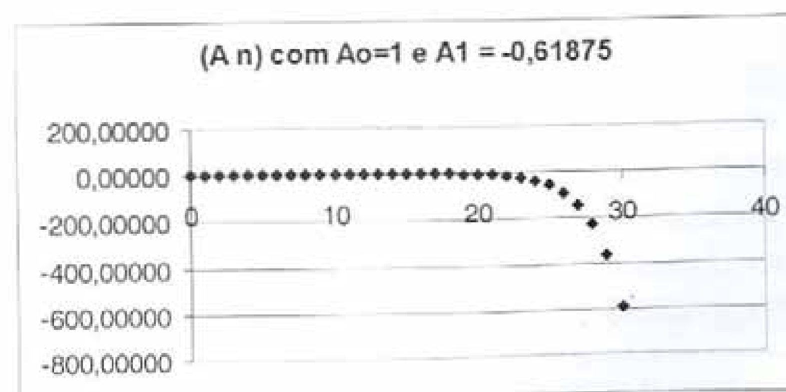

Figura 6

Quanto ao item 3, os alunos disseram que a seqüência (A_n) com $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$ parecia convergir a 0 pelo que podiam observar na planilha, baseando-se em tabelas e também em gráficos como o exibido na Figura 7. Depois que lhes foi sugerido examinar um número maior de termos da seqüência, os alunos disseram que a seqüência parecia agora divergir a $-\infty$, baseando-se em tabelas e gráficos como o que é mostrado na Figura 8.

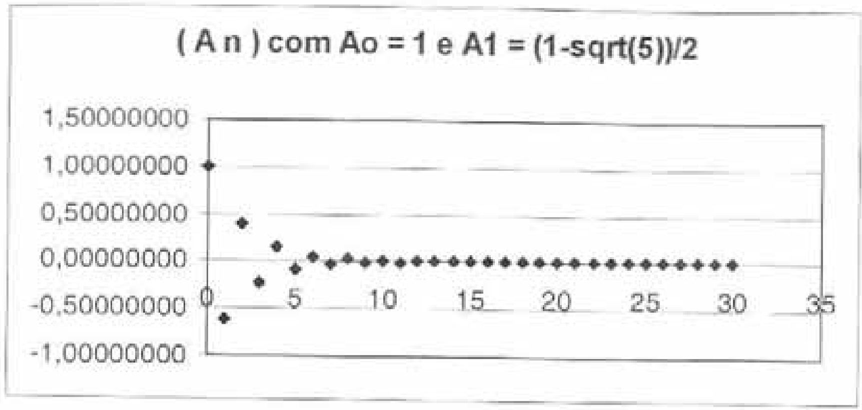

Figura 7

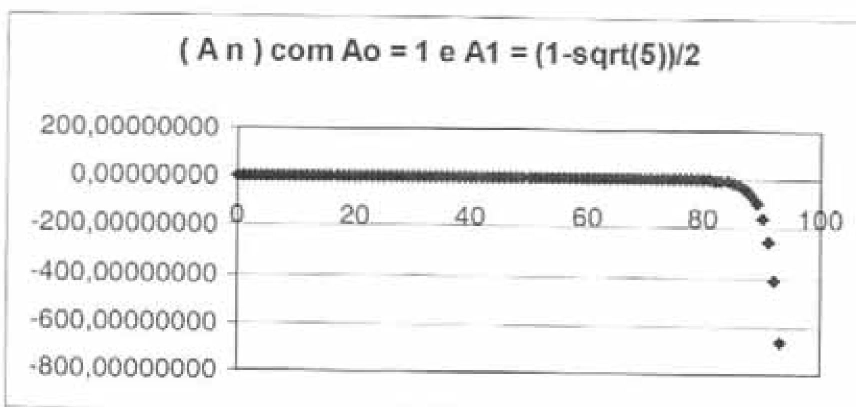

Figura 8

Prosseguiram com o item 4, e após observar o comportamento da seqüência (B_n) através de informações numéricas obtidas com a planilha, os alunos decidiram que a seqüência converge a zero (ver a segunda coluna das Figuras 9 e 10). Mas somente um deles utilizou um resultado teórico para provar sua conjectura: trata-se de uma seqüência geométrica cuja razão tem módulo menor do que 1. Os dois outros alunos não identificaram a seqüência geométrica com a qual estavam trabalhando.

Passando ao item 5, os três alunos que continuavam a trabalhar com o problema proposto provaram que as seqüências dos itens 3 e 4 são iguais, dois deles através de uma demonstração por indução e um deles resolvendo a equação de diferenças finitas que lhe forneceu o termo geral de (B_n).

Somente este último aluno (o mesmo que demonstrou que (B_n) converge a 0) concluiu que as seqüências dadas nos itens 3 e 4 convergem a zero e que o comportamento da seqüência (A_n) com $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$ percebido através do uso da planilha necessitava de alguma explicação adicional.

Os outros dois alunos não puderam superar a contradição. Um deles disse: " De fato as duas seqüências dos itens 3 e 4 são iguais (ver prova), e a diferença, de que uma diverge e a outra converge, se deve à precisão dos cálculos com Excel . Eu não sei se elas convergem ou não".

As Figuras 9 e 10 exibem tabelas numéricas obtidas com a planilha referentes às seqüências (A_n) e (B_n) estudadas nos itens 3 e 4, a saber (A_n) para a qual $A_0 = 1$, $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$ e $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ para $n \geq 0$ e (B_n) dada por $B_n = ((1-\sqrt{5})/2)^n$, $n \geq 0$.

O comportamento da seqüência (A_n), induzido pelos resultados obtidos com a planilha, isto é, de que essa seqüência diverge é incorreto. As definições acima são diferentes descrições da mesma seqüência, que converge a zero.

O que ocorre aqui é que a ferramenta[2] calcula os valores das seqüências a partir de uma aproximação racional α de $(1-\sqrt{5})/2$, ou seja, exibe valores das seqüências $(\overline{A}_n)$ e $(\overline{B}_n)$ dadas por

$$\overline{A}_0 = 1,\ \overline{A}_1 = \alpha \text{ e } \overline{A}_{n+2} = \overline{A}_{n+1} + \overline{A}_n \text{ para } n \geq 0 \text{ e } \overline{B}_n = \alpha^n,\ n \geq 0$$

2. Com programas que trabalham em modo simbólico como o Maple é possível determinar o comportamento da seqüência (A_n) para o valor de bifurcação $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$. Vale observar que o Maple inicialmente reescreve em forma fechada a seqüência (A_n) dada em forma recursiva e daí o seu limite é calculado. Ou seja, de fato, o Maple calcula o limite da seqüência (B_n).

	A n	B n
0	1,000E+00	1,000E+00
1	-6,180E-01	-6,180E-01
2	3,820E-01	3,820E-01
3	-2,361E-01	-2,361E-01
4	1,459E-01	1,459E-01
5	-9,017E-02	-9,017E-02
6	5,573E-02	5,573E-02
7	-3,444E-02	-3,444E-02
8	2,129E-02	2,129E-02
9	-1,316E-02	-1,316E-02
10	8,131E-03	8,131E-03
11	-5,025E-03	-5,025E-03
12	3,106E-03	3,106E-03
13	-1,919E-03	-1,919E-03
14	1,186E-03	1,186E-03
15	-7,331E-04	-7,331E-04
16	4,531E-04	4,531E-04
17	-2,800E-04	-2,800E-04
18	1,731E-04	1,731E-04
19	-1,070E-04	-1,070E-04
20	6,611E-05	6,611E-05
21	-4,086E-05	-4,086E-05
22	2,525E-05	2,525E-05
23	-1,561E-05	-1,561E-05
24	9,645E-06	9,645E-06
25	-5,961E-06	-5,961E-06
26	3,684E-06	3,684E-06
27	-2,277E-06	-2,277E-06
28	1,407E-06	1,407E-06
29	-8,697E-07	-8,697E-07
30	5,374E-07	5,375E-07

Figura 9

	A n	B n
63	-3,562E-04	-6,820E-14
64	-5,764E-04	4,215E-14
65	-9,326E-04	-2,605E-14
66	-1,509E-03	1,610E-14
67	-2,441E-03	-9,950E-15
68	-3,950E-03	6,150E-15
69	-6,392E-03	-3,801E-15
70	-1,034E-02	2,349E-15
71	-1,673E-02	-1,452E-15
72	-2,708E-02	8,972E-16
73	-4,381E-02	-5,545E-16
74	-7,089E-02	3,427E-16
75	-1,147E-01	-2,118E-16
76	-1,856E-01	1,309E-16
77	-3,003E-01	-8,090E-17
78	-4,859E-01	5,000E-17
79	-7,862E-01	-3,090E-17
80	-1,272E+00	1,910E-17
81	-2,058E+00	-1,180E-17
82	-3,330E+00	7,295E-18
83	-5,388E+00	-4,508E-18
84	-8,719E+00	2,786E-18
85	-1,411E+01	-1,722E-18
86	-2,283E+01	1,064E-18
87	-3,693E+01	-6,578E-19
88	-5,976E+01	4,065E-19
89	-9,669E+01	-2,512E-19
90	-1,564E+02	1,553E-19
91	-2,531E+02	-9,597E-20
92	-4,096E+02	5,931E-20
93	-6,627E+02	-3,666E-20

Figura 10

No caso da seqüência $(\bar{B}_n)$ basta que essa aproximação α tenha módulo menor do que 1 para que $(\bar{B}_n)$ também seja convergente a 0. No entanto os comportamentos das seqüências (A_n) e $(\bar{A}_n)$ podem ser bastante distintos.

Para verificarmos esse fato, examinemos a solução da equação de diferenças finitas $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ com $A_0 = 1$, ou seja, a forma fechada da seqüência (A_n) para a qual $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ e $A_0 = 1$. Essa solução pode ser expressa da seguinte forma:

$$A_n = \left(1 - \frac{(A_1 - R_1)}{\sqrt{5}} \right) R_1^n + \frac{1}{\sqrt{5}} (A_1 - R_1) R_2^n$$

sendo $R_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $R_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Na expressão acima vemos que se $A_1 = R_1$, então a seqüência (A_n) converge a zero; se $A_1 > R_1$, então a seqüência (A_n) diverge a ∞; e se $A_1 < R_1$, então a seqüência (A_n) diverge a $-\infty$.

Portanto, é razoável esperar que se $\alpha > (1-\sqrt{5})/2$, a seqüência exibida pela planilha pareça divergir a ∞; e se $\alpha < (1-\sqrt{5})/2$, a seqüência calculada pela planilha pareça divergir a $-\infty$.

Conclusão

O estudo da seqüência de Fibonacci (A_n) constitui um exemplo interessante de situação na qual o parâmetro A_1 apresenta um valor de bifurcação, a saber $(1-\sqrt{5})/2$. Pequenas variações desse valor levam a mudanças drásticas no comportamento da seqüência. E como este valor é irracional, e portanto um número com o qual a planilha não trabalha, o comportamento da seqüência (A_n) para $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$ não pode ser conjecturado a partir de dados numéricos ou gráficos obtidos com essa ferramenta. No entanto, através da observação do comportamento da seqüência (A_n) para certos valores de A_1 os alunos chegaram a aproximações desse valor de bifurcação.

Nossa idéia original era a de que os alunos fizessem conjecturas a partir dos resultados numéricos ou gráficos obtidos com a planilha e que ao se depararem com resultados discrepantes, duas seqüências cuja igualdade é

possível demonstrar com comportamentos assintóticos aparentes tão distintos, iriam recorrer à teoria para resolver a contradição. Como vimos acima, somente um dos alunos comparou os resultados numéricos com resultados teóricos, mostrou-se ciente das limitações das evidências numéricas empíricas obtidas com a planilha questionando o tratamento da ferramenta computacional e não a sua resolução, e pode deduzir assim o comportamento da seqüência (A_n) quando $A_0 = 1$ e $A_1 = (1-\sqrt{5})/2$.

Os diversos experimentos de ensino, que fizemos utilizando planilhas eletrônicas, nos permitem concluir que tanto os licenciandos como os professores em serviço precisam estar preparados para usar ferramentas computacionais que propiciem ambientes favoráveis a trabalhos exploratórios com conceitos e processos matemáticos como uma forma de aprimorar o ensino/aprendizagem. Também precisam estar conscientes do fato que as evidências geradas nesses ambientes podem fundamentar a formulação de conjecturas não constituindo, entretanto, uma prova matemática das mesmas.

Referências Bibliográficas

BOTELHO, C.G.M. *Estudo de seqüências numéricas através da resolução de situações problema e do uso de planilha eletrônica: Investigação com professores.* Departamento de Matemática, Puc-Rio, Março de 1998. 71 pgs. Dissertação de mestrado.

GARDINER, A D. A cautionary note. In M.J. Kenney & C.D.Hirsch (Eds.) *Discrete Mathematics Across the Curriculum K - 12*, p. 10-17, The National Council of Teachers of Mathematics. 1991.

HENLE, M.G. Forget Not the Lowly Spreadsheet. *The College Mathematics Journal*, Vol. .26, n.. 4, p. 320-328. 1995.

PALIS, G.L.R. Let's Ask "Why?" After "What If?, *Pré-print.* Departamento de Matemática, Puc-Rio, Serie C. 01/98. 40 pgs. 1998.

REISZ, D. Interpolation et approximation de fonctions. In *Enseigner de l'Analyse*, Bulletin Inter Irem. 1981.