O trabalho pedagógico envolvendo geometrias não-euclidianas no Ensino Fundamental

Zionice Garbelini Martos[*]

Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia de nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...

Rubem Alves

Resumo: O presente trabalho pretende discutir sobre o ensino de Geometria, através de uma pesquisa realizada numa oitava série da Escola Pública Estadual da cidade de Rio Claro/SP, cujas reflexões culminaram na Dissertação de Mestrado. Abordamos conceitos de Geometria euclidiana juntamente com Geometria esférica. Do ponto de vista metodológico, insere-se numa abordagem qualitativa de pesquisa, especificamente em pesquisa-ação. Utilizamos o referencial teórico da formação de conceitos em Vygotsky. Dessa forma tínhamos a seguinte questão: "é possível aos alunos do Ensino Fundamental produzirem significados em Geometria Esférica?" Na análise dos dados, acreditamos que o trabalho em grupo foi um dos mecanismos que possibilitaram um melhor entendimento dos conceitos discutidos.

Palavras-chave: Geometria euclidiana, formação de conceitos, Geometria esférica.

Abstract: This paper intends to present some discussions about the geometry teaching, through a research that was carried out in an Grade School and Junior High School from the state Public School of Rio Claro city, São Paulo, whose reflexions culminated in the Master's Degree dissertation (Martos, 2002)1. We deal with concepts euclidean geometry with spherical geometry. From a methodological point of view, the qualitative approach to a research, especially in Research-action. We use the theoretical referential of the formation of concepts in Vigotski (1999). This way, we had the following question: "it's possible to the students of the

[*]Mestre em Educação Matemática, Unesp – Rio Claro, Professora Adjunta da Faculdade Bandeirantes de Ribeirão Preto e da Fundação Educacional de Ituverava. zionice@ig.com.br

Fundamental Education produce the meanings in spherical Geometry?" In analysis of information, we believe that the work in group was one of the mechanisms which facilitate a better understanding of the concepts.

Key-words: Euclidian geometry, conceptual formation, spherical geometry.

Introdução

Em um dos capítulos do livro *Pensamento e Linguagem* de Vygotsky (1999), é apresentado um estudo sobre a formação de conceitos. Nele o autor nos coloca que o desenvolvimento do pensamento é determinado pela "linguagem", ou seja, pelos instrumentos lingüísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança (VYGOTSKY, 1999). Esse é um dos autores que utilizamos em nossa pesquisa. Consideramos também, que o conceito de "problematização", desenvolvido em Mendonça (1993), nos trouxe grandes contribuições teóricas.

Relataremos o trabalho realizado na sala de aula da 8ª série. Cabe, aqui, ressaltar que não houve preparação da classe para aplicarmos as fichas de trabalho (FT)[1]. Inicialmente os alunos apresentavam grandes dificuldades em trabalhar em grupo. Várias vezes reunimos o grupão[2] para tratar desentendimentos entre integrantes de grupo. Nesse momento de nossa intervenção, seguimos orientações de Leme (1995) e Francisco (1998). Foram apresentadas situações-problema contidas em fichas com descrições de atividades a serem desenvolvidas com a utilização de materiais manipulativos, tais como bolas de isopor, mapas e globos

[1]O leitor encontrará no texto descrições dessas fichas de trabalho (FT) em forma da atividade 1,2,3,4,no decorrer do texto estaremos nos referindo a ficha de trabalho e atividade como palavras sinônimas.
[2]Por grupão estamos entendendo a formação de um único grupo de alunos, com as carteiras em forma de U, para discutirem os assuntos pertinentes à aula.

terrestres, esfera e régua esférica de acrílico. Essas fichas são apresentadas nesse artigo com sub-item.

Pretendíamos desenvolver um método de pesquisa do tipo qualitativo com uma intervenção escolar em sala de aula. Em nossa intervenção, os alunos se enquadravam na faixa etária entre 13 e 16 anos.

Segundo Moyses (1997), é inegável que, falando para o outro, o aluno aprenda. Por um lado porque, ao tentar traduzir o seu pensamento, ele descobre que não tem, evidentemente, a mesma clareza do professor. Em virtude disso, ele acaba aprendendo, uma vez que tem que organizar o próprio pensamento, transformando-o em palavras. Por outro lado, porque contrapõe o seu pensamento com o do outro e, nessa contraposição, consegue perceber diferenças e semelhanças.

Em nosso projeto, as atividades foram desenvolvidas em grupo, porque acreditamos que a criança que não é capaz de fazer algo sozinha poderá ser auxiliada pelo adulto ou por alguém mais adiantado que ela (VYGOTSKY, 1998).

Lénárt (1996), educador matemático húngaro, em seu livro *Euclidean and non-euclidean geometries* inicia o primeiro capítulo com a discussão do problema do urso[3]; em seguida propõe construções sobre o plano e sobre a esfera, como no decorrer de seu livro. Preferimos modificar a maneira de apresentação feita por ele e utilizamos atividades baseadas no livro *O Pequeno Príncipe*, de Saint Exupery, para iniciar nossos alunos no conceito de Terra. A seguir, trabalhamos algumas atividades citadas em seu livro,

---

3 Esse problema pode ser considerado como um dos mais desafiadores, pois, sua resolução apresenta conceitos de geometria esférica, os quais o leitor verificará no decorrer do presente artigo. O enunciado do problema é o seguinte:*Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou por 100 km. Então virou novamente e caminhou 100 km ao Norte. Qual não foi a sua surpresa quando achou que voltara novamente para a sua casa. Qual é a cor do urso?*

invertendo o processo, iniciando pelo *Explore mais*, um tópico apresentado no final da atividade e, posteriormente, introduzindo a ficha de trabalho referente à linha reta.

Em seu artigo, Lénárt (1993), ao comentar sobre as suas primeiras impressões do “kit”[4] de Geometria Esférica, relatou que, quando levou esse material à sala, os alunos perguntavam se era aula de Geografia ou Artes. E ainda, como se é de esperar, colocavam a régua esférica em suas cabeças. Esse autor conclui que, depois de vasta experiência em sala de aula, os próprios professores haviam mudado suas estratégias e começado suas primeiras lições, pedindo aos alunos para colocarem as réguas sobre a cabeça.

E muitos professores também colocavam as réguas na própria cabeça e passavam-na para os alunos. Sentavam-se ao lado deles e lhes davam nome: “Você é um rei”, “um gato”, “um capacete”, ”menina com um laço na cabeça”, etc. Esse pequeno jogo, por um lado, ajudou o professor a criar um ambiente mais favorável à aprendizagem de significados matemáticos, pois, descontraía a sala de aula tradicional do ensino de Matemática. Por outro lado, foram construídos diversos significados sobre a forma geométrica esférica nas diferentes salas de aula.

Em nossa intervenção, não discutimos o conceito de semelhança de triângulos na esfera, embora não existam na esfera, porque os alunos ainda não haviam trabalhado com tal conceito no plano.

Discutiremos alguns dos conteúdos abordados em Geometria nos Ciclos do Ensino Fundamental. Observa-se, no plano curricular, já na 5ª série, a menção ao conteúdo de superfície esférica. Trabalhamos o conceito

---

[4] Esse consiste numa régua esférica e esfera de acrílico, um compasso esférico de plástico.

de ângulo relacionado com ângulo esférico. A seguir, apontaremos os conteúdos matemáticos que constam no plano curricular da escola estadual, onde realizamos nossa pesquisa.

5ª SÉRIE	✓ Identificar *ponto, reta e plano*. ✓ Caracterizar semi-reta e segmento de reta. ✓ Identificar *retas paralelas*, retas concorrentes e retas reversas. ✓ Identificar alturas de triângulos, paralelogramos e trapézios. ✓ Conhecer os *elementos de uma circunferência e de uma superfície esférica*.
6ª SÉRIE	✓ Desenvolver a noção de ângulo e de ângulo central através de experimentações e construções. ✓ Explorar o conceito de polígonos e suas propriedades. ✓ Reconhecer os lados, os vértices e os ângulos (internos e externos) como elementos de um polígono. ✓ Classificar triângulos e quadriláteros. ✓ Estabelecer relações entre lados e ângulos de um triângulo.
7ª SÉRIE	✓ Construir procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidade existente entre o número de lados e o de diagonais. ✓ Compreender o *conceito de congruência* e, em particular, de triângulos congruentes. ✓ Ampliar ou reduzir figuras planas, segundo uma razão, e identificar os elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área). ✓ Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.

De posse do plano curricular, tentamos observar se havia alguns conceitos com os quais poderíamos iniciar nossa pesquisa. Por exemplo, na quinta série, apareciam as expressões: "elementos de uma circunferência e de superfície esférica", "retas paralelas". Na sexta série, encontramos as "relações entre os lados e ângulos de um triângulo", como também "classificação de triângulos"; na sétima e oitava série, "verificar as propriedades de triângulos e semelhanças de triângulos". Desse modo acreditávamos que seria "permitido" usar esses elementos para fazermos uma aproximação com conceitos geométricos da Geometria Esférica. Porém, estávamos enganados; esses conceitos, ainda não tinham sido trabalhados. Assim, fomos verificar se os livros adotados pela escola possibilitavam desenvolver conceitos, como os de "grandes círculos". Observamos que eles não apresentavam o quinto postulado de Euclides e, mais uma vez, não encontramos formas de iniciar um trabalho para desenvolver conceitos sobre uma superfície esférica.

Encontramos uma abertura no currículo de Geografia. A professora dessa disciplina nos disse que seria muito proveitoso, se o professor de Matemática pudesse trabalhar os conceitos do sistema de coordenadas geográficas (latitude e longitude).

Descrição do trabalho em sala de aula

Formamos grupos de quatro alunos, totalizando, inicialmente, dez grupos. Apareceram nomes interessantes, tais como ART, DKP, os Ostras, os dragões da independência, etc.

Combinamos algumas regras para o convívio em sala de aula. O aluno Gustavo leu em voz alta o contrato de trabalho[5]. A leitura era interrompida para a discutirmos as dúvidas que surgiam entre os alunos.

O contrato de trabalho, segundo Cabral (1992) em nota de rodapé, apresenta:(...) é proposto como um conceito pedagógico que inclui o conceito de "contrato didático" que se refere especialmente à operação de ensino. É no contrato didático, segundo Chevallard, que se definem as negociações

[5] O leitor encontrará uma cópia do contrato de trabalho em Martos (2002).

que ocorrem entre as partes, professor e alunos, ao redor do conteúdo matemático: o que deve ser tematizado, como deve ser abordado, de que maneira deve ser cobrado e, efetivamente, o que deve ser cobrado.

Na leitura e discussão da ficha de trabalho 01[6], em que apareceu a discussão de como é a Terra, tínhamos como objetivo verificar que idéias os alunos tinham a respeito da Terra. A maioria das respostas giraram em torno de que ela é redonda e achatada nos pólos. Outros escreveram que, embora plana, é uma esfera achatada nos pólos. Alguns, ainda, escreveram que existem crateras em alto relevo. Observamos que o conceito de esfericidade apareceu na maioria dos casos. Muitas vezes os alunos substituíam a forma esférica por arredondada. Uma aluna fez a seguinte afirmação: "Na minha opinião, como um ser humano, particularmente eu acho que não como tantos, a Terra é oval, pois acho que ela não poderia ser redonda, pois lembrando que existe no lado inferior e exterior, os pólos."

A questão seguinte era: "Como você vê e imagina que seja a linha do Equador, os trópicos e meridiano de Greenwich?". As respostas variaram: para alguns alunos, é uma linha, marcações, ou apenas linhas; para outros, são linhas verticais e horizontais, ou separação climática da Terra, ou ainda circunferências achatadas nos pólos em forma de aliança.

Uma aluna escreveu e ilustrou, como mostra a figura a seguir:

---

[6] Sugerimos ao professor interessado nessa FT questionar os alunos: Por que a Terra é azul? Seria devido ao oxigênio ou à quantidade de água do planeta? Pode-se trabalhar com o professor de Ciências, integrando conceitos da Física.

A linha do equador talvez seja uma passarela "tipo rio ou rua mesmo" Ex:

Nessa atividade, trabalhamos também as concepções que tinham da Terra os egípcios, babilônicos e hindus. A atividade 1 também abordava a visão que o astronauta Yuri Gagarin teve da Lua. Os alunos acharam interessante a forma como os hindus imaginavam a Terra: uma tartaruga carregando um elefante, cujos movimentos causavam terremotos.

Uma aluna fez o seguinte relato:

> Não gostei dos babilônicos dizendo "a Terra era montanha oca... Situava-se o tenebroso e poeirento reino dos mortos. Porque a Terra não é bem assim, quem mora aqui é que dá o verdadeiro valor, pelas riquezas, minerais, petróleo, que existem. Lembrando da maravilhosa *Floresta Amazônica!*

Outros associaram a Terra a uma laranja, mas lembraram que os pólos são achatados. Uma aluna disse que não tinha idéia da linha do Equador no meio da Terra e nem imaginava como são os trópicos e os meridianos.

Alguns conceitos se mesclaram. Por exemplo, o aluno Daniel[7] afirmou que a Terra é uma circunferência e achatada nos pólos. O achatamento nos

[7] Os nomes aqui mencionados são fictícios, pois temos o objetivo de preservar o anonimato dos alunos.

pólos apareceu em quase todos as afirmações dos alunos. Outros fatores também se revelaram, como o fato de uma aluna não gostar de leitura.

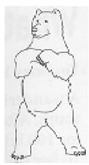
Muitos alunos disseram que nunca tinham pensado sobre as linhas imaginárias. Todos entregaram suas fichas com o resultado do trabalho do dia. Fazíamos a correção e, se necessário, recomendações. Isso serviria para o aluno perceber em que havia se equivocado e para determinarmos o ponto de partida da aula seguinte.

Solicitamos aos alunos que avaliassem essa atividade, apontando os aspectos negativos e positivos. Suas opiniões se resumiram em “interessante”, “legal”; apareceram outras bem estruturadas, como "Aulas em grupos são mais dinâmicas." Porém, existiram afirmações do tipo: "Não gosto da matéria, geometria, é muito complicada".

Atividade 1. Qual é a cor do urso?

Essa ficha proporcionou aos alunos uma discussão acirrada acerca das questões do caminho realizado pelo urso. Nos grupos, os alunos faziam suas conjecturas e discutiam as possibilidades de diversos caminhos para ele. Os alunos se expressavam da seguinte maneira: “Se ele partir daqui e andar 100 km para cá e depois virar, ele voltará no local de origem?” A situação problematizadora era a seguinte:

> Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou por 100 km. Então virou novamente e caminhou 100 km ao Norte. Qual não foi a sua surpresa quando achou que voltara novamente para a sua casa. Qual é a cor do urso?



O grupo *Dragões da Independência* (DDI) estava um tanto desarticulado: enquanto Gustavo e Felipe discutiam a atividade , Leonardo e

Norberto faziam brincadeiras e conversavam alto, atrapalhando os demais colegas. Gustavo comentava que o urso morava no sul; ele iria andar e voltar para lá. Mas ainda tinha dúvidas e perguntava para Felipe: ”Mas será que se ele morasse em qualquer lugar do globo, ele voltaria ao mesmo lugar?” Felipe dizia que existem duas possibilidades de partida do urso; apontando para esfera, ele explicava: "Se ele sair do pólo sul e andar nesta direção — apontando a direção descrita na atividade — ele voltará ao mesmo lugar". Gustavo interrompeu, dizendo que não iria voltar, e Felipe continuou: “Não existe somente urso polar, existe o panda “.

Após discussão, um dos integrantes foi para o grupo da direita, e um dos integrantes deste grupo passou para o grupo seguinte, ocorrendo, assim, sucessivamente com os demais grupos. O objetivo dessa dinâmica é fazer com que todos os alunos possam trocar idéias a respeito da discussão em grupo. O grupo LM funcionou com a dinâmica do grupo “painel integrado[8].

Na atividade do urso, pudemos observar que retas paralelas não existem na esfera. Também pudemos notar que, no plano euclidiano, o urso nunca poderá chegar ao local de onde partiu, mas na esfera isso é possível. Quando o urso viaja no plano, o desenho apresenta três lados de um quadrado.

Essa mesma atividade feita com professores, em um encontro de Educação Matemática, possibilitou que os mesmos discutissem a respeitos dos elementos de um triângulo, catetos e hipotenusa. Os professores argumentaram que no plano, ao realizar o percurso, o urso não voltaria ao

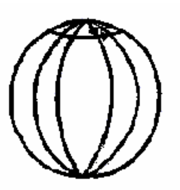
[8] Segundo Andreola (2002), essa dinâmica consiste na distribuição de colegas de um grupo ao outro. Por exemplo, pede-se a um dos integrantes de determinado grupo que se dirija ao grupo da direita e discuta com se deu o desenvolvimento da atividade do dia e, assim, sucessivamente. Tal dinâmica teve como objetivo uma interação maior entre os grupos, para que observassem as diferentes visões de mundo.

local de saída, a menos que caminhasse pelos catetos, o que não poderia ser feito.

Encontramos na literatura outros enunciados, como o seguinte:

> Um caçador saiu de um determinado ponto da terra, andou 3 km para o sul, depois 3 km para o leste e aí matou um urso. Tendo carregado o urso 3 km para o norte descobriu que havia chegado ao seu ponto de partida. Qual é a cor do urso que ele matou? (LAMPARELI et al.,1975, p. 21).

Vejamos com se dá a representação na esfera:



Algumas fichas de trabalho continham texto. Solicitamos aos alunos que sublinhassem os vocábulos desconhecidos e procurassem no dicionário os significados adequados ao contexto.

Após questionamentos e discussões, alguns grupos concluíram que o urso era branco, pois ele é do pólo norte.

Propusemos as seguintes atividades:

1) Esboce sobre a folha de sulfite uma viagem do urso. Comente com os colegas de seu grupo as conclusões a que vocês chegaram e anote-as abaixo:

A resposta foi: "A conclusão a que chegamos é que a casa do urso é posicionada ao Norte. Se ele sair do norte, ir para o sul, seguir para o oeste e voltar para o norte, ele formará um triângulo e chegará novamente em sua casa".

Apontando para o globo, um grupo fazia conjecturas, utilizando a régua esférica, e afirmava que, se ele tivesse saído da encruzilhada com a Linha Imaginária de Greenwich com a do Equador, ele também teria chegado ao mesmo lugar. Quando perguntamos se o urso poderia viver no clima tropical da linha do Equador, o grupo respondeu prontamente que é impossível.

2) É possível para um urso chegar ao mesmo lugar em que ele iniciou uma caminhada como a descrita acima?

Tivemos respostas, como: "Sim, porque a Terra é redonda, isto é, se ele sair de um lugar e andar em linha reta ele vai chegar ao mesmo ponto".

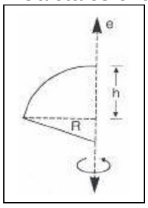
Observe que o aluno atribuiu significado à esfericidade da Terra e não se ateve às medidas propostas pelo problema. Um outro aluno disse que dependia, porque, se ele fosse acostumado a viver no lugar, iria saber voltar, caso contrário, não saberia. Acreditamos que este aluno se encontra na fase dos complexos, pois Vygotsky (1999, p. 76) afirma que "(...) em um complexo, os objetos isolados associam-se na mente da criança não apenas devido às impressões subjetivas da criança, mas também *devido às relações que de fato existem esses objetos*"(grifos do autor).

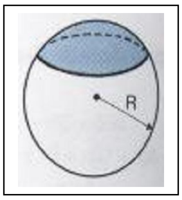
Muitos professores não permitem o diálogo em sala de aula, como argumenta Mendonça, (1993, p.37): "(...) quase não há diálogo na sala de aula de Matemática. Na maior parte do tempo, o professor fala e os alunos ouvem-quando ouvem! O papel do professor tem sido falar aos alunos sobre as relações da matemática, ou seja, tentar impô-la a eles, sobre o seu conhecimento e o deles".

Foi possível observar que nos diálogos eram efetuadas trocas de significados matemáticos entre os membros dos grupos. Isso proporcionou um desenvolvimento de significados matemáticos a partir de "generalizações socialmente elaboradas"[9] nos grupos de trabalho. Nessa aula, foi feita a discussão final da ficha de trabalho anterior sobre o urso. Alguns alunos apontaram a hipótese de o urso morar no Equador, mas não foi aceita pelos demais. Os colegas disseram que seria impossível um urso se adaptar próximo à linha do Equador, pois, nessa parte da Terra, o clima, por ser tropical, dificultaria a sua sobrevivência.

A classe, em sua maioria, chegou à conclusão de que a resposta correta seria o pólo norte. Um dos grupos, inicialmente, disse que, se a distância fosse a mesma, o urso teria grande possibilidade de chegar ao local de início. Após discussão com o grupo, verificaram que isso não era tão relevante quanto pensavam. Finalizamos a aula, explicando que isso ocorria devido a uma propriedade da calota esférica #, a qual permite que se percorra parte dela pelas linhas imaginárias do meridiano de Greenwich, e em seguida, por uma das latitudes, tornando possível voltar ao local de origem.

Calota esférica: É a parte da esfera gerada do seguinte modo:





A área da calota esférica é dada por: $\boxed{S=2\pi Rh}$

---

[9]Segundo Leontiev (1978, p. 85-119), o conhecimento do homem "em geral, distingue-se fundamentalmente do intelecto dos animais porque só ele pode aparecer e desenvolver-se em união com o desenvolvimento da consciência social. Os fins da ação intelectual no homem não são apenas sociais por natureza; vimos que os modos e os meios desta ação são igualmente elaborados socialmente. Por conseqüência, quando aparece o pensamento verbal abstrato, ele não pode efectuar-se a não ser pela aquisição pelo homem de generalizações elaboradas socialmente, a saber os conceitos verbais e as operações lógicas, igualmente elaboradas socialmente”.

Atividade 2. A gota d'água

O nosso objetivo com essa ficha foi criar aproximações de significados entre modelos da Geometria Plana e Geometria Esférica, para que os alunos pudessem identificar uma linha reta tanto na esfera quanto no plano. Assim, utilizamos bexigas de uso comum para festas e sugerimos a possibilidade de se obter uma melhor aproximação.

Esclarecemos que usamos a bexiga no intuito de mostrar para o aluno que na superfície curva, a reta se transforma e gera formas curvas, como o triângulo esférico, que tem propriedades distintas das do plano.

Como de costume, percorríamos os grupos para satisfazer os chamados e esclarecer suas eventuais dúvidas. Aos alunos foi apresentado a seguinte questão: "Coloque uma gota d'água no topo de sua esfera e descreva o caminho da gota d'água. O que você observou? Anote tudo com detalhes".

Um dos grupos verificou que a água descrevia uma linha reta. Os integrantes tiveram dificuldades em descrever os pontos cardeais, pois não recordavam os nomes dos pontos localizados entre o norte e o oeste e entre o sul e o sudeste. Uma das integrantes lembrou que os pontos são sudeste e noroeste. Isso aconteceu no final da aula, não sendo possível chegar a maiores conclusões. Portanto, dissemos que, na aula seguinte, retomaríamos a questão.

O grupo Franmi falou que estava gostando de manipular os materiais, e que, apesar de não gostar de Geometria, estava achando as aulas muito interessantes.

Na aula seguinte, continuamos com a discussão da atividade anterior. O relato de um dos grupos foi seguinte: "Colocamos uma gota e ela nem sequer se mexeu, colocamos mais sete gotas, formou-se uma gota maior que desceu em linha reta e parou do outro lado da esfera à 180 graus do ponto de partida da gota d’água, e depois rodamos a esfera e vimos que a água se espalhou na mesma direção pelos 360 graus pertencentes à esfera." Concluímos nesse relato que o grupo já possuía o conceito de ângulo e se encontrava nos Complexos do tipo pseudoconceitos[10], pois, ao discutir a questão 3, observou que havia semelhanças e se expressou da seguinte forma: "tem tudo uma semelhança, pois, fazendo a reta na bexiga ela também desaparecerá tornando uma linha imaginária".

O significado se dava de diversas maneiras. Um dos grupos descreveu: "Depende da posição em que estamos, pois, para mim e para a Milene, a gota foi para o leste e para a Monique e Michelle foi para o sul. Duas integrantes do nosso grupo acham que a gota d’água foi para o sul, devido à direção em que estão. Porém as outras duas acham que foi para o leste por estarem do lado ao contrário.

Percebemos que as respostas de um determinado grupo se assemelhavam ao “complexo do tipo associativo”, quando o mesmo afirmou que a água do norte escorreu para o sul, dando quase uma volta inteira na esfera, semelhante à história do Pole, que circundou toda a esfera.

Mendonça (1993) afirma que

---

[10]Segundo Vygotsky (1999), os *pseudoconceitos* são o elo de transição entre o pensamento por complexos e a verdadeira formação de conceitos. É nessa fase que o conceito tende a ficar mais forte.

> (...) cabe ao professor inicialmente, encaminhar uma problematização com questões que argumentem sobre a busca de um problema semelhante do ponto de vista da matemática, gerado em outro contexto. Uma vez localizado o problema, estender o diálogo para interpretar o modelo matemático estudado no primeiro problema, na linguagem do segundo[11].

Ainda sobre a atividade citada acima, sobre o percurso da gota d' água o grupo MHK idealizou a rosa dos ventos no topo da esfera. Seus integrantes imaginaram que, olhando de cima para baixo, teríamos os pontos cardeais e descreveram a questão 1 minuciosamente; disseram que foram pingadas 5 gotas no topo da esfera e notaram que as gotas caíam ao nordeste da esfera, ficando marcada uma reta pelos pingos d'água.

A seguir, os alunos discutiram a questão 3: "Compare os resultados que você obteve nas questões 1 e 2 com os seus colegas do grupo ao lado e anote abaixo as diferenças."

As alunas observaram o aumento do tamanho da reta com que formaram os triângulos. Verificamos que as alunas não haviam exposto os conceitos necessários na atividade citada. Então, escrevemos um bilhete questionando-as sobre as outras diferenças, que haviam sido entregues na aula posterior. Utilizamos os bilhetes na mesma perspectiva de Leme (1995): como diálogo entre o professor e o aluno.

O grupo Franni & Lêkebler nos chamou para conversar. Duas integrantes estavam descontentes com o grupo, pois estavam encontrando dificuldades de interação. Os outros dois integrantes não estavam produzindo e elas estavam se sentindo injustiçadas por perderem pontos. Como faltavam

---

[11] A esse procedimento Mendonça denominou " Processo de desencadeadores de problematizações do tipo Analogia".

apenas 5 minutos para terminar a aula, comunicamos que reuniríamos o grupão para resolver o impasse.

Ainda com relação à essa atividade, os grupos fizeram os seguintes relatos:

- ✓ *Os triângulos aumentaram de tamanho e as retas que estão no topo da bexiga ficaram curvas e as outras ficaram retas.*
- ✓ *Reta: ao encher o balão, a reta se expandiu e a cor ficou mais clara. O triângulo: o triângulo ficou maior e sua cor também ficou clara. Isso significa que uma forma geométrica ganhando elasticidade se expande.*
- ✓ *Nós observamos que os triângulos tanto no tamanho quanto na largura, e as retas ficaram mais compridas. Os triângulos só aumentaram de tamanho e as retas ficaram um pouco tortas.*
- ✓ *Notamos que conforme a bexiga se encheu, os riscos aumentaram tanto na largura como na grossura e, assim, deu para observar os erros da caneta. Também notamos que, por causa da bexiga ser oval, os riscos entortaram em certos pontos.*
- ✓ *Observamos que as semi-retas feitas na bexiga vazia ficaram maiores. As retas foram do norte ao sul da bexiga, quase o mesmo que a água da esfera. E os triângulos ficaram maiores quase o mesmo que o caminho do urso. Esses triângulos pareciam o caminho que o urso fez para retornar para sua casa, na atividade em que discutimos o problema do urso.*
- ✓ *Obtivemos o mesmo resultado entre os dois grupos, apenas na parte oval da bexiga as retas formaram curvas. Ao fazer o triângulo, vimos que suas retas formaram curvas. As semelhanças entre a gota d'água e a bexiga é que os dois formam curvas.*

- ✓ *A gota de água fez o mesmo caminho que uma reta. Nós observamos que alguns integrantes do outro grupo também acharam que dependia do ângulo que estavam, que cada pessoa via de um jeito.*
- ✓ *Na questão n. 1, a água do grupo ao lado escorreu somente de um lado, ao contrário do outro grupo, em que a água escorreu em duas direções, ao mesmo tempo com uma maior quantidade de água. As outras anotações foram semelhantes.*
- ✓ *Desenhando um triângulo na bexiga já cheia, observamos que o triângulo fica em forma arredondada.*

Vygotsky (1997, p. 124) afirma que “Os motivos para escrever são mais abstratos, mais intelectualizados, mais distantes das necessidades imediatas. Na escrita somos obrigados a criar a situação, ou a representá-la para nos mesmo. (...) traços da linguagem escrita explicam porque os eu desenvolvimento na criança em idade escolar fica muito atrás daquele da fala oral”.

Um dos grupos observou que, dependendo do lado da “bola," (assim eles se referiam à esfera) a gota descerá em ângulos diferentes e também percorrerá direções diferentes como do norte ao sul, de leste ao oeste. Aqui o grupo teve a mesma percepção do MHK, que colocou os pontos cardeais no topo da esfera.

Atividade 3. Você pode desenhar linha reta na esfera? (parte A)

Nessa aula, a classe formou o grupão[12] para resolver o problema do grupo apresentado na aula passada. Alguns alunos falaram em dar chances para os dois meninos entrarem no ritmo de trabalho. A maioria sugeriu que o grupo se dividisse em duas partes. Porém, ficou decidido que eles fariam parte dos grupo chamado DKP, que tinha apenas três integrantes, desde que produzissem. O grupo então passou a contar com cinco alunos.

Sugeriu-se que o assunto fosse resolvido na Diretoria, já que estavam acostumados com esse procedimento. Explicamos que resolveríamos o caso no grupão, pois formávamos um grupo social e estávamos ali para estabelecer regras de conduta entre nós. E o que fosse decidido ali seriam as nossas regras.

Retomamos a atividade do dia. A ficha de tarefa foi elaborada para se investigar qual a concepção de distância mais curta no plano e na esfera. O leitor poderá observar que essa atividade foi designada por *Ficha tarefa*, cujo objetivo era sistematizar[13] o conceito de linha reta na esfera.

Inicialmente foi perguntado: "Você pode desenhar linha reta sobre a esfera?" Um dos grupos respondeu que não, argumentando que ela ficaria uma curva. Outros, porém, responderam que poderiam e tomaram como exemplo a gota d'água que desceu em linha reta na FT anterior.

Segue o que era pedido na atividade citada:

---

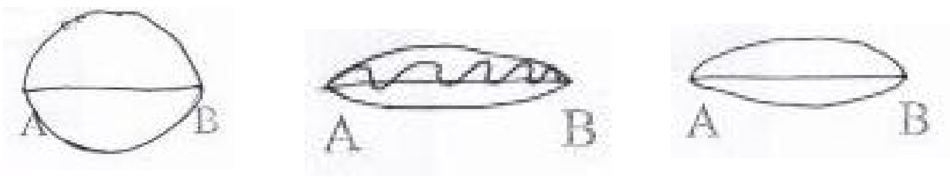
[12]A formação do "grupão" se deu da seguinte maneira: os alunos arrumavam as carteiras em forma de U, de modo que cada um poderia ver o rosto do outro, para se discutirem as questões inerentes à sala de aula.

[13] Estamos entendendo a sistematização segundo Bueno (1996), sistematizar: v.t. Reduzir a sistema, reunir num corpo de doutrina; agrupar. Esperávamos assim, que nesse momento da aprendizagem, os alunos agrupassem os significados produzidos até então.

1)Desenhe dois pontos diferentes no plano. Chame-os de A e B.

A *B*

2) Ligue os pontos A e B com 3 linhas ou curvas diferentes.



As figuras acima mostram desenhos feitos pelos alunos

Nessa ficha, os alunos, em sua maioria, responderam que a distância mais curta é a linha reta. "A reta é menor que as curvas e sempre o caminho mais curto, se andarmos reto chegaremos primeiro se andarmos em curva iremos andar mais.

Eles também notaram que a linha reta é a mais curta, e as curvas possuem milímetros a mais, pois, ao fazer a curva, o barbante fica um pouco mais extenso.

A atividade citada era a seguinte:

Construção na Esfera

1. *Desenhe dois pontos diferentes, usando a régua esférica. Chame-os de A e B.*
2. *Estenda um pedaço de barbante sobre a esfera para achar a distância mais curta entre eles.*

O grupo adição + (positiva) concluiu que a linha reta é mais curta.

Segundo ele, a curva dá uma voltinha e fica milímetros mais longa.

Os *Dragões da Independência* compararam seus resultados. Gustavo comparou com Felipe, dizendo: "Meça a sua curva e depois você estica o barbante. "A linha reta fica mais comprida ou não?"—perguntou. Felipe fez a medição e constatou que a reta fica mais curta. Ao responderem a questão nº 3: "Use um barbante para mostrar que você realmente desenhou a distância mais curta", eles notaram que a reta é menor que as curvas e é sempre o caminho mais curto. “Se andarmos reto, chegaremos primeiro; se andarmos em curva, iremos andar mais”.

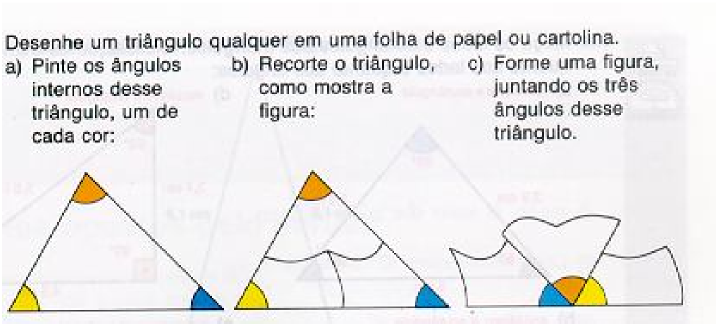
Atividade 3. Você pode desenhar linha reta na esfera? (Parte B)

Nessa atividade tínhamos o intuito de observar se os alunos eram capazes de utilizar a régua esférica e fazer comparações sobre a reta no plano, além de trabalhar o conceito de grande círculo. Assim, apresentamos a seguinte questão: "Selecione também dois fios pautados com sua régua esférica e tente alinhar com sua linha na esfera. O que você observa? Anote suas observações". Apareceram nas respostas,“grande círculo e triângulo”. Acreditamos que o aluno, ao tomar contato com grande círculo, estará construindo significado para tal expressão, uma vez que discutirá com o grupo, formando, assim, seu significado. Ocorreu, em alguns grupos, a construção de triângulos: "Nós observamos que formou uma reta e se puxarmos duas linhas do ponto A e do ponto B para o pólo formará um triângulo".

A partir da atividade em que propúnhamos ao aluno desenhar uma linha, com o auxílio da régua esférica, sobre a esfera, estendendo-a continuamente, de modo a percorrer um grande círculo, pretendíamos que ele percebesse que a linha retornava ao mesmo ponto de partida. Ao perguntarmos que impressões tiveram, alguns grupos associaram ao caminho seguido pelo Pole como também ao feito pela gota d'água sobre a esfera. Baseando-nos em leituras de Vygotsky sobre conceitos, percebemos que os grupos estavam na fase de "pensamentos por complexos" do tipo “associativo”. Segundo Vygotsky (1999) o complexo do tipo associativo é caracterizado quando a criança agrupa objetos de preferência com a mesma cor ou forma semelhante, ou ainda, constrói um grupo de objetos que de alguma forma tenha lhe chamado a atenção. Nessa mesma atividade, um outro grupo teve a impressão de que era uma linha curva (em comparação à linha reta no plano euclidiano), devido à causa da forma geométrica do mundo. Um outro grupo argumentou: "A linha deu a volta na esfera e formou um círculo, e podemos comparar a linha com a linha do Equador." Percebemos, de acordo com Vygotsky, que esses grupos estão na fase de "pensamento por complexos" do tipo "pseudoconceitos", conforme Oliveira (1993); Van der Ver (1996); Martos (2002).

Atividade 4. Usando o transferidor

No início da aula, para verificar se os alunos lembravam, perguntamos: "Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?" Nenhum dos grupos soube responder. Então pedimos que fizessem triângulos de tamanhos diferentes, recortassem, rasgassem seus ângulos e os medissem. Veja a descrição da atividade abaixo. Os alunos constataram que em todos os tipos de triângulo dava 180 graus. Como a maioria dos grupos não sabia medir ângulos usando o transferidor, fomos de grupo em grupo, ajudando-os a medir os ângulos.



O grupo chamado *Os ostras* não conseguia avançar. Dirigimo-nos ao grupo, pedimos a um integrante que lesse as instruções de aula e permanecemos junto, incentivando seus passos. Isso ilustra o que Vygotsky chama de Zona de Desenvolvimento Proximal.

O grupo *DDI* estava bastante disperso, pois, nesse dia, no colégio, estava acontecendo um campeonato interclasse e os alunos, na aula anterior, participaram da modalidade futebol masculino. Esse grupo se ateve em fazer apenas os triângulos, sem medir seus ângulos e, em meio à aula, preocupavam-se mais em comentar os jogos do campeonato.

Na atividade de construção de triângulos, alguns grupos relacionaram os triângulos esféricos aos triângulos planos. O grupo @migas apontou as propriedades dos triângulos no plano. A atividade solicitada era apenas que calculassem a soma das medidas dos ângulos internos. Porém, o grupo foi além e discutiu se os triângulos eram isósceles, escalenos ou retângulos. Percebemos aqui que as alunas do grupo já estavam na fase dos “conceitos potenciais”, especificamente, na dos “conceitos científicos”. Nessa atividade, as alunas puderam desenvolver sua zona de desenvolvimento proximal, em que seu nível de desenvolvimento real teve possibilidade de avançar para o

Nível de Desenvolvimento Potencial.

Continuando as atividades do dia, comunicamos que os grupos deveriam expor as impressões que tiveram dessa ficha de trabalho, relacionando-a com a anterior. Fizemos o seguinte encaminhamento:

- ✓ *A soma da medida dos ângulos internos é maior, menor que 180 graus, ou é igual?*

Em seguida, propusemos a atividade 2: "Para esta atividade você precisará usar bexigas. Faça um triângulo em sua bexiga, usando a canetinha. Em seguida meça os ângulos internos desse triângulo. Qual é a soma das medidas de seus ângulos? Descreva seu procedimento para eles". Os alunos responderam: "Colocamos o transferidor em cima da bexiga e suas medidas deram 180 graus".

Continuando a ficha, pedimos que o aluno enchesse a bexiga de ar, medisse os ângulos internos desse triângulo e observasse se eles permaneciam iguais.

- ✓ *Quando o triângulo é representado numa esfera, a soma das medidas de ângulos será maior que 180 graus.*
- ✓ *Enchemos a bexiga e medimos o triângulo, e deu 210 graus e observamos que seus ângulos aumentaram e ficaram arredondados.*

E ainda "O que você achou mais interessante na aula de hoje? Justifique a sua resposta".

- ✓ *Eu gostei da aula de hoje porque desenhamos em uma bexiga um triângulo e depois medimos seus ângulos internos e anotamos na ficha de trabalho o que observamos. (a soma das medidas dos ângulos do triângulo eram de 180 graus).*

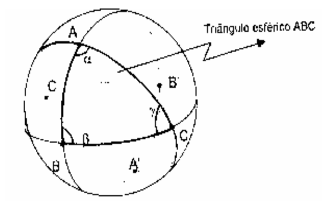
Os grupos confeccionaram um transferidor, que consistia em um círculo de papel subdividido em 360 partes e, com o auxílio desse instrumento, percorremos os grupos, explicando para os alunos como medirem os ângulos. Alguns grupos já estavam trabalhando independentemente. Cabe ressaltar aqui que alguns grupos já assimilaram o que era o trabalho em grupo; outros ainda tinham muitas dificuldades.

As questões da aula giraram em torno da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo plano e esférico. O grupo LM fez as medições e os alunos constataram que a soma na esfera é maior que 180 graus.

O grupo das @migas observou que, na esfera, os ângulos poderiam se diferenciar, mas a soma sempre seria maior que 180 graus; os triângulos que fizeram variavam de 240 graus a 270 graus.

No final dessa aula, usamos uma técnica de relato diferenciada. Os grupos que desejassem poderiam apresentar suas conclusões à frente para os demais colegas; alguns expuseram suas idéias. Observamos que ficaram bem claras, para eles, as diferenças entre a soma dos ângulos internos de um triângulo plano e a de um triângulo esférico.

O grupo @migas observou que o círculo máximo, ao passar pelo Equador em qualquer ponto, medirá 90 graus.



Um exemplo da forma como pode ser desenhada sobre a esfera, mas não pode sobre o plano, é o triângulo esférico com dois ângulos retos.

E ainda na esfera, o menor triângulo possível tem 3 vértices no mesmo grande círculo que se encontra no topo de outros dois. Esse triângulo degenerado tem dois ângulos de 0 grau e outro medindo 180 graus; portanto, a soma das medidas dos ângulos internos é 180 graus.

Essas formam algumas de nossas atividades desenvolvidas com os alunos, discutir cada atividade tornaria o artigo muito extenso e, por fim, apresentaremos nossas considerações finais.

Considerações Finais

Em várias ocasiões ficou evidente que a comunicação no grupo era fator indispensável para o desenvolvimento das fichas de trabalho; conseqüentemente, o processo de aprendizagem ali se iniciava.

Assim, este estudo possibilitou-nos uma reflexão de nossa prática. Constatamos que os alunos se sentem motivados a desenvolver as atividades propostas, quando percebem que suas opiniões são ouvidas. Notamos que a aprendizagem dos conceitos geométricos, se deu a partir de um diálogo estabelecido pelo grupo e por nós.

De um modo geral, aluno e professor deveriam privilegiar o processo dialógico — em vez da competição — como é comum nas nossas salas de aula de Matemática.

As atividades que utilizavam a manipulação de materiais concretos foram bem aceitas pelos alunos. Eles faziam aferições na esfera e comparavam tais medidas no plano. Não estamos defendendo a idéia de que o aluno tenha que se limitar a manipulações, mas sim, que deva partir delas para depois iniciar a teorização, ou seja, iniciar as construções de modo intuitivo, via-experimentação para, posteriormente, constituir os conceitos.

Concluímos que um trabalho interdisciplinar, relacionando conceitos geométricos esféricos com conceitos geográficos, possibilitaria desenvolver um aprendizado significativo numa oitava série.

Referências bibliográficas

ANDREOLA, B. A. *Dinâmica de grupo: Jogo da vida e didática do futuro*. 22 ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

BALDINO, R. R.; CARRERA DE SOUZA, A. C. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. In: *RESUMO Técnico: relatório do sistema diretório dos grupos de pesquisa no Brasil*. Rio Claro: UNESP, IGCE, CNPq, 1997.

CABRAL, T. C. B. *Vicissitudes da aprendizagem em um curso de cálculo: v. delta*. 1992. 212 p. Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentais Filosóficos-Científicos) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LAMPARELI, L. C. *Matemática para o 1. grau*. 2. ed. São Paulo: Edart, 1973.

LÉNÁRT, I. *Euclidean and non- euclidean geometries*. Berkeley: Keypress Academy, 1996.

LÉNÁRT, I. Alternative models on the drawing ball, educational studies. *Mathematics Teacher*, v.24, p. 277-312, 1993.

MARTOS, Z. G. Utilizando Materiais Didático Pedagógico para a aprendizagem de geometrias não-Euclidianas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO, 6, 2000, Londrina. *Anais...* Londrina: UEL, 2000. p. 210 (Mini Curso).

MARTOS, Z. G. *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental.* 2002. 147 p. Dissertação (Mestrado). Rio Claro: IGCE.

MENDONÇA, M.C.D. *Problematização: Um caminho a ser percorrido em Educação*. 1993. 307 p. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

MOYSES, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

OLIVEIRA. M. K. Vygotsky e o processo de conceitos In: LA TAILLE, I. *Piaget, Vygotsky, Wallon:* Teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Sumus, 1992.

OLIVEIRA. M. K. O problema da afetividade em Vygotsky In: LA TAILLE, I. *Piaget, Vygotsky, Wallon:* Teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Sumus , 1992.

ONRUBIÁ J. Enseñar: crear zonas de desarrolo próximo e intervenir en ellas. In: COLL, C. et al. *El construtivismo en el aula*. Barcelona: Graó, 1993.

VAN DER VER, R.; VALSINER, J. *Vygotsky : uma síntese*. Loyola, 1996.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes, 1997.