Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización

Nilda Etcheverry[*], *Norma Evangelista*[**]; *Marisa Reid**, *Estele Torroba** e *Mónica Villareal*[***]

Resumen: El presente trabajo incursiona en la conjunción tecnología-educación matemática. Presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios al trabajar en un ambiente computacional con una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización y la experimentación. Se reportan observaciones que muestran características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente en el cual se llevó a cabo la experiencia y algunas conclusiones vinculadas con los objetivos de este estudio referidos a la descripción y análisis de: 1) las relaciones profesor-alumno-conocimiento matemático en un ambiente computacional y 2) el papel de la computadora como agente motivador y promotor de cambios en el abordaje de algunos tópicos de Matemática, en este caso particular, de las cónicas.

Palabras-claves: visualización, experimentación, cónicas, computadora.

Fomentando a discussão através da experimentação e da visualização num ambiente computacional

Resumo: Este trabalho refere-se à conjunção tecnologia-educação matemática. Apresenta o relato de uma experiência desenvolvida com estudantes universitários, ao trabalharem num ambiente computacional com uma proposta didática diferenciada, baseada na visualização e na experimentação. São reportadas observações que mostram características do trabalho realizado pelos estudantes e docentes no ambiente em que foi realizada a experiência e algumas conclusões vinculadas aos objetivos

[*] Professora Adjunta na Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina.
[**] *Jefe de Trabajos Práticos* na Facultad de Ciencias Exactas e Naturales. UNLPam. Argentina.
[***] *Jefe de Trabajos Práticos* na Facultad de Ciencias Agropecuarias. UNCórdoba. Argentina.

deste estudo, referentes à descrição e análise de: 1) as relações professor-aluno-conhecimento matemático num ambiente computacional e 2) o papel do computador como agente motivador e promotor de mudanças na abordagem de alguns tópicos de Matemática; neste caso particular, as cônicas.

Palavras-chave: visualização; experimentação; cônicas; computador.

Fostering discussions in a computer environment through experimentation and visualization

Abstract: This paper refers to the conjunction of technology and mathematics education. It presents an experiment developed with college students while working in a computer environment, employing a didactic approach based on visualization and experimentation. The observations reported show the characteristics of the work done by students and teachers in the computer environment. The conclusions address the aims of the study, which were to describe and analyze (1) the relationships between teacher, student and mathematical knowledge in a computer environment, and (2) the role of the computer as a motivator and promoter of changes in the study of some mathematical topics, such as conic sections, as in this particular case.

Key words: visualization, experimentation, conic sections, computer.

Introducción

El presente trabajo incursiona en la conjunción tecnología-educación matemática. Presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios al trabajar en un ambiente computacional con una propuesta didáctica diferencial basada en la experimentación y la visualización. Esta experiencia fue el escenario para desarrollar, también, un trabajo de investigación del cual mostramos aquí algunos episodios y cuyos objetivos son describir y analizar:

1. Las relaciones profesor-alumno-conocimiento matemático al trabajar en un ambiente computacional a partir de un nuevo abordaje de contenidos matemáticos iniciados en niveles anteriores.
2. El papel de la computadora como agente motivador o promotor de cambios en la forma en que algunos tópicos de matemática, poco explorados o estudiados en el aula, son o pueden ser abordados.

El empleo de la tecnología en la educación en general y en la Matemática en particular es visto como positivo y hasta necesario, sin embargo, en el país donde fue desarrollado este estudio es frecuente encontrar propuestas educativas con escasas reflexiones de tipo epistemológico, psicológico, curricular, organizacional y administrativo. En este sentido, el presente trabajo contribuye con algunas reflexiones en torno a una propuesta particular.

Refiriéndose al diseño de propuestas pedagógicas que acompañan el empleo de los recursos informáticos, Noss (1998) señala que: *"Es el conocimiento el que determina el diseño, tanto como el diseño el que determina el conocimiento"* (p. 11). Así, el modo en que una propuesta esté diseñada condiciona la manera en que un determinado conocimiento se ha de trabajar en el aula, produciendo, al mismo tiempo, modificaciones en la propia dinámica de las clases de Matemática (BORBA, 1997; NOSS; HOYLES, 1996). Al trabajar en un ambiente computacional con abordajes no tradicionales, con el planteo de problemas más abiertos que admiten diversos abordajes para su resolución, con intervenciones del profesor como guía y auxilio y dejando que los estudiantes sigan sus propios caminos de exploración, dos procesos son favorecidos: la visualización y la experimentación.

Por visualización entendemos el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. La visualización es empleada con el objetivo de estimular el proceso de descubrimiento matemático a fin de conseguir una mayor comprensión matemática (ZIMMERMANN; CUNNINGHAN, 1991, p.1-8).

La experimentación está intrínsecamente ligada al empleo de recursos tecnológicos que permiten que los estudiantes realicen conjeturas matemáticas basadas en las exploraciones efectuadas individual o grupalmente. El trabajo experimental armoniza con los medios informáticos si se aprovechan las ventajas que ellos brindan. Tales ventajas están vinculadas con una amplia posibilidad de experimentar, de visualizar, de realizar cálculos con rapidez, de generar gran cantidad de gráficos en poco tiempo y de coordinar de forma dinámica representaciones algebraicas, tabulares y gráficas, desafiando la hegemonía de lo algorítmico y lo algebraico que caracteriza la enseñanza matemática tradicional.

En las siguientes secciones describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó de la experiencia, las tareas propuestas, el software utilizado y la forma en que se registraron las actividades desarrolladas por el grupo de estudiantes para su posterior análisis. Describiremos en detalle lo ocurrido en tres de los cuatro encuentros que se realizaron con los estudiantes y reportaremos algunos episodios que nos brindan elementos para reflexionar acerca de algunos aspectos vinculados con los objetivos de investigación que mencionáramos anteriormente.

Los participantes y la tarea propuesta

Sobre la finalización del curso de la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Profesorado de Matemática y Profesorado de Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (Universidad

Nacional de La Pampa), se invitó a un grupo de alumnos a participar de una experiencia didáctica a ser desarrollada en un ambiente computacional en el cual se utilizaría el software *Derive 5*. Este software fue seleccionado por ser de fácil manejo, no requerir de conocimientos previos de computación o programación y posibilitar el tratamiento de los contenidos matemáticos propuestos.

La propuesta didáctica tenía como objetivo estudiar las gráficas de algunas cónicas, analizando cambios en las representaciones gráficas a partir de variaciones en los parámetros *A*, *B*, *C*, *D* y *E* de la expresión algebraica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Seis alumnas aceptaron participar de la experiencia. Cuatro cursan la carrera de Profesorado en Matemática y dos el Profesorado en Computación. Ellas son: Florencia, Nancy, Laura, Paula, Anahí y Ana con edades entre 18 y 20 años. La experiencia se realizó en julio de 2002. En ese momento, las estudiantes ya habían estudiado cónicas al inicio del curso de Análisis Matemático I y conocían, por ejemplo, como pasar de la ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a la forma canónica de cada una de las cónicas que representa. El abordaje de este tema había sido realizado sin el empleo de computadoras[16].

Se decidió realizar la experiencia con un grupo pequeño para que las docentes responsables de la investigación pudieran observar detenidamente y comprender las estrategias usadas por las estudiantes. Las responsables del desarrollo de la propuesta didáctica fueron dos docentes-investigadoras que están a cargo de la cátedra de Análisis Matemático I. Para el análisis

[16] En el curso de Análisis Matemático I, las cónicas fueron presentadas como conjunto de puntos en el plano que satisfacen ciertas condiciones geométricas que conducen directamente a su formulación algebraica.

posterior de las actividades desarrolladas por las alumnas, los encuentros fueron registrados a través de filmaciones en cintas de video, grabaciones de audio y anotaciones que estuvieron a cargo de otras dos investigadoras del equipo, presentes en carácter de observadoras no participantes.

La experiencia

Fueron realizados cuatro encuentros de aproximadamente 2 horas cada uno, donde las alumnas trabajaron individualmente en un ambiente computacional disponiendo de una computadora para cada estudiante.

En cada encuentro se presentaba una situación abierta que enfatizara la experimentación y la visualización y sólo cuando lo consideramos necesario se agregaron actividades direccionadas que garantizaran al profesor y al alumno la enseñanza y el aprendizaje del tema propuesto. Cada una de las alumnas produjo relatos escritos que sintetizaban sus conclusiones.

En el *primer encuentro* fueron introducidos los comandos básicos del programa: escribir expresiones algebraicas, realizar gráficas en el plano cartesiano, cambiar escalas en los ejes coordenados, marcar puntos en el plano, resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, construir tablas, etc. En el *segundo encuentro* se propuso explorar las relaciones entre gráficas y parámetros de la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, para ello se solicitó que analizaran: *¿Cómo influyen los parámetros A y B en la clasificación de las cónicas?*. En el *tercer* y *cuarto encuentros* la actividad se centró en estudiar la influencia de los distintos parámetros en las gráficas de ecuaciones del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $A = B \neq 0$ que representan circunferencias.

Los encuentros

Describiremos a continuación lo sucedido en los encuentros en los cuales se abordó específicamente el estudio de las cónicas, esto es, del segundo al cuarto encuentro. En cada caso, describiremos la actividad propuesta, algunos episodios que muestran las estrategias y dudas planteadas por las estudiantes, las conclusiones a las que arribaron y realizaremos algunas acotaciones referidas a las justificaciones de tales conclusiones y a las intervenciones efectuadas por los docentes.

El segundo encuentro

En el segundo encuentro se propuso estudiar la influencia de los parámetros *A* y *B* de la ecuación cuadrática $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ en la clasificación de las cónicas. Las alumnas asignaron arbitrariamente valores a los coeficientes *A* y *B* obteniendo distintas gráficas. Durante estas exploraciones, Paula, escribió la ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$, sabiendo, de acuerdo a sus conocimientos previos sobre cónicas, que se trataba de una circunferencia. Al graficarla obtuvo una elipse (ver Figura 1), por lo que consultó a una de las docentes.

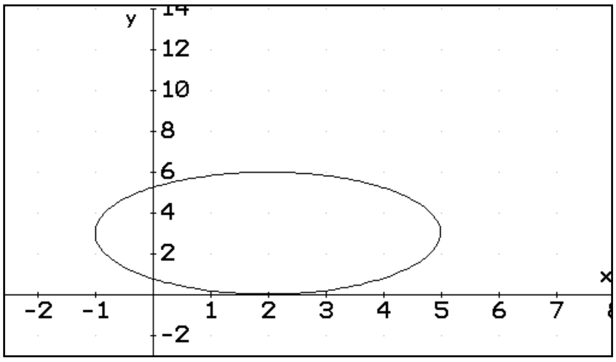

Figura 1. El gráfico de $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ obtenido por Paula

En este momento se juzgó oportuno aclarar al grupo que la gráfica de una circunferencia no se presenta como tal si se representa en un sistema de coordenadas donde las escalas son diferentes en cada eje y que este inconveniente puede solucionarse usando el comando llamado *Relación de Aspecto* para examinar o cambiar la relación física entre las longitudes horizontal y vertical de la ventana.

En esta ocasión, la intervención docente se realizó para evitar una posible visualización incorrecta que pudiera conducir a errores, sea porque la figura nos puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar, como fue la situación planteada por Paula, o porque la imagen visual puede inducir a aceptar relaciones que aparentan ser transparentes y ni siquiera se nos ocurriría pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas.

Sin embargo, colocándonos ahora como investigadoras, podemos preguntarnos si esta aparente desventaja de una "visualización incorrecta" que condujo a una intervención preventiva del docente, podría haber sido explorada y explotada de otra manera. El episodio de Paula es útil para destacar algunos aspectos vinculados con las características del trabajo con software matemático en lugar de lápiz y papel. En la computadora las escalas están puestas de antemano y pueden ser diferentes en cada eje, esto no ocurre al trabajar con lápiz y papel ya que en este caso nosotros fijamos las escalas y generalmente las tomamos iguales en ambos ejes, lo que nos lleva a obtener la gráfica esperada. Al trabajar en un ambiente computacional perdemos ese control y nos obliga a estar atentos para estas cuestiones visuales. Es en estas situaciones donde cabe preguntarse: ¿esto es un problema o una oportunidad más para realizar exploraciones matemáticas nuevas? Eso dependerá de la manera en que trabajemos con los estudiantes. Quizás este tipo de situaciones nos desoriente, por su imprevisibilidad y nosotros como docentes intentemos sortear ese "obstáculo" dando explicaciones relacionadas con el manejo del software, pero también podríamos usarlas como un disparador para nuevas exploraciones. La cuestión es cómo y cuáles intervenciones sacan provecho de los medios informáticos. En qué cosas conviene llamar la atención y en cuáles nos conviene dejar seguir la exploración por caminos que no sabemos a donde nos llevan. Todas estas cuestiones se enmarcan en lo que Penteado (2001)[17] denomina "zona de riesgo" y que está vinculada, entre otros aspectos, con lo que significa para los docentes trabajar en ambientes informatizados con todas las inseguridades que nos invaden y el miedo de que el conocimiento que los estudiantes produzcan sea erróneo.

Luego de la intervención docente, las estudiantes continuaron con la actividad propuesta, variando libremente los valores de los coeficientes de la

[17] Si bien la noción de "zona de riesgo" fue abordada en Skovsmose (2000), este autor afirma que la misma fue introducida por Penteado y cita un manuscrito de esta investigadora. En comunicación personal con la Dra. Penteado se nos informó que tal manuscrito fue publicado en 2001 y es por ello que utilizamos esta referencia, según lo sugerido por la autora.

ecuación cuadrática, en una actividad exploratoria no sistemática. A fin de ordenar el análisis que estaban realizando se les propuso que completaran, en el pizarrón, una tabla en la que registraran los valores de *A* y de *B* y el tipo de cónica obtenido. A continuación se muestra la tabla generada por las estudiantes:

A	***B***	***Cónica***
0	0	Recta
1	1	Circunferencia
2	1	Elipse
3	0	Parábola
2	3	Elipse
4	5	Elipse
-1	2	Hipérbola
-2	-2	Circunferencia
3	-2	Hipérbola
2	-3	Hipérbola
-3	-3	Circunferencia
-3	-5	Elipse
2	2	Circunferencia
-4	-1	Elipse
0	3	Parábola
3	2	Elipse
0	-4	Parábola
2	-1	Hipérbola
-2	0	Parábola
1	2	Elipse

La posibilidad de realizar una tabla para distintos valores de los parámetros y graficar simultáneamente varias curvas, permitió visualizar rápidamente cada una de las distintas situaciones planteadas, permitiendo a las estudiantes arribar a las siguientes conclusiones:

> Anahí: Si A=B, pero no nulos, obtengo la gráfica de una circunferencia, aunque una vez no pude obtener la gráfica, no sé si introduje mal los números.
>
> Florencia: Si A y B tienen el mismo signo obtengo una elipse y si tienen distinto signo una hipérbola. Si sólo A o B es cero entonces tengo una parábola.

Durante el transcurso de esta actividad surgieron algunos episodios interesantes que permitieron desarrollar tareas no planificadas a partir de los problemas que planteaban las estudiantes. Por ejemplo, la acotación anterior de Anahí referida a la imposibilidad de obtener un gráfico determinado, conduce a la necesidad de analizar las restricciones sobre los parámetros. En este mismo sentido, Laura explicó:

> Cuando intenté graficar $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$ no pude obtener la gráfica, entonces usé el comando Resolver-Expresión[18], para la variable y. Obtuve una expresión en la que aparecían números complejos, por eso deduje que no se podía graficar.

La estrategia utilizada por Laura resultó muy interesante pues ella intentó justificar la imposibilidad de graficar circunferencias basándose en recursos algebraicos del software. En ese momento se les indicó que existen restricciones en los valores de los parámetros, y se invitó al grupo a realizar un análisis algebraico con papel y lápiz para determinar cuales deben ser las condiciones a cumplir por los parámetros para que la ecuación represente una circunferencia.

Sin inconvenientes, a partir de la ecuación $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$, completando cuadrados, llegaron a la expresión canónica

[18] Resolver – Expresión es un comando de DERIVE que se utiliza para resolver ecuaciones e inecuaciones, tanto algebraica como numéricamente.

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$ y considerando que el segundo miembro no puede ser negativo quedó justificada, para esta ecuación, la imposibilidad de visualizar la gráfica correspondiente.

Ana se planteó si el software "dibujaba" circunferencias de radio 0. Intentó hacerlo y verificó que no, entonces preguntó:

> ¿Cómo distingo entonces, si el radio es cero o si la circunferencia no se puede dibujar?

Laura propuso una resolución algebraica utilizando la forma canónica de las circunferencias: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, en la que asignaba valor 0 al radio R y observaba que al resolver la ecuación con dominio real la solución obtenida correspondía al centro de la circunferencia (a,b).

Durante este encuentro se pudo obtener, a partir de las exploraciones gráficas, una clasificación de las cónicas según los parámetros A y B, sin analizar en general los casos que derivan en curvas degeneradas. Sólo se consideró el caso particular de una circunferencia. En este punto sería conveniente elaborar actividades que, aprovechando la posibilidad de experimentación y visualización que brinda el software, lleve a la necesidad de establecer restricciones en los diferentes parámetros a fin de obtener los gráficos de las distintas cónicas.

El tercer encuentro

En el tercer encuentro centramos la actividad en estudiar la influencia de los parámetros de la ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, con $A=B\neq 0$, en las gráficas correspondientes, que, por lo visto en el encuentro anterior, representan circunferencias. Inicialmente se pretendió que las alumnas trabajaran libremente con la consigna: *¿Cuál es la influencia de los distintos* *parámetros en las gráficas de las circunferencias?*, sin embargo, como veremos a continuación, fue necesario acotar más la actividad.

Durante el desarrollo del trabajo Paula y Anahí no manifestaban avances por lo que decidimos sugerir actividades más direccionadas para favorecer la aparición de estrategias de formulación de conjeturas y su validación con la intención de arribar a conclusiones matemáticas que darían respuestas a la interrogación antes planteada. Así, se les sugirió que asignaran al parámetro *E* distintos valores. Las estudiantes eligieron trabajar con *E*=0. Una vez decidido esto, Paula varió sólo los coeficientes cuadráticos, trabajando con la ecuación: $Ax^2 + Ay^2 + 3x + 4y = 0$ y, asignando a *A* valores enteros de 2 a 6, obtuvo las gráficas que muestra la Figura 2 y concluyó:

> Cuando E es cero, al aumentar el coeficiente cuadrático el radio disminuye, pero en todos los casos la circunferencia pasa por el (0,0).

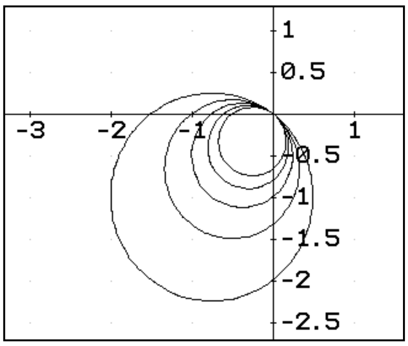

Figura 2. Gráficas de $Ax^2 + Ay^2 + 3x + 4y = 0$,

asignando a *A* valores enteros de 2 a 6

El resto de las estudiantes varió los coeficientes lineales y cuadráticos a la vez. Así, a partir de las exploraciones realizadas, Anahí discrepa de la afirmación de Paula diciendo:

No estoy de acuerdo, al aumentar el coeficiente A, el radio no disminuye.

La estudiante justifica su desacuerdo mostrando las gráficas que aparecen en la Figura 3, y que había generado graficando las circunferencias de ecuaciones $2x^2+2y^2+10x+20y=0$ (i) y $4x^2+4y^2+100x+200y=0$ (ii). En este caso, el aumento en el parámetro *A* produjo aumento en los radios de las circunferencias.

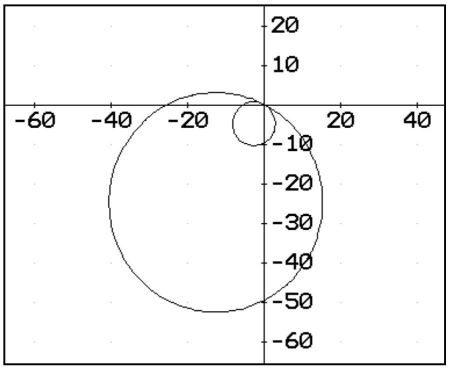

Figura 3: Gráficas de (i) $2x^2+2y^2+10x+20y=0$ y (ii) $4x^2+4y^2+100x+200y=0$

Las estudiantes arriban a conclusiones, aparentemente, contradictorias. El resto del grupo decide analizar las discrepancias entre Paula y Anahí. En este sentido, Laura observa, mientras coteja las gráficas que muestra la pantalla de su computadora con las de Paula y Anahí, que:

Lo que dice Paula es cierto, pero si no cambian los coeficientes lineales.

Las conclusiones de Paula y Anahí y la observación de Laura, que mostró la necesidad de especificar las condiciones bajo las cuales se establecen las conjeturas, fueron posibles debido a la experiencia visual con las gráficas, que permitió comprender la relación entre los coeficientes de la ecuación cuadrática y su gráfica.

Posteriormente, Anahí sugiere probar con *E* distinto de cero. Nancy consideró la ecuación $2x^2 + 2y^2 + x + 2y + E = 0$ y, asignando a *E* valores enteros entre –5 y 0, obtuvo las gráficas que muestra la Figura 4, concluyendo que:

> La circunferencia se "agranda" cuando disminuye E [...] a medida que se achica E la gráfica se hace más grande, pero siempre centrada en el mismo punto manteniendo constantes los coeficientes lineales

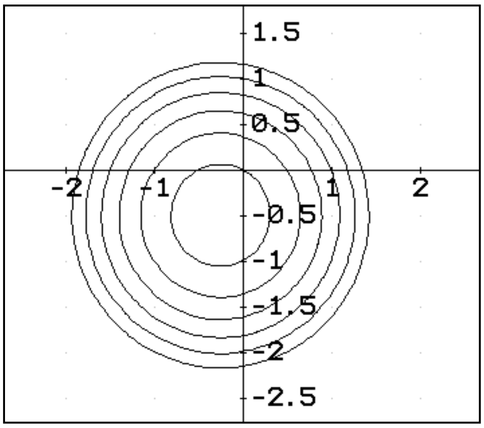

Figura 4. Gráficas de $2x^2 + 2y^2 + x + 2y + E = 0$,

asignando a *E* valores enteros entre -5 y 0.

Posteriormente todo el grupo cambia los coeficientes de los términos lineales, *C* y *D*. Primero asignan valor cero a ambos coeficientes concluyendo que, en ese caso, la circunferencia está centrada en el origen. Haciendo $D=0$, varían los valores del coeficiente C, y observan que el centro de la circunferencia se desplaza sobre el eje de las x. Cuando le asignan valores al coeficiente D, manteniendo el coeficiente C igual a cero, observan que las circunferencias se desplazan sobre el eje y.

Es claro que las conclusiones a las que arribaron las estudiantes hubieran resultado obvias y triviales si hubieran escrito la ecuación cuadrática $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$ con $A \neq 0$, en su forma canónica, esto es: $\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - E$, con lo cual el centro de la circunferencia es $\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A}\right)$ y su radio $R = \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - E}$. Usando esta información algebraica podríamos, por ejemplo, concluir, como lo hizo Paula, que si mantenemos C y D fijos y $E = 0$, el radio disminuye cuando el valor del parámetro A aumenta. También podemos verificar la conclusión de Anahí: una vez fijados A, C y D, al disminuir E, el radio aumenta. De igual modo puede verse que si $C = 0$ los centros de las circunferencias se ubican sobre el eje y, mientras que si $D = 0$, los centros se ubican sobre el eje x. Sin embargo este análisis, que prescinde de lo gráfico, no es lo que surgió en el ambiente computacional en el cual se trabajó, no fue el camino que las alumnas eligieron, a pesar de conocer la ecuación canónica de una circunferencia y saber como obtenerla. Las conclusiones, que pueden ser consideradas como conjeturas, se obtuvieron a partir de la experimentación y la visualización de los gráficos realizados, invirtiendo así, al menos parcialmente, el camino usual que conduce de lo algebraico a lo gráfico. La forma canónica puede ser propuesta para probar la verdad de las conjeturas construidas a partir de la exploración gráfica realizada con la computadora.

El cuarto encuentro

En el cuarto encuentro, continuando con la temática del anterior, se presenta a las alumnas la ecuación $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ y se les propone que investiguen de qué forma se modifican las gráficas de las circunferencias correspondientes, al variar el parámetro *C*.

Haciendo uso del comando *Tabla*, Ana asignó a *C* valores enteros entre -10 y 10, generando entonces 21 ecuaciones diferentes que posteriormente fueron graficadas. La computadora realizó las gráficas que muestra la Figura 5.

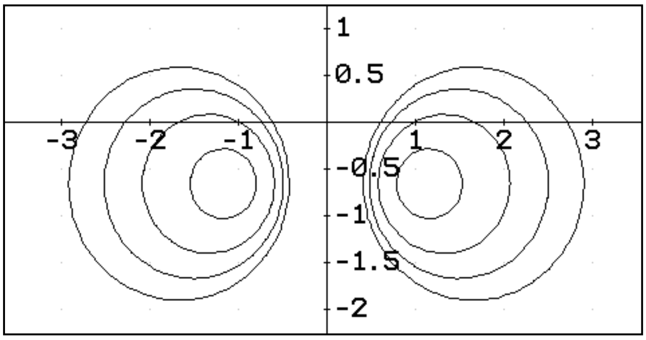

Figura 5. Gráficas de $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ asignando a *C* valores enteros entre –10 y 10

Inmediatamente Ana advirtió que faltaban algunas gráficas, ya que sólo había 8 circunferencias. Entonces, se abocó a trabajar con lápiz, papel y calculadora, obteniendo, para cada valor de *C*, la expresión canónica que le permitió decidir cuáles ecuaciones correspondían a la de una circunferencia.

Esta tarea le resultó muy trabajosa y finalmente presentó los datos en una tabla como la que se muestra a continuación:

C	R^2	R	Centro
10	1,55	1,24	$\left(-\frac{15}{9},-\frac{2}{3}\right)$
9	1,03	1,01	$\left(-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$
8	5/9	0,74	$\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$
7	0,139	0,37	$\left(-\frac{7}{6},-\frac{2}{3}\right)$
6	-2/9	no existe	---
5	-0,53	no existe	---
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Después de realizar este análisis, otra estudiante, Laura, concluye:

> Para valores de C entre -10 y -7 y entre 7 y 10 existe circunferencia, pero para los valores restantes no; por eso en la gráfica sólo aparecen ocho circunferencias.

La seguridad en el trabajo algebraico realizado por Ana permitió obtener las conclusiones anteriores. Por otra parte, este análisis algebraico se origina al intentar una justificación que explique la no aparición en la pantalla de la computadora de todas las gráficas pedidas[19].

---

[19] Cabe notar aquí, nuevamente, que la forma canónica de la ecuación $3x^2+3y^2+Cx+4y+5=0$, esto es, $\left(x+\frac{C}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{C^2-44}{36}$ permite explicar porqué sólo aparecen las circunferencias con $|C|\geq 7$. Al imponer al radio la condición de ser positivo, se

La situación antes relatada motivó a Florencia a variar los valores del coeficiente *C*, asignándole algunos valores enteros entre -50 y 50. Ella observa las gráficas que muestra la computadora y con la utilización del *Zoom* (Figura 6), el cual permite ver más en detalle las gráficas obtenidas, llega a la siguiente conclusión*:*

> Para cualquier valor de C nunca va a tocar al eje de las ordenadas, se acerca cada vez más al eje pero no lo toca

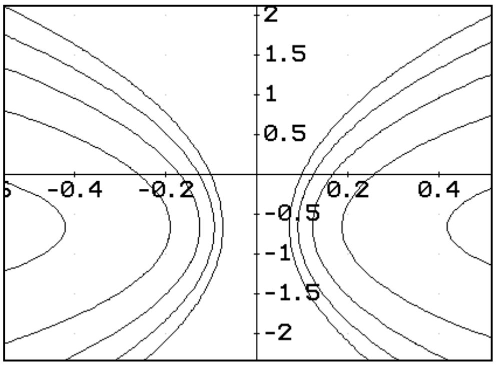

Figura 6. Gráficas de $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$

asignando a *C* algunos valores enteros entre – 50 y 50

Frente a esta conclusión, que es verdadera pero no fue demostrada en ese momento[20], se les propuso que variaran el coeficiente *A* en la ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$. Nancy elige los valores 4, luego 1 y

---

obtiene $C^2 - 44 > 0$, lo que implica $C > \sqrt{44} \cong 6{,}63$ o bien $C < -\sqrt{44} \cong -6{,}63$. Así, podemos concluir que las ecuaciones cuadráticas $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ representan circunferencias de radios no nulos siempre que $|C| > \sqrt{44} \cong 6{,}63$.

[20] Se sugiere al lector intentar probar esa afirmación.

después 0,9 y afirma que al variar el coeficiente cuadrático en todos los casos, las circunferencias obtenidas no cortan el eje de las ordenadas. Mientras tanto, Laura, que ha estado trabajando con la ecuación $0.2x^2 + 0.2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$, dice:

> Cuando grafico la ecuación $0.2x^2 + 0.2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$, las circunferencias cortan al eje en dos puntos", y muestra las gráficas de la Figura 7.

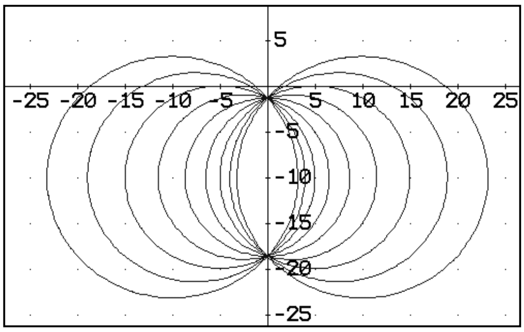

Figura 7. Gráficas de $0.2x^2 + 0.2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$

Laura propone entonces buscar un coeficiente para los términos cuadráticos de modo que sus gráficas resulten circunferencias tangentes al eje de las ordenadas. Todas las estudiantes se abocaron a la tarea de variar el coeficiente A en la ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ asignándole valores entre 0 y 1. Finalmente, logran visualizar (ver Figura 8) que para el valor *A=0.8* se obtienen gráficas aparentemente tangentes al eje de las ordenadas:

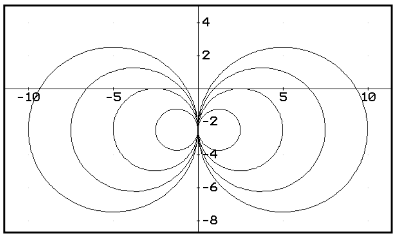

Figura 8. Gráficas de $0.8x^2 + 0.8y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$

El docente preguntó si realmente estaban convencidos de que estas gráficas fueran tangentes y cómo se podría justificar. Laura responde:

> Usé el Zoom para asegurarme que las circunferencias son tangentes. Pero puedo resolver las ecuaciones para encontrar el punto de tangencia.

Laura recurre inicialmente a una justificación computacional visual (uso del *Zoom*) y posteriormente indica que también podría realizar una resolución algebraica, resolviendo ecuaciones. Otras estudiantes demuestran su asombro y manifiestan la necesidad de una mejor justificación:

> Nancy: ¡Yo podría haber estado toda la tarde y no se me hubiese ocurrido darle el valor 0.8!

> Florencia: Debe haber una explicación de por qué ocurre para A=0.8

Frente a esta inquietud fue necesario realizar deducciones algebraicas para justificar la conjetura. Con la ayuda de la profesora, Florencia trabajó en tal deducción. La estudiante afirmó que el punto donde las circunferencias cortan al eje *y* sería de la forma (0, *y*). Así, para *x*=0, la ecuación cuadrática quedaría $Ay^2 + 4y + 5 = 0$. La profesora sugirió resolver esa ecuación cuadrática y la estudiante escribió, entonces, las soluciones

$y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4A5}}{2A}$. Ya que se busca que el corte con el eje *y* sea único, se impone la condición $4^2 - 4A5 = 0$, obteniéndose $A = 0.8$.

En este encuentro se pudo concluir que las circunferencias $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ nunca cortan al eje *y*, y que hay restricciones sobre *C* para que exista gráfico (las estudiantes encontraron $|C| \geq 7$). También pudo observarse que las circunferencias de ecuaciones $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ cortan al eje *y* en sólo un punto si $A = 0.8$. Siguiendo con el análisis iniciado por Florencia, con la ayuda de la profesora, también se puede ver, que las circunferencias $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ cortarán al eje *y* en dos puntos si $A < 0.8$ y no lo cortarán si $A > 0.8$.

Conclusiones

En las descripciones presentadas en la sección anterior se colocaron algunas observaciones mostrando características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente computacional en el cual se llevó a cabo esta experiencia. Presentaremos algunas conclusiones vinculadas con los objetivos de este estudio referidos a la descripción y análisis de: 1) las relaciones profesor-alumno-conocimiento matemático en un ambiente computacional y 2) el papel de la computadora como agente motivador y promotor de cambios en el abordaje de algunos tópicos de Matemática, en este caso particular, de las cónicas.

En relación al primer objetivo podemos señalar que las discusiones entre los estudiantes muestran una de las maneras en que nuevas tecnologías pueden estar modificando la dinámica de los ambientes de aprendizaje fomentando discusiones y modificando el papel del profesor. En los episodios relatados pueden observarse momentos en los cuales las conjeturas generadas por las estudiantes producían interacciones tendientes a verificarlas o rechazarlas valiéndose de los diferentes recursos disponibles en el software. Otras veces las estudiantes se dedicaban a dar respuestas a cuestiones que ellas mismas se planteaban a partir de las gráficas proporcionadas por la computadora. Con relación al papel del profesor, podemos señalar que existieron momentos en que se realizaron intervenciones de tipo "preventivas", para evitar la posible aparición de conclusiones erróneas. El empleo de tecnología implica para muchos docentes, el ingreso en una "zona de riesgo" (PENTEADO, 2001) debido a los temores, el desconocimiento y la imposibilidad de prever todas las dificultades que pueden aparecer, sean relacionadas con problemas técnicos o con los abordajes matemáticos alternativos o no convencionales seguidos por los estudiantes. Ingresar en esa zona de riesgo es el precio de aventurarse en un ambiente de aprendizaje particular, en el cual la tecnología computacional actúa como un reorganizador tanto de la dinámica de la clase como del pensamiento matemático (ver BORBA, 1999). Salir de esa zona de riesgo puede implicar el regreso al paradigma del ejercicio descrito por Skovsmose (2000) donde una secuencia preestablecida y bien pautada de actividades permite volver al confort de lo conocido y disminuir la incertidumbre, pero, al mismo tiempo, privar a los estudiantes de muchas oportunidades de aprendizaje.

Con respecto al papel de la computadora como motivadora y promotora de cambios en el abordaje de los contenidos matemáticos, podemos señalar que en el estudio habitual de las ecuaciones de segundo grado, es dominante el aspecto algebraico. Usualmente los alumnos realizan manipulaciones algebraicas y construyen gráficas por medio de la expresión canónica, lo que se justifica cuando las gráficas son realizadas con lápiz y papel. La introducción de la computadora ofrece condiciones para que este cuadro sea modificado. Con el uso de software no sólo se gana tiempo sino que también es posible trazar dos o más gráficas en la misma pantalla, permitiendo la comparación y, por lo tanto, la producción de conjeturas a partir de la visualización de los diferentes tipos de cambios que las gráficas sufren cuando sus expresiones algebraicas son alteradas.

Al trabajar con actividades que encierran previsiones sobre los coeficientes de determinadas gráficas de cónicas, las estudiantes se comprometían en una rica discusión matemática que incluyó hasta la demostración de las conjeturas.

El aspecto empírico favorecido por el uso del software permitió, por medio de las gráficas, que las estudiantes revalidaran constantemente sus formulaciones y llegasen a resultados consistentes aunque discrepantes.

Las estudiantes mostraron una razonable maestría en el álgebra algorítmica, desarrollando correctamente las tareas del marco algebraico de la resolución (por ejemplo, pasar de la ecuación general de la circunferencia a su forma canónica).

En cuanto a la asociación entre los marcos gráficos y algebraicos no se presentaron mayores inconvenientes, salvo en aquellos casos en que no era posible obtener las gráficas de las ecuaciones por ellas propuestas, no asociando este hecho a la incompatibilidad de los valores asignados a los coeficientes.

El enfoque propuesto permitió justificaciones visuales para el desarrollo algebraico, dando nuevas opciones en el estudio de estos temas para aquellos estudiantes que se resisten al trabajo algebraico.

Bibliografía

BORBA, M. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO (ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*, São Paulo: Editora UNESP, 285-295, 1999.

BORBA, M. Graphing calculator, functions and reorganization of the classroom. In: BORBA, M. et al (eds.) *Proceedings of Working Group 16 at ICME 8: the role of technology in the Mathematics classroom*. Rio Claro: Gráfica Cruzeiro, 53-62, 1997.

NOSS, R. New numeracies for a technological culture. *For the learning of Mathematics*, 18, 2, p. 2-12, 1998.

NOSS, R.; HOYLES, C. *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, 275 p.

PENTEADO, M. G. Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teachers. *Ways of Knowing Journal*, I, 2, 23-35, Autumn. 2001.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação, *BOLEMA*, Rio Claro: UNESP, Ano 13, 14, 66-91, 2000.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor`s introduction: what is mathematical visualitation? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-8,1991.