

Por que análise real na licenciatura?

*Plínio Cavalcanti Moreira**; *Helena Noronha Cury***; *Carlos Roberto Vianna****

Resumo: Neste trabalho analisamos as respostas apresentadas por 31 matemáticos a um questionário sobre ementa, bibliografia e o papel da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática. Os respondentes são matemáticos que trabalham em 14 das principais instituições universitárias e de pesquisa no Brasil. As respostas foram submetidas a um processo de unitarização para a construção de categorias, segundo a abordagem metodológica da análise de conteúdo. Descrevemos três categorias que sintetizam os argumentos dos respondentes em favor da obrigatoriedade da disciplina no curso de licenciatura. Discutimos esses argumentos, situando-os em relação a estudos atuais sobre formação do professor de matemática da escola básica e levantamos algumas questões para o prosseguimento do debate.

Palavras-chave: Educação matemática; formação matemática do professor; saber docente.

Why real analysis in mathematics teacher education?

Abstract: In this article, we present the responses given by 31 mathematicians to a questionnaire about the role of a Real Analysis course in mathematics teacher education at university level. Respondents are among mathematicians working at 14 leading universities and research institutions in Brazil. Data were analyzed according to Content Analysis' methodological approach. We describe three categories of arguments that emerged from the data, according to which a Real Analysis course should be a mandatory part of the curriculum in mathematics teacher education. We discuss these arguments in relation to studies in teacher education and teacher knowledge referred to in the literature. Finally, we raise some issues for further discussion.

Key words: Mathematics education; mathematics teacher education; teacher knowledge.

* Professor da Universidade Federal de Minas Gerais. plinio@mat.ufmg.br.

** Professora da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. curyhn@puccrs.br.

*** Professor da Universidade Federal do Paraná. vianna@mat.ufpr.br.

Introdução

O debate referente à definição dos conhecimentos matemáticos que devem fazer parte da formação inicial do professor da escola básica vincula-se a algumas questões teóricas fundamentais, como por exemplo:

- a) De que se compõem os saberes profissionais dos professores da escola básica e como se situa, no interior desse conjunto de saberes, o conhecimento matemático apreendido ao longo do processo de formação na licenciatura?
- b) A prática docente escolar limita-se a uma transmissão dos saberes disciplinares, ou ela se constitui num espaço mais complexo e elaborado de atividades, tais como seleção, tradução, adaptação e mesmo produção de saberes?

A comunidade científica dos matemáticos desempenha um papel importante nessa discussão. Nem tanto, talvez, por suas eventuais contribuições teóricas ao campo da pesquisa referente à formação de professores da escola básica — que, de resto, não é, propriamente, o campo de suas investigações profissionais — e, sim, pela acentuada influência que essa comunidade exerce, direta ou indiretamente, no desenho dos projetos curriculares e nas próprias atividades de ensino que se desenvolvem nos cursos de licenciatura em matemática das grandes instituições universitárias do Brasil. Por isso, consideramos importante, para o avanço do debate, recolher, explicitar, analisar e trazer a público para uma discussão ampla as opiniões de alguns dos mais destacados membros da comunidade matemática em atuação no Brasil. Esse foi o objetivo da pesquisa que relatamos neste artigo.

A disciplina Análise Real é — quanto a isso pensamos não haver nenhuma polêmica — um dos pilares da formação do bacharel em matemática. Ela pode ser vista, ao lado do estudo das estruturas algébricas, como uma das formas de introdução dos futuros matemáticos a conceitos, métodos, técnicas e valores próprios da matemática avançada, além de

servir de base para a Análise no \mathbb{R}^n e, daí, para estudos mais gerais, envolvendo outros espaços e estruturas, como variedades diferenciáveis, espaços de Banach, etc.

No Brasil, os cursos de licenciatura em matemática, que formam os professores dessa disciplina para o Ensino Básico, tiveram, por muitos anos, uma estrutura curricular que, em geral, incluía disciplinas de Cálculo, Álgebra e Geometria Analítica no início do curso e, nos últimos semestres, aquelas que são trabalhadas em um nível mais alto de formalização e rigor, como a Topologia e a Análise Real. O parecer CNE/CP 28/2001 do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2001) estabeleceu que 800 horas, dentre as 2.800 da grade curricular, devem ser dedicadas à prática pedagógica escolar (estágios e atividades complementares relacionadas diretamente com a prática docente escolar). Na elaboração de novos projetos pedagógicos para os cursos de licenciatura em matemática, põe-se em questão a permanência de algumas disciplinas na grade curricular e torna-se necessária a explicitação do papel que estas efetivamente desempenham na preparação do licenciando para a futura prática profissional na escola básica. Considerando que, no curso de licenciatura, já há disciplinas que incluem o estudo das funções reais (como, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral), pode-se perguntar: de quais tópicos deveria tratar a disciplina Análise Real e com que tipo de abordagem? Deveria ela ser obrigatória no curso de licenciatura? Por quê?

Tais perguntas foram, basicamente, as que propusemos a 80 matemáticos — pesquisadores titulares ou professores titulares — que atuam em 16 das principais instituições universitárias ou de pesquisa do Brasil, contatando-os através de seus respectivos endereços eletrônicos. Incluímos, na próxima seção, a íntegra do questionário enviado.

Estamos cientes de que a decisão de enviar o questionário por correio eletrônico pode acarretar um viés nas respostas, pois essa é uma forma de auto-seleção. Sendo assim, é importante ressaltar que o nosso estudo se configura como uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório e

que as perguntas, estimulando os participantes a pensar e escrever sobre um determinado tema, induzem manifestações de natureza subjetiva. Ainda que alguns dados quantitativos sejam apresentados neste artigo, eles não devem ser vistos como índices percentuais aplicáveis a toda a comunidade dos matemáticos.

Entretanto, observamos que, dos 80 matemáticos para os quais enviamos o questionário, recebemos resposta de 31 (cerca de 40% do total enviado), representando 14 das 16 instituições originalmente selecionadas. Tendo em vista que todos os pesquisadores contatados são membros destacados da comunidade científica que atua no Brasil, as respostas desses 31 matemáticos compõem um quadro que, embora parcial, é de grande importância para o desenvolvimento do debate.

Os resultados

Eis a íntegra do questionário que enviamos para a coleta dos dados:

Prezado(a) colega:

Nós (...) estamos realizando uma pesquisa sobre a composição da grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil. Nesta etapa do trabalho, estamos interessados em conhecer a visão dos matemáticos a respeito do papel da disciplina Análise na Reta na formação do licenciado. Na impossibilidade de ouvir todos os membros dessa comunidade científica, selecionamos uma amostra composta pelos pesquisadores titulares do IMPA e os professores titulares dos departamentos de matemática de 15 universidades brasileiras.

Agradecemos a sua colaboração no sentido de responder às três questões seguintes (por favor, responda no próprio corpo da mensagem, usando o *reply*).

1. Assinale os itens que, na sua opinião, deveriam ser trabalhados numa disciplina de Análise na Reta para a licenciatura em matemática (se for o caso, acrescente outros):

- O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo.
- Seqüências e séries de números reais.
- Continuidade de funções reais de variável real.

- Derivada de funções reais de variável real.
- Integral (Riemann) de funções reais de variável real.
-

2. Indique o(s) livro(s) que você recomendaria para a disciplina Análise na Reta em um curso de licenciatura em matemática:

- Análise Real (volume I) – Elon L. Lima.
- Análise I – Djairo G. de Figueiredo.
- Introdução à Análise Matemática – Geraldo Ávila.
- Outro. Qual?

3. Pense na disciplina Análise na Reta com uma ementa dada, aproximadamente, pelos tópicos listados na pergunta 1 e uma abordagem semelhante à da bibliografia relacionada na pergunta 2.

Na sua opinião, todo curso de licenciatura em matemática deveria ter essa disciplina como obrigatória? () Sim () Não

Se lhe coubesse defender a permanência da disciplina Análise na Reta como obrigatória para o curso de licenciatura em matemática, que argumentos você apresentaria?

Apresentamos nos quadros abaixo as respostas às questões 1 e 2 e à primeira parte da questão 3. Para o tratamento das respostas à parte aberta da questão 3, foram utilizados procedimentos da análise de conteúdo, a que nos referiremos mais adiante.

Questão 1

Assinale os itens que, na sua opinião, deveriam ser trabalhados numa disciplina de Análise na Reta para a licenciatura em matemática.

Quadro 1 – Respostas da questão 1, com número de indicações e percentagens.

Itens assinalados	Número de indicações	% (em 31)
Seqüências e séries de números reais	29	93,5
Continuidade de funções reais de variável real	29	93,5
Derivada de funções reais de variável real	29	93,5
O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo	27	87,1
Integral (Riemann) de funções reais de variável real	26	83,9
Outros: Seqüências e séries de funções	3	9,7
Cardinalidade	2	6,5
Construção dos reais	2	6,5
Aplicações (na Física, crescimento populacional, etc.)	2	6,5
Topologia do plano	1	3,2
Uma introdução à teoria dos conjuntos	1	3,2
Funções elementares de um ponto de vista superior	1	3,2
Aproximações diofantinas, frações contínuas	1	3,2
Transcendência e irracionalidade de e e de π	1	3,2

Questão 2

Indique o(s) livro(s) que você recomendaria para a disciplina Análise na Reta em um curso de licenciatura em matemática.

Quadro 2 – Respostas da questão 2, com número de indicações e percentagens

Livros indicados	Número de indicações	% (em 31)
Análise I – Djairo G. de Figueiredo	18	58,1
Análise Real (volume I) – Elon L. Lima.	12	38,7
Introdução à Análise Matemática – Geraldo Ávila	9	29,0
Outros: Cálculo – Spivak	3	9,6
Elementos de Análise – Bartle	2	6,5
Princípios da Análise Matemática – Rudin	2	6,5
Apostol (sem indicação do título)	2	6,5
Courant (sem indicação do título)	2	6,5
Análise para licenciatura – Geraldo Ávila	1	3,2
Courant e Robbins (Que é a Matemática)	1	3,2
Moise (sem indicação do título)	1	3,2
Análise na Reta – Elon L. Lima	1	3,2
Curso de Análise (v. 1) – Elon L. Lima	1	3,2
Maravilhas da Matemática – L. Hogben	1	3,2
Mathematical Analysis – Andrew Browder	1	3,2

Questão 3

Pense na disciplina Análise na Reta com uma ementa dada, aproximadamente, pelos tópicos listados na pergunta 1 e uma abordagem semelhante à da bibliografia relacionada na pergunta 2. Na sua opinião, todo curso de licenciatura em matemática deveria ter essa disciplina como obrigatória?

Respostas:

Sim: 29 (93,5%) **Não:** 0 (0%) **Não responderam:** 2 (6,5%)

Observações:

1. Nos quadros referentes às questões 1 e 2, as porcentagens foram calculadas sobre o número total de respondentes (31), ainda que cada um deles tenha assinalado mais de um (ou nenhum) item, ou indicado mais de um (ou nenhum) livro. De fato, 1 (um) respondente não assinalou nenhum item na questão 1, e 2 (dois) não indicaram nenhum livro na questão 2.
2. As porcentagens indicadas nas respostas à questão 3 também foram calculadas sobre o total de 31 respondentes.
3. Uma das duas pessoas que não responderam à primeira parte da questão 3 deixou claro nos comentários posteriores que, na sua opinião, a disciplina Análise Real não deveria ser obrigatória no curso de licenciatura (resposta 10, citada textualmente no final desta seção). Por outro lado, uma das pessoas que responderam afirmativamente a essa mesma questão aponta suas dúvidas a respeito da obrigatoriedade da disciplina para o curso de licenciatura:

Acho muito desejável que o aluno de licenciatura faça esta disciplina, mas não tenho certeza que deveria ser obrigatória. Considero disciplinas de geometria e álgebra mais essenciais para preparar professores do ensino médio. Havendo espaço para os três, acho bom que Análise na Reta seja obrigatória.

A seguir, apresentamos alguns elementos da metodologia utilizada para a análise da segunda parte da questão 3, cujo enunciado é o seguinte: *Se lhe coubesse defender a permanência da disciplina Análise na Reta como obrigatória para o curso de licenciatura em matemática, que argumentos você apresentaria?*

As respostas a essa pergunta foram trabalhadas segundo a análise de conteúdo, metodologia que é, segundo Bardin (1979),

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (p. 42).

Autores que descrevem os procedimentos dessa metodologia qualitativa de análise (BARDIN, 1979; PATTON, 1980; NAVARRO; DIAZ, 1994; MORAES, 1999) detalham as etapas para exploração do material. Na primeira fase, de pré-análise, os dados são organizados a partir dos documentos disponíveis e dos objetivos da investigação. Em nosso estudo, para analisar as respostas à indagação “Por que Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática?”, utilizamos, nessa etapa, a leitura “flutuante”, em que o pesquisador se deixa impregnar pelo material, para delimitar o *corpus*, campo específico sobre o qual a atenção vai ser fixada.

A segunda fase define as unidades de análise — palavras, frases ou mesmo depoimentos em sua forma integral. Na etapa seguinte, as unidades são classificadas em categorias, que fornecem, “[...] por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos” (BARDIN, 1979, p. 119). Esse agrupamento em categorias pode ser feito segundo critérios prévios, ou estabelecido a partir dos dados. No caso deste nosso trabalho, as classes emergiram dos dados. A categorização se processa de forma circular, havendo um retorno aos dados sempre que necessário, para refinar as categorias e permitir que o texto-síntese, que as descreve, expresse o conjunto de significados presentes nas diversas unidades que as compõem.

Insistimos na observação de que toda leitura envolve interpretações, que podem ou não ser compartilhadas por outros leitores ou pelos próprios autores dos textos. Assim, as categorias construídas estão certamente impregnadas dessas interpretações e, por isso, julgamos importante

reproduzir, junto com a descrição de cada uma delas, algumas unidades de sentido destacadas no processo de unitarização dos textos das respostas. Esperamos, com esse procedimento, tornar mais transparentes as nossas interpretações e facilitar uma avaliação, por parte do leitor, da consistência das categorias construídas.

Apresentados os procedimentos metodológicos, vamos a seguir indicar como os utilizamos nesta pesquisa. Para referência no texto, enumeramos as respostas de 1 a 31, sendo que duas pessoas deixaram em branco a segunda parte da questão 3. Assim, no conjunto das 29 respostas a esse item do questionário, estabelecemos 38 unidades de análise que julgamos relevantes para os objetivos da pesquisa. Sintetizamos as unidades em três grandes categorias, que descrevemos adiante. Observamos que, nessa descrição, procuramos utilizar, o máximo possível, as próprias formas de expressão dos respondentes ao apresentarem seus argumentos. Notamos ainda que três, das 38 unidades com que trabalhamos, não se enquadraram em nenhuma das categorias emergentes do processo e, por isso, serão relacionadas e comentadas em separado, no final da seção.

Depois de encerrada a última fase, enviamos a categorização dos dados aos 31 matemáticos que responderam ao questionário, para que cada um avaliasse a síntese resultante e o modo como foram situadas as suas respostas entre as categorias construídas, não tendo havido registro de nenhuma objeção por parte dos respondentes.

Categorias

Categoria 1

A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de “pensar matematicamente”,

proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de “cultura matemática”.

Dezoito matemáticos (um pouco mais de 60% dos 29 que responderam a esta parte da questão 3) apresentaram argumentos nessa Categoria 1. Note-se, entretanto, que alguns matemáticos apresentaram argumentos em mais de uma classe. A seguir, indicamos algumas unidades de sentido que constituem a Categoria 1, com indicação das respostas de onde foram extraídas:

Resposta 9. Ocasão privilegiada para tomar contato com o que significa matemática, demasiado fundamental para ser ignorado por qualquer um que pretenda ter uma formação matemática.

Resposta 8. Arcabouço do pensamento matemático. Curso onde se aprende a concepção da ciência matemática: o significado dos axiomas e o conceito de prova.

Resposta 7. Ela representa uma boa oportunidade para o aluno entender conceitos básicos importantes tais como indução matemática, e uma boa introdução a um nível mais abstrato e potente. Além disso, é um bom cenário para que o aluno entenda o que é uma demonstração matemática feita com rigor.

Resposta 26. Considero o curso de Análise na Reta uma ferramenta essencial para mostrar como pensam os matemáticos e habituar os alunos ao rigor matemático [...]

Resposta 22. A disciplina Análise na Reta é uma das disciplinas que desenvolve o pensamento matemático (lógica, etc.) e cria uma cultura matemática.

Resposta 12: O professor precisa conhecer as principais estruturas matemáticas.

Assim, entender a estrutura de corpo ordenado completo da reta e as propriedades decorrentes desta estrutura, a formalização dos conceitos de função contínua e função diferenciável, bem como o entendimento da estrutura matemática que os espaços euclidianos possuem, que permite que nesses espaços sejam definidas e tomem valores as funções contínuas e diferenciáveis. Como diz o Prof. Geraldo Ávila em seu livro,

Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da Matemática, não sendo admissível que alguém que pretende ensinar Matemática sinta-se deficiente nesse mister.

Resposta 2: A razão principal é que a experiência mostra que o fundamental para um professor não é saber grande quantidade de matemática, mas ter o pensamento matemático desenvolvido. Para isto ele deve obter maturidade matemática no seu curso de graduação. Precisa: saber pensar matematicamente. Saber analisar e resolver problemas. Matemática é resolver problemas. A disciplina de Análise Real é aquela que mais desenvolve isto. O aluno que a faz atinge um outro patamar do seu desenvolvimento intelectual, na sua capacidade de análise de resolução de problemas. Um formando em licenciatura em matemática que não sabe pensar matematicamente da maneira correta é um desastre!!!

Categoria 2

A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os “porquês” e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras.

Doze (12) matemáticos (cerca de 40% dos 29 que responderam) apresentaram argumentos nessa Categoria 2, alguns dos quais relacionamos abaixo.

Resposta 13: Concluindo, eu ainda acho que o ensino da Análise, na formação de um licenciado em matemática, é adequado, pois é o momento que ele tem para [...] entender o "porquê" de certas afirmações...

Resposta 16. a) É importante que o professor do ensino médio perceba claramente que o sistema de números reais (e, portanto, a reta) não é arbitrário, mas que forma uma teoria desenvolvida logicamente a partir de axiomas intuitivamente válidos. Assim não vão dizer, quando o aluno pergunta o "porquê" de um aspecto dos reais, "Porque é assim" (resposta que um professor do EM¹ deu a um aluno que tive em Introdução ao Cálculo. b) Talvez ajude para perceber que a teoria dos conjuntos não é um fim em si, mas uma ferramenta para desenvolver outras teorias matemáticas.

Resposta 30: Mesmo que o professor não venha a ensinar limites, derivadas, integrais num curso no ensino médio (e poder-se-ia argumentar que esses tópicos deveriam entrar, sim, nesse nível), ele terá condição de entender muito melhor vários tópicos mais elementares se tem condição de utilizar as ferramentas da análise (e.g. uso de integrais para calcular as fórmulas de superfícies e áreas em geometria elementar).

Resposta 15: [...] argumentaria que um bom curso de análise deveria ter um papel extremamente benéfico à formação de um professor de matemática em qualquer nível. Além de abordar tópicos fundamentais, a forma como o assunto é tratado deveria contribuir de modo significativo para que, como professor, a matemática "elementar" fosse apresentada

não meramente como um amontoado de fórmulas e regras, mas com a preocupação de estimular progressivamente o aluno a argumentos lógicos e dedutivos.

Resposta 20: A disciplina de Análise na Reta é a oportunidade dos alunos de abordarem o conteúdo dos cursos de cálculo de forma rigorosa, onde o conceito de limite (essencial na formação do professor) pode ser explorado e aprofundado, aí incluído o conceito de número real.

Resposta 26: Considero o curso de Análise na Reta uma ferramenta essencial para [...] habituar os alunos ao rigor matemático e a entender com uma certa profundidade os fundamentos da matemática, como os números reais.

Categoria 3

A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências.

Cinco (5) matemáticos (cerca de 17%) apresentaram argumentos nessa categoria. Algumas unidades de sentido que a compõem são:

Resposta 2: [...] acho importante de qualquer jeito fazer com que o estudante de licenciatura entre em contato com uma das mais poderosas ferramentas para entender o mundo sensível. É importante ele entender seus aspectos básicos e principalmente o seu potencial de utilidade prática.

Resposta 23: [...] nestes dias de computador, o Cálculo (ou Análise na reta) não serve mais para “calcular”, mas é a língua na qual se deve ser fluente para entender as leis da Física.

¹ Ensino Médio, no nosso entendimento.

Apresentamos, para encerrar esta seção, algumas idéias que, a nosso ver, não se enquadram em nenhuma das categorias propostas, mas que consideramos relevantes para o debate sobre o tema.

Resposta 10: Na minha opinião, depende se o aluno fez um bom curso de cálculo. Neste caso, é interessante abordar os temas acima. Eu imagino que esta condição não é satisfeita pela grande maioria. Por isso, prefiro que aprendam bem aquela disciplina, sem o rigor exigido em Análise na Reta. Há alguns séculos atrás, um senhor chamado Newton calculava derivadas do seguinte modo: tomava acréscimo da variável diferente de zero, para poder dividir o acréscimo da função. Fazia algumas contas, e no final tomava o acréscimo igual a zero! Ele não errava uma, apesar da implicância do bispo Berkeley. Para mim, o mais importante é que os alunos saibam para que serve uma derivada e uma integral.

Comentário nosso

É interessante notar o ponto de vista deste matemático: se o aluno já tivesse entendido os significados dos conceitos, num “bom” curso de Cálculo, então seria interessante formalizar, entrar com o rigor da Análise na Reta. Mas, para que haja o entendimento, não é necessário o rigor ou, mais que isso: pelo menos para os conceitos do Cálculo, o entendimento deveria vir antes do rigor.

Resposta 21: Entretanto, os reais deveriam ser apresentados menos formalmente (na licenciatura). Acho que é importante que o aluno de licenciatura saiba que raiz de 2 é apenas um símbolo para representar uma seqüência infinita de dígitos, e que usando seqüências infinitas de dígitos pode-se representar (?) todos os reais.

(sim) Seqüências e séries de números reais, mas no espírito dito acima. Acho que é importante saber que $1 =$

0,9999999999..... e assim por diante. A série geométrica deve ser explorada ao máximo (afinal é a mais básica e talvez a mais útil de todas). Agora, se uma série exponencial estranhíssima converge ou não é algo que acho não deve ser dado num curso para licenciatura.

(sim) Continuidade de funções reais de variável real. Mas a definição de continuidade que eu adotaria é a seguinte: uma função definida num intervalo é contínua se é possível traçar o seu gráfico sem tirar o lápis do papel. Evitaria exemplos esquisitos e artificiais nesse contexto. Isso gerou confusões históricas fortes, pois Ampere publicou em 1806, no CRAS, um paper no qual "demonstrava" que toda função contínua é diferenciável. Cauchy se enfureceu e definiu tudo por épsilons e deltas (só que ainda não se sabia o que eram os reais. Só quando Weierstrass mandou seu aluno Cantor (professor secundário) limpar a sujeira é que as coisas clarearam, mas aí começou um formalismo terrível).

(sim) Derivada de funções reais de variável real. Mas explorar a derivada de maneira suave, como taxa de variação e expansão de Taylor (voltam as séries).

(sim) Integral (Riemann) de funções reais de variável real. Mas como medindo algo tangível. A definição de área através da integral é para mim muito importante.(voltam as séries). Em resumo, seria um curso que explorasse os aspectos analíticos e não os puramente diferenciáveis.

Comentário nosso

Essa resposta dá a impressão de que o seu autor manteria a ementa usual, mas modificaria a abordagem para tratar os assuntos sem forçar o formalismo, o rigor, a abstração, sempre associando os conceitos matemáticos a "algo tangível" ou que já faça sentido para o aluno. De todo modo, talvez pudesse ser contra-argumentado que um curso de Cálculo

“bem desenvolvido” (como coloca o autor da resposta 10) poderia realizar essa proposta de abordagem. Observamos, no entanto, que a resposta deste matemático à primeira parte da questão 3 (se a disciplina deve ou não ser obrigatória para a licenciatura) foi afirmativa.

Resposta 27: Formalização do Contínuo Numérico. Noção de limite através da derivada (taxas em variável contínua). O processo da medição de áreas com a integral. A série geométrica nos números reais e uso de sistemas de numeração.

Comentário nosso

Essa resposta parece sugerir uma espécie de ementa para a disciplina. É possível que, de uma forma muito sintetizada, ela expresse algo parecido com o conteúdo da resposta 21, logo acima.

Uma sumarização dos resultados apresentados nesta seção indica que:

- a) Uma ementa fortemente respaldada pelos respondentes, para a disciplina Análise Real num curso de licenciatura em matemática, seria formada pelos seguintes tópicos:
 1. O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo.
 2. Seqüências e séries de números reais.
 3. Continuidade de funções reais de variável real.
 4. Derivada de funções reais de variável real.
 5. Integral (Riemann) de funções reais de variável real.
- b) O livro *Análise I*, de Djairo Guedes de Figueiredo, foi recomendado, como texto a ser utilizado na disciplina, por quase 60% dos respondentes; *Análise na Reta*, de Elon Lages de Lima, foi recomendado por quase 40%; e *Análise para a licenciatura*, de Geraldo Ávila, por cerca de 30% (alguns respondentes indicaram mais de um livro).
- c) Cerca de 90% dos respondentes são da opinião de que a disciplina Análise Real deveria ser obrigatória num curso de licenciatura em matemática.

Discussão dos resultados e questões para o aprofundamento do debate

Nesta seção, desenvolvemos uma reflexão crítica a respeito dos argumentos sintetizados nas categorias 1, 2 e 3 da seção anterior. Antes, porém, fazemos algumas observações sobre a perspectiva segundo a qual elaboramos esta reflexão.

Em primeiro lugar, gostaríamos de chamar atenção para o fato de que, como esperávamos, a discussão sobre o papel da disciplina Análise Real no currículo do curso de licenciatura acabou extrapolando o simples questionamento dos “conteúdos” listados na ementa ou no programa da disciplina, remetendo a uma questão mais ampla, que se refere às diferentes concepções de formação matemática para o professor da escola básica. É a partir dessa perspectiva mais geral que desenvolvemos a nossa reflexão.

Em segundo lugar, entendemos que uma discussão, no sentido em que o termo é empregado aqui, não se reduz a apor ou contrapor nossas opiniões pessoais às dos respondentes. Trata-se, antes, de situar estas últimas em relação a estudos e pesquisas sobre formação de professores, relatados na literatura. Desse modo, esperamos estar contribuindo para o avanço de um debate que já se vem desenvolvendo em outros países e que, no nosso entendimento, pode ter implicações importantes, tanto do ponto de vista teórico, como em relação à prática concreta de formação de professores no Brasil.

Observamos, por último, que toda discussão — incluindo, naturalmente, essa que desenvolveremos em seguida — está inevitavelmente parametrizada pelos pressupostos e referenciais teóricos incorporados pelos debatedores. Seguramente, outras perspectivas existem, segundo as quais poderiam ser abordadas as questões aqui tratadas. Esperamos que essas perspectivas e abordagens possam, eventualmente, vir a público, proporcionando um enriquecimento da discussão e

possibilitando a construção de uma visão ampliada da problemática em questão.

Categoria 1

A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de “pensar matematicamente”, proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de “cultura matemática”.

Discussão

Schöenfeld (1992) desenvolve um ponto de vista a respeito do ensino da matemática na escola, segundo o qual a ação pedagógica do professor deve se direcionar para a promoção do “pensar matematicamente”, contrapondo-se à ênfase usual que, segundo ele, é posta nos algoritmos para efetuar cálculos, na memorização de “fatos” matemáticos ou na reprodução de determinados procedimentos. Partindo de um trabalho envolvendo atividades como resolução de problemas em grupos, explorando pedagogicamente o conceito de “zona de desenvolvimento proximal” de Vigotsky, Schöenfeld avança até uma análise das relações entre aculturação e cognição, associando fortemente a aprendizagem da matemática com um processo de internalização da perspectiva do matemático. E chega mesmo a afirmar que “um componente fundamental do

pensar matematicamente é ter um ponto de vista matemático, isto é, ver o mundo à maneira dos matemáticos”⁵ (p. 340).

Por outro lado, os argumentos que agrupamos na Categoria 1 convergem para a idéia de que a disciplina Análise Real deve ser obrigatória na licenciatura porque possibilitaria ao professor da escola básica, entre outras coisas, desenvolver o “pensar matematicamente”, observar “como os matemáticos pensam”, compreender “o que significa matemática” ou, ainda, ter acesso, mesmo que parcial e restrito, a uma cultura específica, “a cultura matemática”. No nosso entendimento, essa categoria de argumentos sinaliza que, na visão de uma parcela dos matemáticos, o professor da escola básica deveria ter uma formação matemática na licenciatura que o preparasse para, se não “ver o mundo à maneira dos matemáticos”, como quer Schönfeld, pelo menos ver a matemática à maneira dos matemáticos.

A análise de Schönfeld, que ainda aborda questões como metacognição e o “fazer sentido em matemática”⁶ e que, de certa forma, poderia servir como fundamento teórico para os argumentos agrupados nessa Categoria 1, configura, de fato, uma perspectiva atraente como alternativa à tão criticada prática pedagógica que, no limite, reduz a educação matemática escolar à memorização e uso mecânico de fórmulas, aos cálculos sem muito sentido e à apreensão passiva de conceitos e resultados sem significados.

Pode-se, entretanto, questionar essa visão de Schönfeld em relação ao ensino e à aprendizagem da matemática na escola, pelo menos no que se refere a um aspecto fundamental: por mais difícil que seja obter um consenso sobre os objetivos do processo de escolarização (e o papel da educação matemática dentro desse processo), acreditamos não ser objeto de muita

⁵ No original: “a fundamental component of thinking mathematically is having a mathematical point of view, that is, seeing the world in the ways mathematicians do”. Todas as citações marcadas com o símbolo * são traduções nossas de originais em inglês.

⁶ No original em inglês, *sense making in mathematics*.

polêmica a afirmação de que a escolarização se refere a uma educação de caráter básico e geral e que não se coaduna com a idéia de dotar os alunos de uma ótica tão específica e particular como a do matemático profissional. “Pensar matematicamente”, no contexto da educação básica, se, por um lado, implica, de fato, a construção de conhecimentos e o desenvolvimento de formas de pensamento de uma área específica do saber escolar, não nos parece incluir, por outro, a internalização de uma visão própria de um grupo profissional altamente especializado, como o dos matemáticos. Mesmo porque, caso se generalizasse essa meta, teríamos os alunos da escola submetidos à construção de uma gama de “modos de ver o mundo”: à maneira dos geógrafos profissionais, dos biólogos profissionais, dos matemáticos profissionais, dos historiadores profissionais, etc.

Por outro lado, a profissão do professor de matemática da escola básica não se identifica, nem mesmo parcialmente, com a profissão do matemático. Os saberes profissionais, as condições de trabalho, as necessidades relativas à qualificação profissional, os resultados do trabalho profissional, tudo concorre muito mais para diferenciar do que para identificar as duas profissões. Por que, então — a nosso ver essa seria uma questão a ser aprofundada numa eventual seqüência do debate —, a formação matemática do professor da escola básica deveria se constituir a partir de valores, concepções e práticas específicas de uma “cultura matemática” a qual se tem relacionado historicamente com as práticas, valores e concepções da cultura escolar quase sempre através da emissão de prescrições?

Em segundo lugar, quando se considera a formação do professor do ensino básico, deve-se levar em conta que existem indicações de que as visões dos matemáticos profissionais acerca de determinadas questões referentes ao conhecimento matemático podem se mostrar inadequadas para a educação escolar básica, ou mesmo conflitantes com uma visão que valorize os aspectos cognitivos ou didático-pedagógicos, visão essa que é fundamental na prática educativa escolar.

Vinner (1991), por exemplo, abre seu artigo sobre o papel das definições no ensino-aprendizagem da matemática, referindo-se a um *conflito* entre a estrutura da matemática — como os matemáticos a vêem — e processos cognitivos de formação dos conceitos:

Definições criam um sério problema no aprendizado da matemática. Elas representam, talvez mais do que qualquer outra coisa, o *conflito entre a estrutura da matemática, da forma como é concebida pelo matemático profissional, e os processos cognitivos de formação de conceitos*. (p.65. Grifo nosso)*.

Sfard (1991) desenvolve uma análise do processo de abstração na matemática, relacionando dois aspectos de um mesmo conceito: o operacional (em que o conceito é visto como processo) e o estrutural (o conceito como objeto). Segundo ela, muitos conceitos matemáticos apresentam, dual e complementarmente, os aspectos operacional e estrutural, sendo que, na formação do conceito, o aspecto operacional seria precedente e, portanto, uma base sobre a qual se construiria a sua dimensão estrutural. O nível de abstração mais elevado — correspondente ao aspecto estrutural — seria atingido através das fases de interiorização (em que se modelam mentalmente as ações correspondentes ao aspecto processual do conceito), de condensação (em que as ações interiorizadas são coordenadas de modo que o processo é captado como um todo) e de reificação (em que o processo se transforma finalmente em objeto)⁷. Sfard fornece vários exemplos de conceitos básicos da matemática escolar — números naturais, racionais, negativos, função — que teriam passado por processos de interiorização e condensação, até serem tomados como objetos matemáticos. E cita resultados de algumas de suas pesquisas, que reforçariam a tese de que, no processo de aprendizagem, o aspecto operacional do conceito precede o estrutural.

⁷ Observamos que a palavra “reificação” é utilizada por SFARD (1991) em um sentido específico que difere daquele usualmente empregado na sociologia.

Uma implicação dessa tese seria a insuficiência, para a educação escolar, de uma visão lógico-formal-dedutiva da matemática, visto que as definições formais, por exemplo — que desempenham um papel fundamental nesse modo de organização do conhecimento matemático — geralmente apresentam os conceitos já no seu aspecto estrutural, ocultando, de certa forma, as etapas de interiorização e de condensação que, em princípio, facilitariam a construção da reificação.

Os esquemas referidos por Sfard são retomados por Dubinsky (1991), com um enfoque voltado para a matemática universitária. Seguindo Piaget, Dubinsky distingue três tipos de abstração: a empírica, a pseudo-empírica e a reflexiva. A primeira consistiria de abstrações a partir de propriedades dos objetos; a segunda, de abstrações a partir de ações do sujeito sobre o objeto; e a última, a abstração reflexiva, a partir da interiorização e coordenação dessas ações num processo que leva à construção de um novo objeto (diz-se que ele é, então, encapsulado; nos termos de Sfard, os elementos processuais do aspecto operacional são tornados “coisa”, reificados). Dubinsky prossegue, então, descrevendo como a formação de certos conceitos matemáticos pode estar conectada com as construções mentais descritas no processo de abstração reflexiva. Ao analisar, entre outros exemplos, as idéias envolvidas na prova por indução, Dubinsky identifica pontos no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem em que, se nos restringirmos a uma visão estritamente matemática da questão, podemos ser levados a ignorar ou minimizar dificuldades específicas que são importantes do ponto de vista cognitivo:

Retornando agora, à construção da prova por indução, apresentamos um exemplo de uma etapa que nossa pesquisa aponta como oferecendo sérias dificuldades cognitivas ao aluno, enquanto, do ponto de vista estritamente matemático, não há nem mesmo uma etapa a ser considerada. (...) Estamos nos referindo à noção de que, numa prova por indução não se prova a tese diretamente, mas a implicação entre duas proposições derivadas dela. (...) Seja P a

proposição a ser provada e seja $Q = \{P(n) \Rightarrow P(n+1)\}$. Então, de um ponto de vista matemático não há nada de novo em Q, isto é, uma vez que se entende P, então, como um caso especial, entende-se Q. Entretanto, como já observamos, com os estudantes as coisas não se passam desta maneira, isto é, este não é o caso, do ponto de vista cognitivo. Em primeiro lugar, proposições do tipo Q são as mais difíceis para os alunos e são, geralmente, as últimas a serem encapsuladas. Além disso, há uma diferença entre construir P(n) a partir de uma dada proposição e construir Q a partir de P. Essa é que é a etapa a ser ultrapassada. Se alguma sutileza há aqui, então se explica a dificuldade que os estudantes têm precisamente neste ponto (DUBINSKY, 1991, p.112-113).

De um ponto de vista abrangente, o que parece ocorrer é que os conhecimentos matemáticos profissionais do professor da escola se constituem a partir de seleções, adaptações, ampliações e transformações do conhecimento matemático lógico-formal-dedutivo, produzindo, como resultado desse processo, uma visão bastante diferenciada em relação àquela compartilhada pela comunidade dos matemáticos. Essas ações (adaptar, selecionar, transformar, ampliar) se desenvolvem parametrizadas pelas condições e demandas específicas da prática docente escolar — entre elas, o propósito educativo e as diferentes questões relacionadas aos processos de aprendizagem e de ensino — e constituem, em muitas circunstâncias, verdadeiros atos de produção de saber (SHULMAN, 1987; FIORENTINI et al., 1999; TARDIF, 2002). Assim, em particular, ao se estruturar o processo de formação na licenciatura, não se pode perder de vista que as visões dos professores da escola a respeito da matemática — com suas propriedades, impropriedades e insuficiências — se estabilizam, de fato, é no interior da “cultura escolar”, com todas as suas limitações, suas questões práticas e teóricas específicas, seus valores e seus diferentes condicionantes internos e externos.

Categoria 2

A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os “porquês” e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras.

Discussão

Antes de avançar nessa discussão, talvez seja interessante observar que, embora as categorias 1 e 2 constituam dois conjuntos de argumentos de natureza diferenciada, uma área de interseção das duas é inevitável. Assim, na forma em que desenvolvemos a discussão da categoria anterior, já avançamos sobre certos aspectos e assentamos alguns elementos para o debate a respeito desta segunda. Posto isso, o questionamento específico a ser colocado aqui seria o seguinte:

Em que medida e em que aspectos, a promoção de uma percepção “avançada” da matemática elementar na licenciatura pode ser tomada, concretamente, como um *aprofundamento* do conhecimento matemático visando a prática docente escolar? Por exemplo, com relação aos números reais, em que medida e em que aspectos específicos, a percepção desse conjunto numérico como um conjunto de objetos onde são satisfeitos os axiomas de corpo ordenado completo poderia fornecer uma visão sólida ou profunda para a educação escolar, explicar os porquês e dar mais segurança ao professor da escola básica? Se um aluno da escola pergunta o porquê da comutatividade do produto de números reais, por exemplo, seria uma explicação adequada ao processo de educação escolar dizer a ele que isso é um dos axiomas a que os reais devem satisfazer?

Colocando a questão em termos mais gerais, poderíamos perguntar: *de que formas concretas* a apresentação formal do conjunto dos números reais e um tratamento rigoroso das noções de continuidade, derivada e integral — como se costuma fazer na disciplina Análise na Reta — contribuiriam para dar segurança ao professor da escola ou para fornecer argumentos que possam ser usados para explicar os porquês que se colocam em questão na prática pedagógica escolar?

Já em 1930, Knight, referindo-se à Aritmética, analisava essa questão nos seguintes termos:

É bastante generalizada a idéia de que os matemáticos é que devem ser os responsáveis pela visão da aritmética a ser veiculada nos cursos de formação de professores. [...] *entretanto, uma procura assídua na literatura não consegue revelar como o domínio da matemática avançada pode ajudar no ensino da aritmética.* Por outro lado, é interessante pensar na possibilidade de existência de vários tipos de conhecimento da aritmética. Consideremos, por um momento, que há uma distinção útil entre o conhecimento da aritmética do ponto de vista da matemática e o conhecimento da aritmética do ponto de vista do ensino. *Quando a aritmética é analisada do ponto de vista do seu aprendizado pela criança, um conjunto diferente de critérios deve ser usado na avaliação do que seja “dominar o assunto”* (KNIGHT, 1930, p.161. Grifo nosso). *

Embora outros autores a tenham igualmente questionado, a idéia de que uma visão “avançada” da matemática elementar signifique necessariamente uma formação “sólida” ou “profunda” para o futuro professor da escola básica tem sido tomada como um consenso “natural”, desde os tempos em que o professor era formado no esquema 3+1, ou seja, os tempos da fórmula explícita “licenciatura = bacharelado + didática”. No entanto, nos últimos 20 anos, com o desenvolvimento de variados estudos sobre a prática dos professores e seus conhecimentos profissionais, essa crença começa a

ser posta em questão, com maior repercussão. Alguns estudiosos começam a fazer perguntas como as que colocamos acima e, apoiados em indícios coletados em suas investigações, passam a assumir uma atitude questionadora em relação à noção de que “conhecer matemática”, no sentido da matemática “avançada” (isto é, submetida a um modelo de organização axiomática, utilizando uma linguagem formal, com os conceitos “unificados” num alto grau de abstração e generalidade, etc.), nem sempre significa “conhecer a matemática escolar”, no sentido de ser capaz de dar respostas às questões que se colocam para o professor em sua prática docente escolar (SHULMAN, 1987; MARKS, 1990; LLINARES, 1995; COONEY, 1999; LINS, 2003; MOREIRA e DAVID, 2003a, 2003b).

Um outro argumento em favor de uma apresentação lógico-formal-dedutiva da matemática (como é feito usualmente na disciplina Análise na Reta) para o curso de licenciatura refere-se à constituição de uma visão estruturada e conexa do conhecimento matemático. Mas, perguntamos: não estaria tal argumento fundado na idéia de que a única alternativa ao “amontoado desconexo de fórmulas e regras” — que, sem dúvida, é parte efetiva da realidade escolar — seria a sistematização axiomática? Não seria possível pensar em uma organização e sistematização do conhecimento matemático orientada para a prática pedagógica na educação escolar básica, ou seja, referenciada nas questões da prática do professor da escola e não necessariamente nas da prática do matemático?

Categoria 3

A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências.

Discussão

O desenvolvimento de uma percepção da matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis — e muitas vezes cruciais — para se compreender melhor certos fenômenos da natureza ou mesmo algumas situações do cotidiano social é, sem dúvida, um elemento fundamental da formação do professor da escola básica. Quanto a isso, pensamos não haver grandes divergências. A questão que se poderia colocar aqui refere-se à forma segundo a qual se deve trabalhar, no curso de licenciatura, a construção desse tipo de visão do conhecimento matemático.

Dois perguntas são inevitáveis no contexto dessa argumentação em favor da obrigatoriedade da Análise na Reta para a licenciatura: com uma ementa e referências bibliográficas como as indicadas pela grande maioria dos 31 respondentes, de que modo a disciplina Análise na Reta poderia acrescentar, à formação do futuro professor da escola básica, elementos diretamente relacionados com aplicações a outras ciências? Não seria mais adequado redimensionar o trabalho nas disciplinas de Cálculo, Equações Diferenciais, Física, etc. — associando, talvez, uma abordagem que contemple discussões mais refinadas sobre o uso de modelos, por exemplo —, de modo a promover o desenvolvimento de uma percepção ampla e elaborada dessa dimensão “aplicada” do conhecimento matemático?

Considerações finais

Estudos sobre os conhecimentos profissionais e sobre a prática dos professores de matemática da escola sugerem que o conhecimento matemático, em sua sistematização lógico-formal-dedutiva e suas formulações conceituais com base nas “estruturas” — como é usualmente apresentado na disciplina Análise Real, por exemplo —, está longe de ser suficiente para dar conta das questões que se colocam para o professor em sua prática pedagógica. Uma crença bastante generalizada — mas que ainda

carece de fundamentação empírica e/ou teórica — é a de que tal conhecimento seja fundamentalmente necessário à formação do professor de matemática da escola básica. Essa crença, por seu turno, tem dado sustentação a um tipo de estruturação dos cursos de licenciatura em que o “conteúdo” da formação matemática é concebido como um corpo de conhecimentos que se situa estritamente no interior do campo da matemática acadêmica (i.e, a matemática tal como é vista pelos matemáticos profissionais). Uma das principais conseqüências disso é a conclusão de que a tarefa de articulação desses conhecimentos com a prática docente na escola deve se desenvolver no *exterior* da própria formação matemática — uma espécie de “missão impossível” das chamadas disciplinas integradoras. Ou então, como ocorre com freqüência, essa articulação acaba derivando do esforço individual do licenciado, ao iniciar a sua prática docente.

Por outro lado, com o enorme desenvolvimento das ciências cognitivas (aplicadas a questões específicas referentes ao aprendizado da matemática) e com a proliferação de estudos e investigações sobre a prática docente escolar e os saberes profissionais associados a essa prática, fica claro que uma articulação fundamentada entre os conhecimentos trabalhados na formação matemática e as questões postas pela prática pedagógica na escola básica é uma tarefa excessivamente complexa para ser atribuída ao esforço individual do licenciado ao longo de sua prática. Há um consenso, hoje, de que essa articulação deve ser considerada como uma das mais importantes tarefas dentro do próprio processo de formação na licenciatura.

A questão que se discute, entretanto, é como realizar institucionalmente essa tarefa, tendo em vista o fracasso histórico do modelo das “disciplinas integradoras”. Uma alternativa seria a reorganização do processo de formação matemática dentro da licenciatura, para que ele não se desenvolva de maneira autônoma — acarretando que o restante das atividades do curso tenha que se estruturar para lhe dar um sentido pedagógico, visando a prática escolar —, mas que, ao contrário, a formação matemática se realize em conexão efetiva com as questões que se colocam

na prática docente na escola, idéia que já vem orientando algumas experiências de formação continuada (ver, por exemplo, FIORENTINI; JIMENEZ, 2003).

Não se trata, nesse caso, de uma concepção que implique necessariamente “baixar o nível” da formação matemática na licenciatura, como freqüentemente é alegado. Trata-se exatamente de superar essa visão dicotomizada das relações entre formação matemática “sólida” e as demandas de conhecimento da prática docente escolar. Trata-se de trabalhar a formação matemática do futuro professor, no sentido de promover a elaboração de uma síntese que seja, ao mesmo tempo, provisória — pois será seguramente reelaborada a partir da experiência — e complementar ao processo de formação que se desenvolve na prática, para que a reelaboração não tenda a negar essa síntese e sim a estendê-la e aprofundá-la.

Essas idéias levam ao interesse por um entendimento aprofundado da prática docente escolar em matemática e por respostas concretas a questões que se referem ao papel, ao dimensionamento adequado e à contribuição efetiva que um enfoque “avançado” pode oferecer ao processo de articulação da formação do professor com a prática na escola. Essa seria, então, uma direção possível para o prosseguimento e aprofundamento da discussão, mais genérica, que apresentamos neste texto.

Referências bibliográficas

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.

BRASIL. Ministério da Educação. *Conselho Nacional de Educação*. Parecer CNE/CP 28/2001. Aprovado em 02/10/2001. Brasília, 2001. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br/sesu/ftp/pareceres/02801formprof.doc> Acesso em 29/05/2005.

COONEY, T.J. Conceptualizing teacher's way of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, n. 38, p. 163-187, 1999.

- DUBINSKY, E. *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. In: TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.95-126, 1991.
- FIORENTINI, D.; NACARATO, A.M.; PINTO, R.A. *Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada*. *Quadrante*, Lisboa, v.8, n.1/2, p. 33-60, 1999.
- FIORENTINI, D.; JIMENEZ, A. (org.) *Histórias de aulas de matemática*. Campinas: CEMPEM, 2003.
- KNIGHT, F.B. *Some considerations of method*. In: *Twenty-Ninth Yearbook of the National Society For The Study Of Education*. Illinois: Public School Publishing, p.145-267, 1930.
- LINS, R. Os problemas da Educação Matemática. FolhaOnLine [Sinapse], 29 abr. 2003. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/>> Acesso em: 29 abr. 2003.
- LLINARES, S. Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. IN: BLANCO, L. y MELLADO, V. (coord.). *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Badajoz: DDCCEE-DM, p.153-172, 1995.
- MARKS, R. Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, v.41, n.3, p.3-11, 1990.
- MORAES, R. *Análise de conteúdo*. Educação, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.
- MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, v.11, n.19, p.57-81, 2003a
- MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. In: *Reunião Anual da Anped*, 26, 2003, Poços de Caldas. Atas. Poços de Caldas: ANPED, CD-Rom, 2003b.
- NAVARRO, P.; DIAZ, C. Análisis de contenido. In: DELGADO, J.M.; GUTIERREZ, J. *Métodos y técnicas cualitativas de investigación em ciencias sociales*. Madrid: Síntesis, p.177-224, 1994.
- PATTON, M. Q. *Qualitative evaluation methods*. London: Sage, 1980.
- SCHOENFELD, A.H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In: GROWS, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: NCTM, p.334-370, 1992.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v.22, n.1, p.1-36, 1991.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

TARDIF, M. *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis: Vozes, 2002.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.65-81, 1991.