O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes[1]

Anna Regina Lanner de Moura[*] *e Maria do Carmo de Sousa*[**]

Resumo: Este artigo tem como objetivo abordar o lógico-histórico da álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica e sua relação com a álgebra simbólica. Aqui o lógico-histórico tem a função de mostrar os elementos historicamente construídos e que constituem os nexos conceituais do pensamento algébrico: os conceitos de fluência; de variável; e de campo de variação, uma vez que definimos a álgebra enquanto escrita de movimentos da realidade e consideramos que o lógico-histórico da álgebra simbólica contém em seu bojo o desenvolvimento histórico da álgebra não simbólica. Nesta perspectiva a álgebra simbólica representa a síntese de um longo processo histórico humano que busca romper com o imutável, com o acabado, com o absoluto.

Palavras-chave: Lógico-histórico; álgebra; fluência; campo de variação; variável.

The logic-historical of not symbolic and symbolic algebra: two different views

Abstract: This article has the objective to approach the logic-historical of not symbolic algebra: rhetoric, syncopated and geometric and the relationship with the symbolic algebra. The logic-historical has the function to signify the elements that has been constructed historically and that is constitutive to the conceptuales nexus of the algebric thoughts: the concepts of fluency, variable and variation field, once we define algebra as the movements of reality being written and we consider that the logic-historical of algebra symbolic has in the essence the historical development the not symbolic

---

[1] Parte integrante da Tese de Doutorado intitulada: “O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental”, defendida em 12/03/04 na Faculdade de Educação – UNICAMP, sob orientação da Professora Doutora Anna Regina Lanner de Moura. A pesquisa contou com o financiamento da FAPESP.

[*] Professora Doutora do Departamento de Metodologia do Ensino da Faculdade de Educação da UNICAMP/SP. Coordenadora do Grupo de Pesquisa “Educação Conceitual” (FE – UNICAMP). lanner@unicamp.br.

** Professora Doutora do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista, Campus de Presidente Prudente/SP. Membro dos Grupos de Pesquisa: “Educação Conceitual” (FE - UNICAMP) e “Ensino Aprendizagem” (FE - UNESP – Presidente Prudente). mdcsousa@itelefonica.com.br.

algebra. In this perspective, the symbolic algebra represents the synthesis of a long historic process of the humanity that searches to break with the immutable, with the unchangeable, with the absolute.

Key words: Logical-historical; algebra; fluency; variation field; variable.

Introdução

Compreender o lógico-histórico da álgebra simbólica significa compreender o processo do vir-a-ser da variável-letra. É compreender que, no processo de constituir-se linguagem simbólica, síntese da síntese de abstrações diversas, a álgebra contém o movimento da vida, expresso a partir da palavra e da figura. Contém os inesperados e as novas qualidades de que fala Caraça (1998), que são gerados a partir dos movimentos presentes nos problemas da vida das diversas culturas. Tais movimentos, analisados com o olhar de hoje, são históricos, porém, não são lineares, pois contêm a incerteza, a mutabilidade e a fluência do pensar humano. Por esse motivo é que os movimentos estudados na álgebra simbólica são considerados, por nós, lógico-históricos.

É esse lógico-histórico e formal do pensamento algébrico - presente nos estágios denominados de retórico, sincopado e geométrico - que leva ao pensamento flexível da realidade, elaborado pelas várias civilizações, nos diversos momentos históricos, que trataremos a seguir.

Modo I

A aparição da álgebra está associada à origem do zero e foi definida por Bell (1995), segundo Fraile (1998), como fenômeno notável da história. Sua aparição considera o pensar humano das diversas civilizações. Na mesma linha de raciocínio, segue Ifrah (1998, p. 237), ao afirmar que "do infinito ao zero há um só passo: o que leva à álgebra, já que o nulo é o inverso do ilimitado".

O zero foi uma "invenção difícil e genial" e abriu "caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os ramos da matemática a partir do Renascimento europeu". Porém,

> a álgebra não teria conhecido um tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada em 1591 por François Viète e aperfeiçoada em 1637 por René Descartes: a notação simbólica literal (IFRAH, 1998, p. 237)

A invenção da notação simbólica literal "abriu uma era totalmente nova na história da matemática, assim como a descoberta do princípio de posição e do zero criou a aritmética moderna" (IFRAH, 1998, p. 237).

A álgebra moderna, ensinada em nossas escolas, constitui a generalização do número, que por sua vez, não está dissociado dos números transfinitos de Cantor, da criação dos números algébricos, que foram definidos como aqueles que representavam "a solução de uma equação algébrica de coeficientes inteiros", no século XIX, por Niels Henrik Abel e Evariste Galois (IFRAH, 1998, p. 331).

Ao focar as lentes no objeto história do surgimento do pensamento algébrico, para melhor estudá-lo, teóricos, pensadores e historiadores o dividem, fazem *isolados* (CARAÇA, 1951; 1984, 1998). Os *isolados* referem-se a recortes arbitrários que fazemos da realidade pela necessidade e comodidade de estudo.

Fraile (1998) diz que, antes de se inventar a palavra álgebra, propriamente dita, tínhamos a pré-álgebra, enquanto Paradís et al. (1989) nos afirmam, em seus estudos, que existem a álgebra não simbólica e a álgebra simbólica.

A álgebra simbólica representa o lógico do histórico da álgebra que envolveu, durante séculos, palavras e figuras geométricas. Ela representa o lógico do histórico da variação, cuja notação passou por três estágios ou fases: retórica, sincopada e simbólica (Caraça, 1998; Boyer, 1974; Eves, 1997; Paradís & Malet, 1989; Usiskin, 1995; Smith, 1958; Fraile, 1998; Ríbnikov, 1987).

Entendemos que, se considerarmos, como Socas et al. (1996) e Lins & Gimenez (1997), que os estágios ou fases: retórica, sincopada e simbólica da álgebra constituem apenas a evolução de notações, estaremos considerando apenas o final do processo, o lógico-formal da variável-letra. Não estaremos considerando todo o processo, o percurso do movimento do pensar humano, que configura as diversas elaborações sobre os conceitos de número, movimento e variável, que permitiram a elaboração do conceito de variável.

A linguagem retórica da álgebra é definida por Fraile (1998, p. 11) como "a ferramenta inicial, a mais básica, a linguagem ordinária". É com essa linguagem, retórica, que, após uma depuração e precisão dos termos para que se evitem ambigüidades, fazem-se maravilhas: "reflete-se, constroem-se teorias". Tomemos, como exemplo, a lógica aristotélica, que serve não apenas para se comunicar, mas também como *ferramenta de pensamento.*

A álgebra retórica, quando estudada do ponto de vista dos estágios, pertence ao período que antecede Diofanto. Nesse estágio, há o uso de descrições em linguagem comum para resolver tipos particulares de problemas e para suprimir a falta de símbolos ou sinais especiais para representar incógnitas (KIERAN, 1994). Há apenas o uso das palavras (LINS & GIMENEZ,1997). Nesse estágio, "os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos" (EVES, 1997, p. 206).

Do ponto de vista de Lima & Moisés (1993; 2000), uma palavra, *ahá*, que significa monte, montão, foi criada pelos egípcios para representar quantidades, sem, necessariamente, recorrer ao numeral. É a partir de uma palavra que os egípcios pensam sobre o valor desconhecido, a incógnita.

> A criação egípcia marca o ponto de partida do desenvolvimento da linguagem matemática. Com ela, o pensamento matemático começa a desenvolver uma linguagem própria, diferente da linguagem usual das palavras. É, portanto, com a matemática egípcia, que a linguagem matemática começa a se separar da linguagem usual. Trata-se da linguagem matemática através de palavras, que apesar de ser um pequeno passo, quase despercebido por ainda usar palavras, foi importante no sentido de criar um vocabulário próprio – a língua da matemática. A linguagem Matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos (Lima & Moisés, 2000, p. 27-8).

Através de uma palavra, *aritmo,* Diofanto resolve problemas que envolvem incógnita. A palavra escolhida por Diofanto está associada ao número, representa o próprio número, *aritmo*. Diofanto reconhece, na incógnita, o pensamento numérico. Ao solucionar problemas, desprende-se do numeral físico, porém, ao criar uma palavra que represente o desconhecido, a incógnita, faz questão de nos avisar que a incógnita, o desconhecido, representa um número. Assim como o zero, a palavra *aritmo* guarda o valor de uma quantidade desconhecida.

Árabes e europeus, ao se lançarem na resolução de problemas algébricos e desafios que envolveram romances, vida e morte, durante séculos, representam o desconhecido, a incógnita, a partir da palavra coisa ou raiz (GARBI, 1997; FRAILE, 1998; EVES, 1953, 1997). Aqui, a função da palavra é equivalente à função do zero na aritmética, por assegurar que ali falta algo. A palavra representa a *casa* ou o valor desconhecido.

Al-karismi construiu uma álgebra retórica. Em seu livro, *Kitab al-jbr wa al-muqabalah*, livro da restauração e da oposição, não usa simbolismo e detalha "passo por passo com instruções precisas tudo o que se tem que fazer". Tem como objetivo, segundo Fraile (1985, p. 25), "sistematizar todas as equações de primeiro e segundo graus reduzindo-as a seis tipos básicos":

1) Quadrado igual à raiz.
2) Quadrado igual ao número.
3) Raiz igual a número.
4) Quadrado e raiz são iguais a número.
5) Quadrado e número são iguais à raiz.
6) Raiz e número são iguais a quadrado.

O livro ainda reúne tradições mesopotâmicas, hindus e gregas, embora não pertença a nenhuma das três civilizações.

Hogben (1970) afirma que a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica pode trazer dificuldades, até mesmo entre os matemáticos, ao traduzir problemas em linguagem vulgar usada pelo homem comum em sentença matemática. Não há como aprender matemática sem aprender a fazer a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica. Ao resolvermos equações, estamos efetuando essa transição, de forma que o significado da equação venha a se tornar evidente para nós. Aqui se defende a idéia de que a matemática é compreensível se compreendermos a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica.

O autor compara a dificuldade que temos, ao fazer a tradução da retórica para a simbólica, com a aprendizagem de uma língua estrangeira, uma vez que toda língua contém suas idiossincrasias particulares de ordenação e idioma. Se não conhecermos o idioma, ao tentarmos traduzir uma frase só a partir da utilização do dicionário, corremos o risco de confundir-nos.

A retórica, definida a partir da sua base comum, é "discurso natural que serve para convencer. A retórica na matemática seria, simplesmente, a linguagem comum posta a serviço de convencer-nos de que alguma coisa ligada à matemática é o ponto importante", alerta-nos Davis & Hersh (1988, p. 69). O matemático, ao elaborar suas demonstrações lógicas e formais nos diversos teoremas que estuda, faz uso da retórica. As frases que usa para nos convencer de que está certo não constituem a prova do teorema. "Elas são a retórica a serviço da prova" (DAVIS & HERSH, 1988, p. 70). A verdade da matemática "é considerada como estabelecida por meios que são a antítese da retórica". Não podemos nos esquecer "que a filosofia da matemática também evolui mediante a argumentação retórica" (DAVIS & HERSH, 1988, p. 69). Aqui, a retórica presente na álgebra nos auxiliaria a compreendermos as demonstrações e argumentações que se apresentam no cálculo de operações da álgebra simbólica.

A álgebra geométrica foi elaborada pelos gregos em um contexto onde predominava a "degradação do número, o horror ao infinito e o horror ao movimento" (CARAÇA, 1998, p. 78), ao *devir*, ao vir-a-ser A geometria estava descolada da aritmética. Nesse tempo, as verdades eram representadas a partir das formas. Há o primado da figura em relação ao número. A geometria se distingue pelo esforço em criar, a partir das necessidades científicas, "uma teoria matemática geral adequada tanto para os números racionais como para as grandezas irracionais". Acreditava-se que as grandezas geométricas eram muito mais completas do que o conjunto dos números racionais. Até que se descobrisse a irracionalidade numérica, era oportuno operar a partir de um cálculo mais geral, o geométrico (RÍBNIKOV, 1987, p. 54).

Os segmentos de reta são os elementos primários da álgebra geométrica. A partir deles foram se definindo todas as operações do cálculo: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A soma era representada como adição de segmentos. A diferença como eliminação de parte do segmento igual ao segmento subtraendo. A multiplicação conduzia à construção de representação bidimensional. O produto de **a** por **b** representava um retângulo com lados **a** e **b**. O produto de três segmentos formava paralelepípedo e não se podia considerar o produto maior de fatores. A divisão só podia ser efetuada quando o dividendo era maior do que a dimensão do divisor. Representava-se a divisão a partir do conceito de área (RÍBNIKOV, 1987).

Na álgebra geométrica incluía-se, também, o conjunto de "proposições geométricas que interpretavam as identidades algébricas". O livro II de Euclides "*contém transformações algébricas como o cálculo de* $\boldsymbol{a(b+c)}$ *ou* $\boldsymbol{(a+b)^2}$ *mediante métodos geométricos".* O método geométrico serve para resolução da equação quadrática em geral: $\mathbf{x^2 = a\,(a - x)}$, enquanto *ampliação do Teorema de Pitágoras e do Teorema da altura* (HOFMANN, 1961, p. 31).

Tomemos, por exemplo, a identidade: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$. Ao se geometrizar tal identidade, temos como resultado a área de um quadrado de lado **a + b**, que é representado pela área de um quadrado de lado **a**, $\mathbf{a^2}$; acrescido da área de dois retângulos de lados **a** e **b**; **2ab**; acrescido da área de um quadrado de lado **b**, $\mathbf{b^2}$. A álgebra geométrica pode ser equivalente e tem o mesmo papel da geometria das equações das seções cônicas expressa nos trabalhos de Apolônio, cientista rival de Arquimedes (RÍBNIKOV, 1987).

Por linguagem sincopada podemos entender “o passo intermediário entre a resolução retórica, com língua ordinária, dos problemas e a utilização de símbolos precisos e de aceitação universal” (FRAILE, 1998, p. 12).

Ao invés de escrevermos tudo, como na retórica, construímos estruturas que aparecem continuamente na resolução dos problemas. Escrevemos abreviado. Tal linguagem, a sincopada, está muito próxima da linguagem simbólica. Há alguma notação especial, em particular palavras abreviadas (LINS & GIMENEZ, 1997). É uma fase intermediária entre a expressão retórica e a escrita simbólica atual. Pode-se dizer que a linguagem sincopada simplifica a escrita “ao modo de uma taquigrafia” (FRAILE, 1998, p. 28). Na álgebra sincopada, “se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente” (EVES, 1997, p. 206).

A exemplo de Euclides, Arquimedes e Apolônio, Diofanto utiliza-se da figura para elaborar e resolver problemas que envolvem incógnita. Ao mesmo tempo em que se utiliza das abreviações, o matemático nos mostra como podemos solucionar problemas que envolvem equações de grau dois, se soubermos completar quadrados.

A obra de Diofanto, intitulada *Arithmetica*, contém 189 problemas, os quais foram resolvidos por métodos diferentes, usando linguagem direta e simples (FRAILE, 1998).

> Segue e desenvolve a tradição egípcio-babilônica em oposição ao método grego. Nos oferece, em forma muito algebrizada, com a introdução de abreviaturas adequadas, exemplos interessantes que nos demonstram como domina

> perfeitamente a resolução de equações lineares (HOFMANN, 1961, p. 44).

Ao resolver os problemas, utiliza valores numéricos especiais e só realiza operações com números. Não trata de teoremas gerais. Ao designar a quantidade da incógnita nas equações e escrever as funções desta, foi obrigado a elaborar um sistema de símbolos. Sua simbologia está relacionada à abreviação das palavras (RÍBNIKOV, 1987).

Na época de Diofanto,consideravam-se os conceitos de números poligonais[2] surgidos na matemática pitagórica "como conseqüência da interpretação geométrica das relações teórico-numéricas" e estendeu-se essa idéia ao espaço, obtendo-se números espaciais. Representavam-se esses números por famílias de paralelepípedos semelhantes, números piramidais, dentre outros. O nome de Diofanto também está associado à teoria dos números. Sua obra representa a substância do ponto de partida para as investigações teórico-numéricas e algébricas (RÍBNIKOV, 1987).

A sincopação da álgebra considera os estudos do matemático grego Diofanto, que, por sua vez, constitui em nexos conceituais as figuras e imagens que auxiliam o pensamento, na elaboração de abstrações e na resolução de equações, característica própria da matemática grega. "A difusão da escrita sincopada coincide com o desenvolvimento da imprensa". (FRAILE, 1998, p. 28).

Segundo Hofmann (1961, p. 44), os muçulmanos continuam a usar os princípios algébricos de Diofanto e a origem do período barroco (1450-

---

[2] "Designam-se os números por pontos e distribuem-se em forma de qualquer figura. Assim, as somas parciais das progressões aritméticas podem ser representadas na forma de polígonos semelhantes e os correspondentes valores numéricos podem chamar-se (e se chamam) poligonais" (RÍBNIKOV, 1987, p. 101).

1580) “contém o desenvolvimento das idéias diofantinas, a álgebra de letras e a moderna teoria dos números”.

Quando estudamos a relação existente entre os trabalhos de Diofanto e Viète, entramos, de certa forma, em um fogo cruzado e divergente dos historiadores da matemática. A argumentação de todos eles é convincente. Fica muito difícil tomar partido de uma ou outra visão.

Há historiadores que consideram Viète como o compilador, o sistematizador do trabalho de Diofanto, enquanto que o trabalho de Klein (1968) é elogiado por Piaget & García (1984), por romper com essa visão, mostrando-nos a insuficiência da argumentação feita pelos diversos historiadores. Piaget & García (1984, p. 138) afirmam que Klein (1968) tem o mérito de nos mostrar porque Viète “deve ser considerado como o verdadeiro fundador da álgebra”.

Pensar a álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar a álgebra a partir de Euclides significa pensar a álgebra a partir de aspectos geométricos, a imagem, a figura. Pensar sobre a álgebra a partir do número e dos aspectos geométricos remete-nos a pensar sobre os entes, as coisas.

Pensar a álgebra, a partir de Viète, significa pensar a álgebra a partir da propriedade do número, que contém as coisas e a numerosidade do número, o número em geral. Permite-nos pensar em espécies e não mais em entes, em coisas. As espécies contêm o número, a geometria e a numerosidade do número, as propriedades do número. A natureza do pensamento de Viète é bem diferente da natureza do pensamento de Diofanto.

A lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies, é o que permite que as diversas áreas do conhecimento façam da álgebra, uma ferramenta. É a partir de Viète, segundo Piaget & García (1984, p. 139), que podemos pensar no "formalismo simbólico, ferramenta mais importante da ciência natural matemática, a fórmula".

A importância do trabalho de Viète está no "cálculo 'especioso', na operação com espécies, com letras" (FRAILE, 1998, p. 33). "O cálculo de Viète se precede pela aritmética, a qual opera com números: logística numérica. O cálculo com letras recebe o nome de logística speciosa, da palavra espécies que é o termo de uma expressão matemática" (RÍBNIKOV, 1987, p. 133).

O pensamento de Viète continha os grandes êxitos dos matemáticos italianos na resolução das equações de 3^o e 4^o graus, que se apoiavam na grande efetividade dos métodos algébricos, porém Viète achava que era necessário "conjugar a efetividade dos métodos algébricos com o rigor das construções geométricas antigas", que já lhe eram conhecidas, as quais representavam "modelos de autêntica análise científica" (RÍBNIKOV, 1987, p. 133).

Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. A característica do cálculo elaborado por ele é a arte. Tal característica permitiria a realização das descobertas matemáticas. Os símbolos elaborados sofreram modificações pelos matemáticos contemporâneos. Apesar da beleza do trabalho, a álgebra de Viète era ainda "imperfeita e tinha grandes insuficiências". Rapidamente, foi ofuscada pela álgebra de Descartes (RÍBNIKOV, 1987, p. 136).

Em um primeiro momento, a algebrização de Viète representou "uma generalização da aritmética", onde o "**x**", "**y**" ou qualquer outra letra constituíam "uma espécie de novo algarismo" e representavam "um número, ainda desconhecido". Pode-se dizer que as letras se tratavam de sinais que estavam à espera de um número, que deviam ocupar "o lugar de um ou de vários algarismos, por vir, assim como o zero ocupa lugar de uma ordem de potência sem conteúdo" (IFRAH, 1998, p. 337-8).

Porém, as letras não são "um mero artifício da forma. O uso da letra alfabética para designar um parâmetro ou uma incógnita, liberou definitivamente a álgebra da escravidão do verbo". Antes da notação literal, toda proposição geral continha a ambigüidade das línguas humanas, e "qualquer afirmação levava ao domínio das interpretações sujeitas a todo tipo de variação" porque não passava de palavrório. O simbolismo algébrico "criou uma espécie de 'língua internacional' compreendida sem equívoco pelos matemáticos do mundo inteiro" (IFRAH, 1998, p. 337-8).

Em seguida, "a notação literal se libertou por si mesma de determinadas variações das quais ficara prisioneira durante séculos: o '**x**' e o '**y**' não mais representaram simplesmente números, mas tornaram-se totalmente independentes dos objetos ou das grandezas que deveriam figurar, adquirindo uma significação que ultrapassava o objeto representado, tornando-se, a partir de então, um ser matemático completo, submetido às regras do cálculo ordinário". A letra permite que os raciocínios sejam abreviados e sistematizados, tornando o acesso ao abstrato muito mais fácil (IFRAH, 1998, p. 337).

Segundo Ifrah (1998, p. 338), Leibniz afirmava que *este método,* a algebrização pelas letras, "poupa o espírito e a imaginação, cujo uso é preciso economizar". Tal método "nos permite raciocinar sem muito esforço, ao colocar os caracteres no lugar das coisas para desimpedir a imaginação".

Modificação conceitual: esta é a definição que podemos dar à linguagem simbólica proposta por Viète. Tal linguagem, a partir de convenções, tem por objetivo auxiliar o pensamento na realização de suas tarefas. Propicia à matemática ser ferramenta para outras ciências (FRAILE, 1998). É na álgebra simbólica "que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos, que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam" (EVES, 1997, p. 206).

Se considerarmos a álgebra simbólica como estágio, estamos nos referindo ao terceiro e último estágio, onde há o uso da letra para significar o que era dado, como também para a quantidade incógnita (KIERAN, 1994). Há apenas os símbolos e sua manipulação (LINS & GIMENEZ, 1997). Através dos símbolos, a álgebra pode manejar toda classe de problemas em um só episódio de raciocínio (KLINE, 1998).

A partir de Viète, no período que vai de 1550 até 1650, a álgebra pouco a pouco muda o seu sentido, porém, há de se considerar que:

> no exílio, Viète estuda as edições matemáticas clássicas de Commandino (impressas desde 1558); ademais, as obras de Cardano (1545; 1570); Tartaglia (1546; 1556/80); Bombelli (1572); Holtzmann Diophant (1575) e Stevin (1585). O formalismo algorítmico repetindo-se sempre em Diophant e seus interpretadores, lhe induz, ao tratar-se de transformações gerais, a introdução de grandezas algébricas numericamente indeterminadas, a saber, das letras em vez dos números. Assim, se origina a Logística Speciosa, na qual as grandezas conhecidas se designam por consoantes e as desconhecidas, por vogais (HOFMANN, 1961, p. 113).

Pode-se afirmar que, "em outros aspectos, Viète apenas tem superado os seus mestres italianos por limitar o emprego das letras a grandezas positivas, tendo que distinguir muitos casos supérfluos. Nesse sentido, a álgebra de letras empregada algoritmicamente é reduzida a exemplos numéricos, explica o sentido e o conteúdo da coleção de Diofanto, é usada como meio auxiliar em geometria, como explicará o livro VII das coleções de Pappo" (HOFMANN, 1961, p. 115).

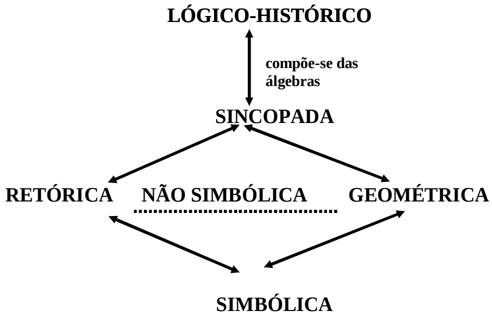
A álgebra retórica, sem simbolismo, parece-se com a álgebra desenvolvida e aplicada pelos egípcios, babilônios, gregos, hindus e árabes. Do ponto de vista de Kline (1998), pode-se afirmar que a álgebra simbólica chegou à álgebra, tarde, nos séculos XVI e XVII. A idéia de utilizar símbolos não era nada nova e, naquele período, as outras ciências estavam fazendo pressão para que a matemática aumentasse a sua eficiência. Assim, os matemáticos foram estimulados a estender a aplicação do simbolismo e rapidamente o adotaram.

O lógico-histórico da álgebra do ponto de vista de Hofmann (1961, p. 10-11) mostra ainda que no contexto da civilização babilônica "as instruções dadas para o manejo de exercícios práticos são pouco menos que introduzíveis à linguagem vulgar e mostram certo grau de parentesco com as reproduções algébricas em forma de fórmulas".

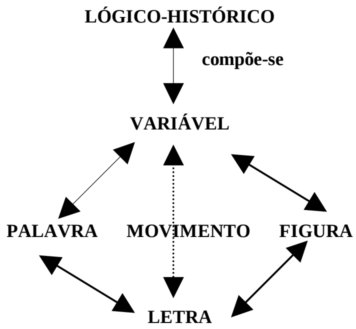
Os esquemas seguintes sintetizam o desenvolvimento da linguagem algébrica que denominamos de Modo I.

O primeiro quadro mostra que o lógico-histórico da linguagem algébrica compõe-se das álgebras não simbólica e simbólica.

ESTÁGIOS/CLASSES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO I

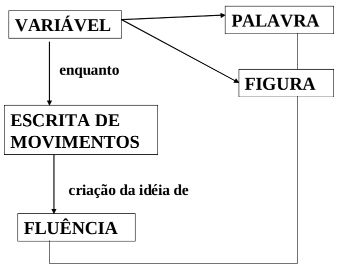


Nessa perspectiva, conforme mostra o quadro seguinte, consideram-se as relações ou nexos presentes no conceito de variável a partir da palavra, da figura e da letra.



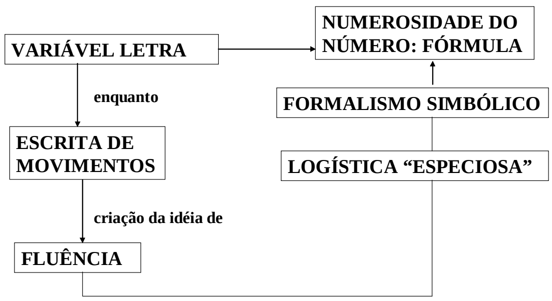
A variável, em seu processo lógico-histórico, representou a escrita de movimentos da realidade, ou seja, a própria fluência, a partir da palavra e da figura. A partir da álgebra não simbólica.

ÁLGEBRA NÃO SIMBÓLICA: RETÓRICA, SINCOPADA E GEOMÉTRICA (Smith, 1958)



A partir do momento em que a variável se caracterizou pela letra, diz-se que estamos diante de uma mudança conceitual, da álgebra simbólica.

ÁLGEBRA SIMBÓLICA: MUDANÇA CONCEITUAL



O modo I da álgebra caracteriza-se fundamentalmente pela contribuição das diversas civilizações no que diz respeito à criação da álgebra simbólica.

A álgebra simbólica ou a logística *especiosa* de Viète representou uma radical mudança conceitual no pensamento da época, no Renascimento.

Com a álgebra simbólica é possível elaborar as fórmulas. Há, nesse período, a necessidade de criar conceitos mais gerais que dêem conta de entender os movimentos da vida. A palavra e a figura vão para um segundo plano, porque são ambíguas. Imagine-se, em pleno período do Renascimento, ter que explicar todas as palavras particulares e figuras elaboradas, para representar determinados movimentos da vida.

O novo contexto econômico, político, social e cultural do Renascimento traz novas necessidades. É a fluência - e a interdependência - empurrando o pensamento humano para frente.

Modo II

Como já vimos, ao analisarem o contexto histórico do pensamento algébrico, Socas et al. (1996) consideram que o desenvolvimento da álgebra passou por três fases: a álgebra geométrica, a álgebra simbólica e a álgebra abstrata contemporânea ou álgebra moderna.

A primeira fase compreende o período de 1700 a.C. a 1700 d.C. Há a invenção gradual dos símbolos e a resolução de equações. A álgebra desenvolvida pelos gregos (300 a.C.) é chamada de álgebra geométrica. É rica em métodos geométricos para resolver equações algébricas.

A nova etapa está associada a Viète (1540-1603) e à introdução da notação simbólica. Destaca-se a contribuição de Descartes (1596-1650).

Nesse momento, a álgebra se converte na ciência dos cálculos simbólicos e das equações.

Euler (1707-1783) a define como a teoria dos “cálculos com quantidades de distintas classes” (cálculos com números racionais inteiros, frações ordinárias, raízes quadradas e cúbicas, progressões e todo tipo de equações). George Peacock (1791-1858) produz trabalhos que vão fundamentar e justificar as operações com expressões literais.

A ele se deve o:

> princípio da permanência, que diz: Todos os resultados da álgebra aritmética que se deduzem por aplicação de suas regras e que são gerais em sua forma, ainda que particulares em seu valor, são igualmente resultados da álgebra simbólica, donde são gerais tanto em seu valor como em sua forma (SOCAS et al. 1996, p. 40).

Até o final do século XVIII e primeira metade do século XIX, a álgebra era a ciência das equações e seu problema fundamental firmava-se na teoria de resolução de equações algébricas.

A terceira fase, a álgebra abstrata contemporânea ou álgebra moderna prescinde dos números, por isso,

> álgebra abstrata e os objetos utilizados podem ser quaisquer (matrizes, vetores, tensores etc.) sobre os quais se definem certas operações que verificam umas determinadas propriedades, construindo-se a álgebra a partir de axiomas previamente definidos (SOCAS et al. 1996, p. 40).

Apesar de os teóricos e historiadores divergirem quanto ao desenvolvimento histórico da álgebra, todos consideram que o termo foi assimilado pelas diversas civilizações a partir da escrita de um tratado denominado *Al-jebr w´al mûqâbalah,* escrito por Mohammed ibn Mûsâ al-

Khowârizmi, no início do século IX (CARAÇA, 1951; 1984; 1998; RÍBNIKOV, 1987; HOGBEN, 1970, EVES, 1953, 1997; ALEKSANDROV, et al. 1988).

Esse tratado se refere a uma das regras de resolução da equação do primeiro grau, talvez a mais importante, que consiste da passagem de um termo de um membro da igualdade para outro, com troca de sinal. Assim, ao resolver uma equação do tipo **ax + b = 0**, temos duas passagens fundamentais que são conseqüências diretas das leis elementares da aritmética:

1ª) de **ax + b = 0** para **ax = - b**

2ª) de **ax = - b** para **x = - b/a**

O uso dessas regras tornou-se muito freqüente e a influência desse tratado foi muito grande. O nome *al-jebr* passou a designar tudo que diz respeito às equações e todo um ramo de uma ciência (CARAÇA, 1951; 1984; 1998; RÍBNIKOV, 1987; HOGBEM, 1970; EVES, 1953, 1997; ALEKSANDROV et al. 1988).

Há autores, como Lins & Gimenez (1997), que fazem críticas a essa *tendência letrista* da álgebra, que estamos abordando.

Para eles, ao seguirmos os passos do pensamento algébrico por mudanças na notação, deixamos de lado, no caso da história, a álgebra islâmica medieval (a partir de Al-karismi) e quase tudo da matemática chinesa clássica. Além disso, não é possível saber até hoje os primeiros passos dados por Diofanto em relação à notação. Nesse sentido, há uma grande perda, porque o que temos nesses dois casos são conceitualizações que não são redutíveis a outras, como, por exemplo, a de Diofanto.

Os autores afirmam ainda que não é possível ver Al-karismi nem como *evolução* em relação ao trabalho de Diofanto, nem como *contido* em

Diofanto. “Do ponto de vista da técnica, a álgebra de Al-karismi é muito mais pobre do que a aritmética de Diofanto, mas o que é feito em Al-karismi não pode ser encontrado em Diofanto” (LINS & GIMENEZ, 1997, p.96-7).

Lins & Gimenez (1997) fazem ainda uma crítica ao matemático francês Jean Dieudonné, que diz, em seu livro *Em honra do espírito humano*, que Al-karismi foi *autor* de obras de astronomia e de um tratado de álgebra sem originalidade. Entendem os autores que Dieudonné fez essa declaração sem profundidade - pois caracterizou a atividade algébrica apenas do ponto de vista de uma descrição - e que a álgebra de Al-karismi não tem *originalidade* porque não traz nenhum resultado novo em relação aos que vieram antes dele.

Podemos concordar com Lins & Gimenez (1997) se considerarmos apenas a linearidade da história. Com o olhar de hoje, podemos emitir vários juízos referentes às elaborações lógicas e formais que Diofanto, Viète e Al-karismi fizeram. Porém, se observarmos e estudarmos o contexto em que o “concreto do conteúdo”[3] (KOSIK, 2002) desses conceitos foi elaborado a partir do lógico-histórico, podemos perceber a busca em que se lançaram, no sentido de *desvendar* e entender a verdade.

A verdade a que estamos nos referindo diz respeito à descrição de movimentos da vida. Não se vê, na história contada por EVES (1953; 1997), CARAÇA (1951; 1984; 1998), FRAILE (1998) e RÍBNIKOV (1987), que as civilizações faziam álgebra somente com o intuito de sintetizar a escrita. Os

---

[3] O concreto “se torna compreensível através da mediação do abstrato, o todo através da mediação da parte” (KOSÍK, 2002, p. 36). “Se entende o objeto solto sensorialmente perceptível ou sua imagem gráfica e, por abstrato, as reiteradas e similares propriedades soltas de um conjunto de objetos, mentalmente separadas dos mesmos e consideradas independentemente” (Davydov, 1982: 332). O conteúdo concreto da álgebra simbólica envolve o lógico–histórico dos conceitos de álgebra não simbólica e álgebra simbólica. Envolve a fluência, a variável e campo de variação. A variável se constitui pelo conteúdo concreto da palavra, da figura e da letra.

nexos internos do conceito de álgebra, aí elaborados, são fundamentais para se entender, por exemplo, a diferença entre o trabalho de Viète e Diofanto.

O foco de Diofanto era o número que,até então, não conhecia uma teoria mais geral. Já o contexto de Viète vai lhe permitir pensar sobre a variável, a partir do movimento, da fluência. Não é sem sentido que Lima & Moisés (1997; 2000) afirmam que Diofanto criou a variável-numeral e Viète a variável-letra, apesar de ambos se utilizarem das letras do alfabeto para representarem quantidades desconhecidas.

Os *insights*[4] (BOHM, 1980) feitos pelo pensar sobre a realidade desses personagens nos auxiliam até hoje a compreender a necessidade do pensamento de se desprender do numeral sem ignorar o número. Podemos citar como exemplo as álgebras não simbólicas, hoje não mais usadas pelos matemáticos, mas cada uma em sua época de predominância era o *insight* necessário para as necessidades de interpretar e representar movimentos.

As “subálgebras” propostas por Bohm (1980) nos dias de hoje podem ser mais bem compreendidas quando percebemos que filósofos e matemáticos de todos os tempos tentaram descrever movimentos da realidade a partir de seu subjetivo, de seu próprio olhar. Deixaram-nos um legado histórico e cultural que nos permite acreditar na possibilidade de criar representações diversas para os problemas que se apresentam na realidade. E não estaria aí a beleza do pensamento algébrico?

A síntese da escrita numérica elaborada a partir da retórica, da sincopação e da álgebra simbólica, incluindo-se aí a álgebra geométrica, está diretamente relacionada aos problemas do cotidiano, quer seja do matemático, quer seja do povo, de cada uma das épocas.

Se, nos períodos mais remotos, os diversos problemas da realidade, das mais diversas civilizações, eram solucionados por um grupo seleto de matemáticos, filósofos, astrônomos, é quase natural a busca desses estudiosos, no sentido da síntese da escrita e da linguagem.

O que estamos dizendo aqui é que a lógica formal da álgebra simbólica foi construída a partir da necessidade intelectual desses estudiosos. A atividade sintética presente na lida, na práxis desses teóricos, materializa-se na variável-letra. É decorrente de acordos históricos.

Com o passar do tempo, torna-se uma taquigrafia ou ainda uma linguagem universal para os teóricos.

Em nenhum momento, os historiadores nos dizem que os estudiosos se fechavam em seus aposentos para pensar na síntese de uma escrita. A síntese da escrita foi feita a partir das necessidades presentes nas diversas civilizações, nos diversos momentos, sem desconsiderar os estudos relacionados com a Teoria dos Números e com a Geometria. A síntese presente na álgebra simbólica foi construída durante séculos.

É quase natural que o matemático de cada época, de cada civilização, procure encontrar uma espécie de taquigrafia para simplificar ao máximo sua escrita. Afinal, a busca do ser humano, há muito, está relacionada à diminuição do trabalho físico e braçal.

Queremos nos dedicar ao ócio para podermos pensar nos diversos movimentos da vida. Queremos criar, muito mais do que ficar escrevendo palavras inteiras. Queremos que o nosso pensamento pense sobre o que ainda não foi pensado. Queremos encontrar regularidades nos movimentos

---

[4] Para Bohm (1980), durante a nossa existência, desenvolvemos e construímos uma infinidade de “tipos diferentes de insights”. As teorias não são verdades únicas e absolutas, não representam verdades imutáveis, são insights.

da vida para que possamos elaborar generalizações. Queremos criar fórmulas gerais para tentarmos compreender os diversos movimentos do mundo. Só conseguimos elaborar essas fórmulas quando conseguimos apreender movimentos regulares que se apresentam nos fenômenos da vida.

As necessidades científicas, nos vários momentos históricos, exigem maiores estudos. As relações entre os povos vão se estreitando, a partir do Renascimento, nos séculos XV e XVI. A realidade se transforma com uma certa rapidez. Enquanto a vida acontece, há novas descobertas. Há o encontro das diversas culturas.

Não é de hoje que a humanidade tenta encontrar formas de se entender e, sem dúvida, o simbolismo algébrico auxilia em muito a comunicação entre os estudiosos das mais diversas ciências. É, praticamente, a partir de uma certa naturalidade, que o pensamento algébrico caminha, no sentido de se pensar o desconhecido, a incógnita, a partir da letra.

A partir da metade do século XVII, a álgebra simbólica começa a se impor enquanto conhecimento científico. Faz-se necessário que o conhecimento matemático avance (EVES, 1953, 1997).

É nesse período que a teoria do número começa a ser gestada. Apesar disso, a retórica e a figura permanecem com as chamas bem acesas, em nossos dias, tanto em nossas salas de aula como nos institutos científicos dos diversos países. Não conseguimos, ainda que façamos um esforço imenso, desvencilhar-nos totalmente da palavra e do desenho.

Porém, ao ensinarmos a álgebra simbólica, esquecemo-nos da álgebra retórica e da álgebra figurada. Há, aqui, uma contradição.

Apresentamos aos estudantes a variável-letra e queremos insistentemente que eles entendam o pensamento algébrico.

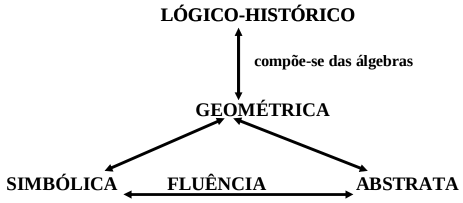
Os alunos, nesse contexto, aprendem a fazer manipulações algébricas que, por sua vez, não têm nada a ver com a palavra e a figura estudadas em outras áreas do conhecimento. Os elementos perceptíveis contidos na variável-letra, as letras do alfabeto, parecem falar por si.

Há uma ou outra proposta curricular que sugere aos professores a criação de atividades algébricas que não desvinculem a palavra da figura e da letra. Tenta-se elaborar, nesse caso, atividades que considerem a relação estreita que há entre aritmética, álgebra e geometria. Sugere-se que os professores façam essa relação a partir da história, porém, nem sempre o professor consegue fazer sozinho tal relação.

Assim, temos, no modo II do lógico-histórico da álgebra, a seguinte síntese.

No esquema seguinte, mostramos que os estágios de desenvolvimento da linguagem algébrica se compõem das álgebras geométrica, simbólica e abstrata.

ESTÁGIOS/CLASSES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO II
(Socas et al., 1996)



As álgebras geométrica, simbólica e abstrata podem ser assim entendidas:

FASES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO II
(Socas et al, 1996)

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA
➢INVENÇÃO GRADUAL DOS SÍMBOLOS ➢RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

ÁLGEBRA SIMBÓLICA
➢VIÈTE (1540-1603) ➢ INTRODUÇÃO DA NOTAÇÃO SIMBÓLICA

ÁLGEBRA ABSTRATA CONTEMPORÂNEA OU ÁLGEBRA MODERNA
➢PRESCINDE DOS NÚMEROS; ➢OBJETOS UTILIZADOS PODEM SER QUALQUER (MATRIZES, VETORES, TENSORES ETC.)

O Modo II de ver o pensamento algébrico mostra o aspecto formal dos conceitos algébricos elaborados a partir do século XIX.

A criação de uma matemática abstrata coincide com a criação da álgebra abstrata. O concreto do conteúdo da álgebra abstrata é o formal dos conteúdos da álgebra geométrica e da álgebra simbólica. Não há preocupações explícitas com a palavra e o desenho, mas sim, com a geometria de Euclides e com a variável letra de Viète. Aqui, o número não representa nexo conceitual da álgebra, porque essa álgebra prescinde dos números.

A variável

Ao estudarmos o conceito de variável, consideramos a sua relação quase que direta com o conceito de função.

Ambos os conceitos têm relações intrínsecas, porque representam "generalizações abstratas de variáveis concretas*".* Como exemplo de variáveis concretas, podemos citar o tempo, a distância, a velocidade, o ângulo de rotação e a área de uma superfície, bem como *as interdependências* que ocorrem entre essas variáveis: a distância depende do tempo, e assim por diante (ALEKSANDROV et al., 1988, p. 65).

Nesse contexto*,*

> a variável é a imagem abstrata de uma grandeza que varia, o que supõe distintos valores durante o processo em consideração. Uma variável matemática x é algo, ou mais exatamente, qualquer coisa que pode tomar distintos valores numéricos (ALEKSANDROV et al., 1988, p. 66).

Podemos entender por variável, "o tempo, a distância ou qualquer outra grandeza variável" (ALEKSANDROV et al., 1988, p. 66).

Um aluno do Ensino Fundamental, ao ler a definição de Aleksandrov et al. (1988), pode nos dizer que esta não se diferencia da definição de incógnita feita pelos matemáticos árabes e europeus.

Para árabes e europeus, incógnita representava qualquer coisa desconhecida. A própria palavra, *coisa*, tinha o objetivo de representar o desconhecido, enquanto que a representação da coisa, na letra **x**, nos remete, quase que automaticamente, ao trabalho de Viète, à álgebra simbólica dos séculos XVI e XVII. Porém, ao estudarmos com maior cuidado o trabalho de historiadores matemáticos, podemos constatar que, historicamente, os conceitos de variável e função refletem o problema central da Física do século XVI: o estudo do movimento.

Longe de apenas representar o valor desconhecido da incógnita, os conceitos grandezas variáveis e função aparecem na matemática como reflexos das "propriedades gerais do conceito de mudança". Determinam uma nova etapa para a matemática: a matemática das grandezas variáveis (ALEKSANDROV et al., 1988, p. 65).

Essas definições só começam a fazer sentido na matemática, quando grande parte dos estudiosos passou a pensar sobre os trabalhos de Kleper e Galileu Galilei, que se fundamentavam no conceito de movimento, a partir do momento em que a humanidade aceitou a idéia de movimento (KARLSON, 1961).

Nesse período, a partir da resolução de problemas do cotidiano da física, há quase que obrigatoriamente, a necessidade de se pensar em um instrumento que seja possível descrever movimentos da vida, quer sejam eles regulares, quer sejam irregulares. Referir-se apenas à incógnita, ao desconhecido, até aquele momento era fazer referência a um tipo de movimento, o regular, à equação.

No século XVIII, Euler definiu que "uma função de quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira por essa quantidade variável e números ou quantidades constantes". Classificou as funções em algébricas e transcendentes.

As algébricas subdividiam-se em irracionais e racionais e as transcendentes, em trigonométricas e logarítmicas. Por sua vez, as racionais se subdividiam em inteiras e fracionárias. A classificação proposta por Euler considerava algumas propriedades por ele definidas.

A definição feita por Euler, de certa forma, assemelhava-se à definição de Bernoulli, que definia uma função simplesmente como *uma expressão analítica*. Por sua vez, Leibniz já havia introduzido, em seus trabalhos, "a idéia geral de dependência funcional, introduzindo o termo função e o símbolo correspondente para todos os segmentos relacionados com a curva", de forma que o comprimento dessa dependesse da "posição do ponto sobre a curva: ordenadas, segmentos de tangentes, subtangentes, normais, subnormais" (ALEKSANDROV et al., 1988, p. 220).

A definição do conceito de variável como "um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números" (EVES, 1997, p. 661) foi feita por Lejeune Dirichlet, no século XIX, numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente, a ponto de englobar as relações estudadas por Joseph Fourier[5]. Ao nosso ver, tal definição se completa a partir de Caraça (1935; 1966; 1984; 1998), que vê, na fluência, a característica fundamental do conceito de função:

> A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado – o conjunto – superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. No entanto, o caráter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial – síntese do ser e não ser – ela sai fora daquele quadro de idéias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente de pensamento, que expressa ou tacitamente vê, na fluência, a primeira das suas características. Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância, o seu domínio (CARAÇA, 1998, p. 120).

Dessa forma, quando definimos o conceito de variável, em um determinado Conjunto (C) qualquer - cujos elementos são números reais ou complexos - o qual pode ser denominado de campo ou domínio da variável, consideramos dois aspectos inseparáveis e que contêm a síntese do ser e não-ser do número - o aspecto simbólico e o aspecto substancial*:*

[5] Em suas pesquisas, Joseph Fourier (1768-1830) teve que considerar as chamadas séries trigonométricas, as quais "envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente" (Eves, 1997, p. 661).

> Dado o conjunto (C) qualquer, de números reais ou complexos, ao símbolo representativo dos seus elementos dá-se o nome de variável. A esse conjunto chama-se campo ou domínio da variável. O conceito de variável apresenta, conforme a definição, um duplo aspecto — o aspecto simbólico**,** da letra ou símbolo tomado, e o aspecto substancial, do conjunto que esse símbolo representa; esses dois aspectos são inseparáveis, e a sua síntese é o conceito de variável. A vantagem da introdução desse conceito na Análise reside na possibilidade que ele dá de raciocinar em "globo" sobre um conjunto de números, deduzindo propriedades a que satisfaçam todos esses números, como elementos do conjunto. À variável, símbolo coletivo de todos os números do seu campo, pode ser atribuído, como valor particular, a quaisquer desses números, e tudo o que se tiver deduzido como verdadeiro para o símbolo — a variável — será verdadeiro para cada um desses valores particulares (CARAÇA, 1966, p. 1).

O desenvolvimento histórico do conceito de variável apresenta uma relação direta com o conceito de número, de movimento e com o desenvolvimento da Física; entretanto, sob o ponto de vista lógico e formal do desenvolvimento do conceito, a variável tem sua formalização mais geral no século XIX, quando, tanto a Teoria dos Conjuntos como a Teoria dos Números e o conceito mais geral de função foram formalizados.

A função é a ferramenta atual de todos os matemáticos, ferramenta que permite ao homem dar nexos e compreender os movimentos fluentes do cotidiano, da realidade, da vida (KARLSON, 1961), que ora podem ser regulares, ora podem ser irregulares. A palavra função expressa, provavelmente, a idéia mais importante de toda a História da Matemática (KASNER & NEWMAN, 1968).

Nesse sentido, compartilhamos do pensamento de Caraça (1951; 1966; 1984; 1998) quanto à sua afirmação sobre a introdução na ciência do conceito de variável. Seu desenvolvimento não é linear. Surge à medida que os movimentos numéricos se refinam, através do pensamento humano.

À guisa de conclusão

A partir do lógico-histórico da variável podemos perceber que, durante o desenrolar da criação do conceito de número, novos elementos da cultura vão sendo acrescidos, estabelecendo-se novas relações entre os conjuntos numéricos ou campos de variação. À medida que os campos numéricos vão tomando nova forma e vão se desprendendo das qualidades que compuseram o seu desenvolvimento histórico, passa-se a considerar apenas o aspecto quantitativo do conceito de número, bem como suas propriedades. Não é a toa que, em uma das dimensões do ensino de matemática, Caraça (1966) propõe o estudo da álgebra e da análise através do conceito de número e dos quatro exemplos de variáveis: a) a variável real contínua ou, simplesmente, variável real; b) a variável racional; c) a variável inteira positiva; e d) a variável complexa contínua ou, simplesmente, variável complexa. Todas estas variáveis, de alguma forma, contêm a palavra, a sincopação e a letra, ao mesmo tempo em que todas contêm a tentativa de apreender os movimentos da vida de todos nós.

O lógico-histórico na sala de aula e, conseqüentemente, no ensino de álgebra, tem como principal função auxiliar professores e alunos a compreenderem as relações conceituais que foram elaboradas historicamente no que diz respeito à álgebra simbólica.

Aqui a história assume o papel de elo de ligação entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito, que permitam compreender a realidade estudada. Há a necessidade de elaborar juízos sobre os conceitos. Não se apresentam, aos alunos, os conceitos prontos e acabados. Convida-se o estudante a pensar sobre tais conceitos.

Entendemos que as aulas de matemática devem ter como objetivo convidar o estudante a humanizar-se pelo conhecimento matemático. Devem permitir que haja um encontro afetivo com o conceito; no nosso caso, com o conceito algébrico.

Ao fazermos tal afirmação estamos de braços dados com todos os teóricos e pesquisadores que defendem a idéia de que o formar-se homem acontece desde o momento em que o pensamento começa a movimentar-se para entender o mundo na lida do dia-a-dia.

O entendimento do mundo e de nós mesmos permite-nos entrar em contato com a “concreticidade” e a abstratividade dos conceitos.

O formar-se nunca termina, porque a vida pulsa enquanto tenta se recriar a todo o momento, na fluência dos movimentos do universo. A vida humana faz parte da natureza universal. Não se desvincula nunca, ainda que queira, da lei universal, da fluência e da interdependência.

Tentamos mostrar, a cada item deste estudo, o quanto de vida existe, quando a humanidade, a partir das diversas civilizações, tenta se desvencilhar do numeral.

As civilizações criaram definibilidades próprias para entender o número conhecido e o desconhecido do número. Criaram representações para desvendar o maravilhoso mundo dos movimentos. Criaram o conceito de variável, de campo de variação, de fluência. Fizeram uso da variável. Representaram-na a partir da palavra, da figura, da intermediação entre palavra e letra. Criaram letras.

Ousaram. Acreditaram. Deixaram-nos um legado de que é sempre possível alçar vôos em direção ao novo, sem desvencilhar-se do velho, porque não há novo e velho e sim, idéias, *insights*.

Apresentamos as álgebras retórica, geométrica, sincopada e simbólica. Discutimos suas relações. Chamamos de mudança conceitual a álgebra simbólica. Álgebra que freqüenta nossas salas de aulas do Ensino Fundamental, praticamente todos os dias.

Percebemos que o elo de ligação entre elas é o movimento, a fluência. Há interdependência entre o movimento que se quer estudar e sua representação.

A palavra, o desenho e a letra fazem parte da práxis humana. São abstrações que fazem parte da vida do homem, do movimento de seu pensamento, para marcar sua presença no universo. São os conteúdos concretos do pensamento do homem.

Convidamos professores e alunos a pensarem sobre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável,que constituem a primeira unidade necessária para se iniciar a alfabetização algébrica no Ensino Fundamental.

Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A.D. et al. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, Alianza Editorial, 1988.

BELL, E.T. *Historia de las matemáticas*. Traducción de R. Ortiz, Fondo de cultura económica – México, 1995.

BOHN, D. *A totalidade e a ordem implicada*. São Paulo/SP, 12ª. edição, Cultrix, 1980.

BOYER, C. B. *História da Matemática*, São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

CARAÇA, B. J. *Lições de álgebra e análise, vol. II – Funções, limites, continuidade* – Bertrand (Irmãos) Ltda., Lisboa, 1966.

______. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Portugal – Gradiva, edições de 1951; 1984 e 1998.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. A matemática e a retórica in *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro. Livraria Francisco Alves Editora S.A., p. 61 – 80, 1988.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas/SP, Editora da Unicamp, 2ª. edição,1997.

FRAILE, A. R. *El álgebra: del arte de la cosa a las estructuras abstractas*. Ciencia Hoy., Santillana, 1998.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas: a história da álgebra*, São Paulo, Makron Books, 1997.

HOFMANN, J. E. *Historia de la matemática*. Traducción al español por Vicente Valls y Angles y Gonzalo Fernández Tomaz. 1ª. Edición en español, Talleres Gráficos Toledo S.A., I. Ciencias Matemáticas, U.T.E.H.A., México, 1961.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos*. Editora Globo, Porto Alegra, 1970.

IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção*. São Paulo/SP, 9ª. Edição, Editora Globo, 1998.

KARLSON, P. *A Magia dos Números: a matemática ao alcance de todos*. Coleção Tapete Mágico XXXI, Editora Globo, 1961.

KASNER, E. & NEWMAN, J. Novos nomes em lugar dos velhos, in *Matemática e imaginação*. Biblioteca de Cultura Científica, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1968.

KIERAN, C. *The learning and teaching of school algebra, in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Université du Québec à Montréal, 1992.

KLEIN, J. *Greek mathematical trought and the origin of álgebra*. Translated by Eva Brann. The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology Cambrigde, Massachussetts, and London, England, 1968.

KLINE, M. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. Sección de obras de ciência y tecnologia, México, Conselho Nacional de Ciência y Tecnologia, 1998.

KOSIK, K. *Dialética do concreto*. Rio de Janeiro/RJ. Editora Paz e Terra, 7ª. Edição, 2002.

LIMA, L. & MOISÉS, R. P. *A variável: escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1*. São Paulo/SP, CEVEC/CIARTE, edições de 1993; 1997 e 2000.

LINS, R. & GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas/SP, Papirus, 3ª. Edição, 1997.

PIAGET, J. & GARCÍA, R. *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno editores, Colombia, 2ª. Edición, 1984.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir Moscú, 1987.

SMITH, D.E. *History of mathematics*. Vol I, New York, Dover, 1958.

SOCAS, M.M. et al. *Iniciacion al álgebra*. Coleção Matematicas: cultura y aprendizaje, Editorial Sintesis, 1996.