

Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino da função quadrática utilizando os *softwares* ‘parábola’ e ‘oficina de funções’

Aguinaldo Robinson de Souza e Gilmara Aparecida da Silva***

Resumo: Um dos grandes desafios como educadores e matemáticos é tornar a Matemática mais interessante, aproximá-la da realidade dos alunos. Para isso, são necessárias alterações que vão desde as políticas governamentais para a Educação até o cotidiano nas salas de aula. Este trabalho propõe a utilização de novas tecnologias computacionais, como recurso didático, para o estudo de funções quadráticas. Foram utilizados os *softwares* ‘Parábola’ e ‘Oficina de Funções’ e elaboradas atividades em que os alunos interagem com os programas, experimentando e visualizando as transformações no universo das funções quadráticas.

Palavras-chave: Funções quadráticas; novas tecnologias; software educativo; ensino médio.

Development and analysis of a methodology for quadratic function teaching using ‘parábola’ and ‘oficina de funções’

Abstract: One of the greatest challengers in Mathematics Education is to turn Mathematics more attractive to the students. The use of information technology and more specifically computer technology are some of the new promises currently advocated to contribute to the debate involving the use of microcomputers in the classroom. The objective of the present study is to present a methodology involving the manipulation of two different software named ‘Parabola’ and ‘Oficina de Funções’. The activities involved the student’s interaction, experimentation, and visualization in the universe of the second degree functions.

Key words: Teaching of functions; computer technology; microcomputers and classroom; educational software.

* Professor Adjunto do Curso de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP, Campus de Bauru/SP. arobinso@fc.unesp.br.

** Mestre em Educação para a Ciência, do Curso de Pós-Graduação para a Ciência da UNESP, Campus de Bauru/SP. gilamara@adaptanet.com.br.

Introdução

As questões relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental e Médio apresentam algumas dificuldades. Dentre elas, podemos citar como um aspecto importante a forte aversão da maioria dos alunos à Matemática, que é tida como difícil de entender, desinteressante, descontextualizada, infalível e pronta.

Apresentada dessa forma, aos educadores matemáticos aparecem algumas dificuldades na consolidação de um dos objetivos da Educação que é possibilitar que cada indivíduo alcance seu potencial crítico, criativo, estimulando e facilitando sua convivência em sociedade, exercendo efetivamente sua cidadania. Por isso, o cotidiano da sala de aula deve modificar-se, tornar-se mais atraente, mais de acordo com a realidade dos alunos, para que estes tenham um aproveitamento melhor e um interesse maior em relação aos conteúdos a serem assimilados, o que também contribuiria para a diminuição da repetência e da evasão escolar.

Como nossos alunos são jovens que vivem num mundo de grandes avanços tecnológicos, aos quais eles devem ter a oportunidade de acesso, independentemente do seu nível social, uma possível ação pedagógica que leve à superação de alguns dos problemas mencionados acima é a utilização de novas tecnologias computacionais — uma das principais tendências em Educação Matemática —, que devem ser utilizadas como ferramentas didáticas auxiliares incorporadas em todos os níveis de ensino.

Educar, em uma sociedade onde a informação tem papel central, é formar indivíduos capazes de tomar decisões fundamentadas no conhecimento, criativos, que saibam lidar com a contínua e acelerada transformação tecnológica, e não indivíduos tecnologicamente capacitados, que só sabem apertar teclas e obedecer à orientação dada pela máquina, o que o torna um mero repetidor de tarefas. O uso do computador no cotidiano da sala de aula poderá tornar o conteúdo apresentado muito mais interessante, mais eficiente e mais significativo. Além disso, o computador poderá elucidar a relação entre a Matemática e outras Ciências, tornando, assim, o ensino mais integrado.

Para fazermos com que o aluno participe intensamente do seu aprendizado, através da pesquisa em grupo, da experimentação e de outras atividades que culminem com a evolução intelectual, a prática pedagógica deve transformar-se.

Nesse contexto, o professor pode deixar de ser a fonte única de informações, precisando desempenhar outras funções no sentido de orientar os estudantes na pesquisa de novos conhecimentos e administrar as dificuldades decorrentes do uso das tecnologias e do excesso e dispersão de informações nas redes informáticas (PENTEADO, 2000, p. 10).

O ambiente onde se processa a aprendizagem deve possibilitar uma grande interação entre o aprendiz e o objeto de estudo. A interação aluno-computador, de acordo com Valente (1998), deve ser guiada por um profissional conhecedor do processo de aprendizagem e que compreenda o potencial do computador.

Deve-se entender que o uso deste em sala de aula não substituirá o professor, mas será seu auxiliar, possibilitando, inclusive, que o aluno aprenda no seu próprio ritmo.

Neste trabalho, propomos a utilização de uma atividade, em sala de aula, com dois *softwares*: *Parábola* e *Oficina de Funções*, no estudo da função quadrática na 1ª série do Ensino Médio, enfocando aspectos visuais, algébricos e a experimentação. Realizamos também uma compilação de alguns artigos relacionados à pertinência da inclusão de computadores na sala de aula.

O aspecto visual geralmente é deixado de lado, mas, com ele, pretendemos estimular o processo de descobrimento de conceitos matemáticos através de atividades previamente elaboradas. Tais atividades abrangem conteúdos normalmente estudados na escola e outros que, via de regra, não são discutidos como, por exemplo, o estudo da família de parábolas. Os alunos que apresentam dificuldades em trabalhar algebricamente com funções quadráticas podem encontrar, na visualização, uma outra opção de investigação matemática (GRACIAS e BORBA, 1998).

Para o desenvolvimento de tal estudo, trabalhamos com alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual “Stela Machado”, da cidade de Bauru, São Paulo. Procuramos visualizar os conceitos que os alunos possuíam sobre funções quadráticas e como o desenvolvimento de atividades utilizando o recurso da informática poderia ajudar ou não na prática pedagógica. Valorizamos os conceitos prévios dos alunos, bem como o trabalho em dupla para o desenvolvimento das atividades.

Funções quadráticas e computadores

O conceito de função, como instrumento para estudo das leis matemáticas, é tido como um dos mais importantes, visto como pré-requisito para o estudo de outros assuntos em Matemática. O tratamento convencional de funções, baseado no conceito de Dirichlet-Bourbaki, estabelece uma correspondência entre dois conjuntos não-vazios, que faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto, denominado domínio, exatamente um segundo elemento do segundo conjunto, chamado contradomínio. Esse enfoque é conhecido como enfoque de correspondência (SOUZA, 1996).

No enfoque de covariação, uma função é entendida como a justaposição de duas seqüências, que pode ser útil quando trabalhamos com situações reais. Nesse enfoque, preenchemos primeiramente uma coluna de valores x , normalmente pela adição de uma unidade e , a seguir, preenchemos uma outra coluna de valores y , através de uma operação construída de acordo com o contexto do problema em questão, permitindo um estudo de taxa de variação (SOUZA, 1996).

Tanto o conceito de função como as idéias sobre variável, domínio, contradomínio e imagem, que permeiam a compreensão desse conceito, são de difícil assimilação por parte dos alunos de qualquer nível de escolaridade (ZUFFI, 2000). Tal problema tem sido investigado e, visando a sua solução, pesquisas estão sendo feitas para analisar o uso da informática na formação do conceito de funções.

Tem sido comum, ao longo dos anos, pensar na Matemática como uma atividade a ser desenvolvida com lápis e papel e imune às novas mídias. Atualmente, esse pensamento está sendo questionado, devido à difusão cada vez maior de computadores e à sua crescente utilização na Matemática.

O estudo de funções quadráticas é feito dando-se ênfase ao aspecto algébrico e, geralmente, é deixado de lado o aspecto visual. Isso se deve aos recursos utilizados, papel e lápis, e à argumentação de que seria gasto muito tempo com a construção de gráficos no papel. Partindo desse ponto, a introdução de novas mídias, como o computador, por exemplo, pode oferecer condições para que esse quadro se modifique (GRACIAS e BORBA, 1998).

Os computadores estão trazendo mudanças significativas para a Matemática, além de afetarem profundamente a dinâmica da sala de aula. Estas mudanças não dizem respeito simplesmente à substituição de um tópico por outro. Ao contrário, estas mudanças aludem ao enfoque que será dado na sala de aula a um determinado tópico, à própria superação de

tópico, e a uma radical mudança de como o professor passa a relacionar-se com os alunos e com a máquina (BORBA, 1996, p. 124)

Como facilitadores para a mudança desejada, os *softwares* gráficos produzem, em segundos, esboços de gráficos de funções, além de oferecerem maior escolha das funções a serem trabalhadas, superando as limitações do cálculo e do desenho feitos à mão livre (PALIS, 1994).

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de atividades, no estudo de funções, auxiliadas pelo computador.

Estudo dos vértices de famílias de parábolas

Estudamos o comportamento do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ quando variamos, a cada vez, um dos seus coeficientes. Através do uso do computador, podemos facilmente visualizar o movimento dos vértices das parábolas assim que os parâmetros da função são modificados. Podemos verificar:

O comportamento dos vértices das parábolas de uma família dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, variando o termo a e mantendo os termos b e c constantes.

Quando variamos o parâmetro a , mantendo os parâmetros b e c constantes e diferentes de zero, além da variação provocada na abertura da parábola, observamos também que o vértice das famílias dessas parábolas se move linearmente sobre uma reta.

A coordenada x do vértice de qualquer parábola pode ser escrita como $x_v = -\frac{b}{2a}$. Então:

$$2ax_v = -b \rightarrow a = -\frac{b}{2x_v}$$

Logo, temos que a ordenada do vértice é dada pela equação abaixo:

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4\left(\frac{-b}{2x_v}\right)c}{4\left(\frac{-b}{2x_v}\right)} = \frac{-b^2 - \frac{2bc}{x_v}}{\frac{2bc}{x_v}} = \frac{-b^2x_v - 2bc}{\frac{2bc}{x_v}} = \frac{-b^2x_v - 2bc}{-2b} = \frac{bx_v + 2c}{2}$$

Portanto, $y = \frac{b}{2}x + c$ é a equação da reta que passa pelos vértices da família de parábolas das funções quadráticas escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, variando o termo a e mantendo b e c constantes. Num caso mais particular, quando $c = 0$, a família de parábolas de equação $f(x) = ax^2 + bx + 0$, com $a \neq 0$, mantendo o coeficiente b constante, temos $y = \frac{b}{2}x$ como a equação da reta que passa pelos vértices dessa família de parábolas (SOUZA, 1999).

Na Figura 1, apresentamos o gráfico da família de parábolas $f(x) = ax^2 + x$, para a qual os vértices dessas parábolas estão sobre a reta de equação $y = \frac{1}{2}x$.

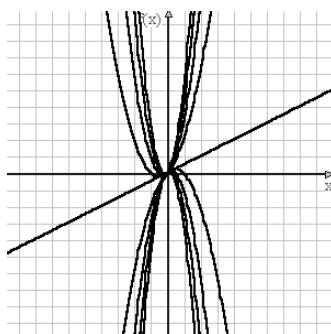


Figura 1 – Família de Parábolas $f(x) = ax^2 + x$.

Num outro caso particular, quando o coeficiente $b = 0$, a família de parábolas de equação $f(x) = ax^2 + bx + 0$, com $a \neq 0$, mantendo o coeficiente c constante, temos $x_v = 0$ e $y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = c$, ou seja, o lugar geométrico dos vértices das parábolas da família $f(x) = ax^2 + c$ é o ponto $(0, c)$ (SOUZA, 1999).

Na figura a seguir (Figura 2), apresentamos o gráfico da família de parábolas para $f(x) = ax^2 + 1$.

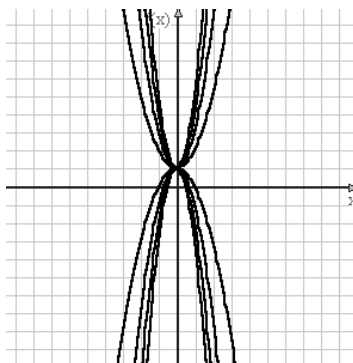


Figura 2 – Família de Parábolas $f(x) = ax^2 + 1$.

I - O Comportamento dos vértices de uma família de parábolas dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, variando o termo b e mantendo a e c constantes.

Quando variamos o parâmetro b , mantendo os parâmetros a e c constantes e diferentes de zero, observamos que o vértice da família dessas parábolas se move segundo uma parábola.

A equação dessa parábola pode ser obtida a partir de:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow -b = 2ax_v \rightarrow b = -2ax_v$$

Logo:

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-2ax_v)^2 + 4ac}{4a} = \frac{-4a^2x_v^2 + 4ac}{4a} = \frac{4a(-ax_v^2 + c)}{4a} = -ax_v^2 + c$$

Então, $y = -ax^2 + c$ é a equação da parábola que passa pelos vértices da família de parábolas das funções quadráticas escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, variando o termo b e mantendo a e c constantes.

Na figura que se segue, Figura 3, apresentamos o gráfico da família de parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$, para a qual os vértices dessas parábolas estão sobre a parábola de equação $y = -ax^2 + c$.

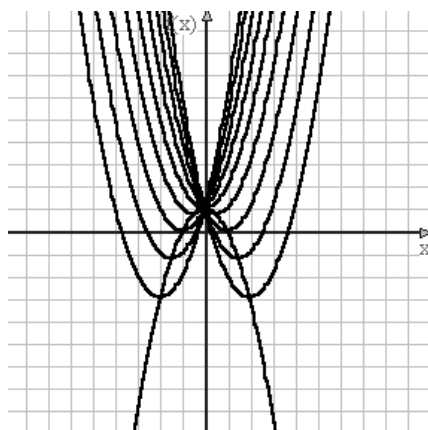


Figura 3 – Família de Parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$.

Num caso mais específico, quando o coeficiente $c = 0$, a família de parábolas de equação $f(x) = ax^2 + bx + 0$, com $a \neq 0$, temos $y = -ax^2$ como a equação da parábola que passa pelos vértices dessa família de parábolas.

II - O comportamento dos vértices de uma família de parábolas dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, variando o termo c e mantendo a e b constantes.

Quando variamos o parâmetro c , mantendo os parâmetros a e b constantes e diferentes de zero, verificamos que o vértice das famílias dessas parábolas se move verticalmente para cima, quando aumentamos o valor do coeficiente c , ou para baixo, quando diminuimos o valor desse coeficiente.

O vértice da parábola é dado por

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)$$

Como x_v não depende do coeficiente c , ele é constante para as funções que tenham coeficientes a e b fixos. Como resultado, o coeficiente c irá modificar somente o y_v , que será responsável pelas translações verticais.

Nesse caso, a equação que passa pelos vértices é $x = -\frac{b}{2a}$, é uma reta paralela ao eixo Oy .

A seguir, faremos uma breve descrição dos *softwares* utilizados neste trabalho, ou seja, ‘Parábola’ e ‘Oficina de Funções’.

Descrição do software ‘parábola’

‘Parábola’ é um *software* educativo desenvolvido na linguagem de programação *Turbo Basic*, no ambiente MS DOS, pelos autores deste trabalho, com o intuito de estudar, através da visualização, a função/equação do 2º grau.

O usuário, interagindo com o *software*, pode modificar o valor dos coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, visualizando, em tempo real, o efeito dessa alteração no gráfico da função. Essas modificações ocorrem através do manuseio das teclas de função F2 até F10, sendo que cada tecla desempenha uma determinada função (ver Tabela 1).

O *software* inicia-se com a apresentação de uma tela de abertura com o nome do programa e, em seguida, apresenta uma outra tela de auxílio com as instruções iniciais de interação, em que estão descritas as respectivas funções das teclas “F”; finalmente, exibe a tela com o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. São exibidos, também, o valor do discriminante (positivo, negativo ou nulo), as coordenadas do ponto mínimo/máximo da função e a quantidade/valor das raízes. Além disso, podemos visualizar as coordenadas (x, y) de qualquer ponto sobre a parábola (ver Figura 4).

Definição das Teclas “F”
As teclas “F” são utilizadas para modificar o valor dos coeficientes a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
F1: Termina o programa
F2: Aumenta o valor do coeficiente a
F3: Diminui o valor do coeficiente a
F4: Aumenta o valor do coeficiente b
F5: Diminui o valor do coeficiente b
F6: Aumenta o valor do coeficiente c
F7: Diminui o valor do coeficiente c
F8: Varre os pontos sobre a parábola no sentido anti-horário
F9: Varre os pontos sobre a parábola no sentido horário
F10: Reinicia o gráfico com a função $f(x) = 1.0x^2 + 0.0x + 0.0$

Tabela 1 – Definições das Teclas F1 – F10.

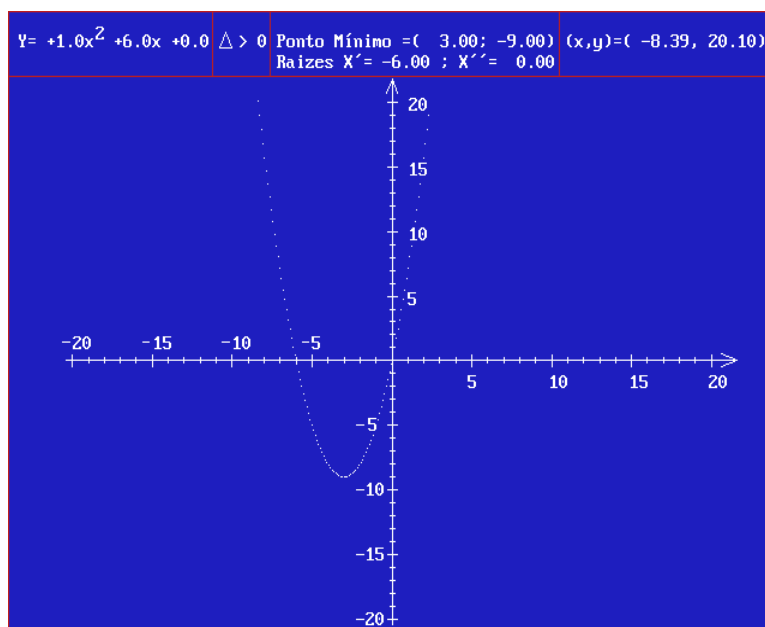


Figura 4 – Tela principal do *software* Parábola.

Quando apertamos a tecla F2, por exemplo, o *software* aumenta o valor do coeficiente a da função, desenhando instantaneamente o gráfico. Ao permanecermos pressionando a tecla F2, o algoritmo, no *software*, repete a operação automaticamente, dando um sentido de movimento. As teclas F3, F4, F5, F6 e F7, anteriormente citadas, operam de maneira similar à tecla F2. Pressionando a tecla F8, surge um cursor no ponto mais à esquerda da função e indica as coordenadas desse ponto. Ao apertarmos novamente a tecla, o cursor avança para o próximo ponto da parábola, sempre no sentido anti-horário. Passando pelos pontos críticos (as raízes, ponto de máximo/mínimo, ponto de intersecção com o eixo y), o programa emite um sinal sonoro, um “beep”. A tecla F9 desempenha a mesma tarefa, no entanto varre os pontos da parábola no sentido horário. A tecla F10 reinicia o gráfico com a função $f(x) = 1.0x^2 + 0.0x + 0.0$.

Descrição do software ‘Oficina de Funções’

‘Oficina de Funções’, Versão 1.0, 1997, é um *software* desenvolvido pelo Professor Nelson Canzian da Silva, da Universidade Federal de Santa Catarina (www.fsc.ufsc.br/~canzian/oficina). É um programa gráfico interativo, desenvolvido para o ensino de Matemática em todos os níveis, que desenha, em frações de segundos, gráficos de vários tipos de funções: 1º grau, 2º grau, potência, exponencial, logarítmica, seno, cosseno e tangente. As funções e os coeficientes são escolhidos através do manuseio do *mouse*. De maneira análoga ao que uma calculadora faz com números, realiza operações entre funções como, por exemplo, a soma, subtração, multiplicação, divisão e composição.

O *software* inicia-se com uma tela do programa sem nenhuma função previamente descrita (ver Figura 5). Nessa tela, os usuários têm a oportunidade de escolher os diferentes tipos de funções, os coeficientes, as operações; desfazer a última ação; limpar a tela; visualizar o desenho sendo construído vagarosamente; optar pela grade, pela cor do gráfico, pelo tipo de linha (pontilhada ou grossa); limitar a função; e, também, solicitar impressão.

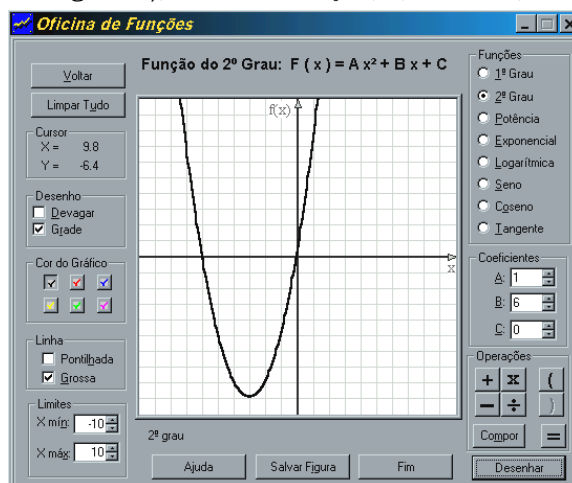


Figura 5 – Tela Principal do *Software* Oficina de Funções.

Há, ainda, o recurso de um texto de ajuda com *hyperlinks* para explicações, atividades ilustradas passo a passo, exemplos e desafios.

A seguir iremos apresentar os resultados da aplicação de atividades, em sala de aula, utilizando os *softwares* ‘Parábola’ e ‘Oficina de Funções’.

Atividades desenvolvidas

Trabalhamos com um grupo formado por alunos que estudavam no período da manhã na 1ª série do Ensino Médio da Escola Estadual “Stela Machado”, da cidade de Bauru, São Paulo. O estudo desenvolveu-se com a participação desses alunos através da utilização dos *softwares* ‘Parábola’ e ‘Oficina de Funções’, descritos acima, abordando o estudo da função quadrática.

A escolha de dois *softwares* fez com que os alunos, ao desenvolverem as atividades propostas, pudessem optar pelo que melhor atendessem às necessidades de cada atividade ou pelo que mais lhes agradasse, visto que a interface com os programas ocorre de maneiras distintas: um através do manuseio do *mouse* e outro através do teclado. As atividades propostas, em número de dez, foram apresentadas em uma apostila, *Atividades Matemáticas*, e foram desenvolvidas pelos alunos, em duplas, na sala de informática da própria escola, através da interação com os computadores e com os programas propostos. No início de cada atividade preocupamo-nos com a identificação da dupla, a duração e a data de realização de cada atividade.

A elaboração de tais atividades levou em conta que o seu desenvolvimento ocorreria através de computadores utilizando os dois *softwares* descritos anteriormente, proporcionando aos alunos o acesso a novas tecnologias. Através dos recursos da informática, o aluno poderia repensar como se conhece e aprende a Matemática, enfatizando mudanças no que é estudado em sala de aula. Em relação ao estudo das funções quadráticas, conteúdo escolhido nestas atividades, o aluno pôde vivenciar aspectos visuais e experimentais que raramente são trabalhados em sala de aula. Esse acesso à informática pode vir a facilitar o aprendizado de alunos que têm dificuldades em relação ao estudo algébrico dos conceitos, através de uma abordagem alternativa, ou seja, é possível o estudo do aspecto gráfico das funções, que, normalmente, não é trabalhado em sala de aula, utilizando o computador.

Nessas atividades os aspectos algébricos não foram deixados de lado, mas sim trabalhados juntamente com o aspecto visual, com a finalidade de o aluno perceber a relação entre essas duas formas de estudar as funções quadráticas, pois,

representações gráficas são talvez a forma mais utilizada de representação de funções e a maneira mais adequada para apresentar informações sobre linearidade, intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, [...] (TRINDADE e MORETTI, 2000, p. 45).

Outro fator importante na utilização dessa atividade informatizada é a rapidez com que os gráficos são construídos, o que não apenas permite investigações em Matemática, como, por exemplo, fazer previsões, testar e/ou validar hipóteses, como também possibilita ao aluno construir vários gráficos e visualizar as mudanças que ocorreram quando suas expressões algébricas são alteradas e, assim, correlacionar as mudanças nos coeficientes da expressão com as mudanças na representação gráfica.

Roteiro de atividades

Esta seqüência de atividades foi elaborada considerando os conteúdos normalmente estudados em sala de aula sobre funções quadráticas. No entanto, foram incluídas algumas atividades que não são estudadas em classe, como, por exemplo, o comportamento dos vértices de uma família de parábolas.

Elaboradas de tal forma que os alunos, inicialmente, se familiarizassem com os programas a serem utilizados, essas atividades, a seguir, visaram propiciar a construção ou verificação dos conceitos já estudados ou não, inclusive apresentando um espaço para que o aluno elaborasse sua própria atividade. Além disso, almejaram também estimular no aluno práticas investigativas, como se verificou, por exemplo, nas atividades que propunham a observação das famílias de parábolas em que se mantinham constantes os coeficientes a e b e se variava o coeficiente c na função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

As metas das atividades foram elencadas de acordo com o que se segue:

Atividade 1: Familiarizar o aluno com o programa ‘Oficina de Funções’.

Atividade 2: Familiarizar o aluno com o programa ‘Parábola’.

Atividade 3: Estudar a concavidade das funções do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando o *software* ‘Oficina de Funções’.

Atividade 4: Determinar os zeros das funções quadráticas, utilizando o *software* 'Parábola'.

Atividade 5: Determinar as coordenadas do vértice $V(x, y)$ de funções quadráticas.

Atividade 6: Determinar o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Atividade 7: Estudar o comportamento dos vértices de uma família de parábolas dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, variando o termo c , mantendo a e b constantes.

Atividade 8: Estudar o comportamento dos vértices de uma família de parábolas dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, variando o termo b e mantendo a e c constantes.

Atividade 9: Estudar o comportamento dos vértices de uma família de parábolas dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, variando o termo a e mantendo b e c constantes.

Atividade 10: Determinar os intervalos em que a função quadrática é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.

Para encerrar a *Atividade 10* e, portanto, finalizando todas elas, os próprios alunos elaboraram uma atividade, descrita passo a passo, para a verificação dos conhecimentos adquiridos sobre função quadrática utilizando um dos dois *softwares* ou ambos.

Na apostila, além do trabalho proposto para os registros dos gráficos obtidos através dos *softwares*, os alunos encontravam espaço para registrarem os gráficos construídos no computador e um espaço para desenvolverem algumas resoluções algebricamente. Estes espaços tiveram o intuito de desenvolver as habilidades de expressão escrita e gráfica. Havia, também, um espaço dedicado às transcrições feitas pelos alunos, para que registrassem as suas facilidades e ou dificuldades durante a utilização dos dois *softwares* no decorrer das atividades, bem como sugestões para um melhor aproveitamento dos mesmos em relação à interface com o usuário.

Resultados das atividades

A seguir, apresentamos algumas observações iniciais que puderam ser percebidas durante o desenvolvimento das atividades:

a) Desde o início das atividades, percebemos a facilidade dos alunos em interagir com o *software* ‘Oficina de Funções’.

b) Durante a realização da *Atividade 1*, houve certo descontentamento dos alunos em relação à utilização do *software* ‘Parábola’. As duplas mostraram preferência em trabalhar com o *software* ‘Oficina de Funções’, devido principalmente às linhas de grade que este apresenta, o que se justifica pela facilidade de localização dos pontos. No *software* ‘Parábola’, para que os alunos localizassem e determinassem as coordenadas dos pontos, foi necessária a utilização de outros objetos como, por exemplo, régua e lápis. Essa dificuldade inicial em trabalhar com o *software* ‘Parábola’ foi superada a partir do momento que tiveram conhecimento das teclas F8 e F9.

c) Os esboços das funções quadráticas realizadas pelos alunos, foram, a cada registro, aproximando-se mais da sua correta representação.

Ao término das atividades propostas, solicitamos a cada dupla de estudantes a elaboração de uma atividade que envolvesse o tema de funções quadráticas, seus conceitos e quais os programas utilizados no seu desenvolvimento.

Na tabela 2 apresentamos os conceitos escolhidos, em porcentagem, pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

Conceitos	Porcentagem de escolha (%)
Cálculo e número de raízes	87,0
Determinação do intervalo crescente/decrecente	57,1
Estudo da concavidade	28,6
Cálculo dos pontos de máximo e mínimo	28,6
Comparação entre as respostas gráficas e algébricas	14,3
Visualização do gráfico das funções	14,3
Estudo do vértice das funções	14,3

Tabela 2 – Conceitos envolvidos, em porcentagem de escolha, nas atividades elaboradas pelos alunos

Solicitamos também que os alunos anotassem o tempo transcorrido durante o desenvolvimento das atividades. Estes tempos são apresentados na Tabela 3.

Atividade	DUPLAS								
	1	2	3	4	5	6	7	8	MA
1	20	35	28	30	30	20	22	34	27
2	26	-	65	45	60	-	-	-	49
3	14	-	22	20	22	15	35	35	23
4	25	50	40	60	40	25	-	-	40
5	10	30	40	40	40	20	35	30	31
6	11	20	25	30	20	25	30	65	28
7	18	20	22	115	45	15	10	-	35
8	15	10	25	35	20	10	10	-	18
9	10	13	20	15	40	10	-	-	18
10	20	50	50	25	35	20	-	-	33
MD	17	29	34	42	35	18	24	41	30

Tabela 3 – Duração, em minutos, para o desenvolvimento das atividades, a Média da Atividade pelas duplas (MA) e Média da Dupla em todas as atividades (MD).

Análise das atividades

Observamos inicialmente alguma facilidade dos alunos na interação com o computador, em especial, com os dois *softwares* utilizados. Ao estudante da escola pública, raramente é permitido o acesso aos avanços tecnológicos recentes, em razão, entre outros fatores, da sua situação socioeconômica. Portanto, torna-se necessário criar situações em que os alunos tenham a oportunidade de entrar em contato com novas tecnologias educacionais e vislumbrem novas possibilidades de ações de ensino e aprendizagem.

Percebemos, desde o início das atividades, que os alunos preferiram a interação com o *software* 'Oficina de Funções'. Essa preferência ocorreu porque este *software* oferece uma grade para a localização dos eixos cartesianos e havia, portanto, a possibilidade de determinar as coordenadas dos pontos da parábola (ou de outra curva qualquer) através do *mouse*, enquanto que o segundo *software*, aparentemente, não mostrava esse recurso.

A resistência ao programa 'Parábola' amenizou-se, depois que os alunos criaram maior familiaridade com os recursos por ele oferecidos, como, por exemplo, o manuseio das funções das teclas F8 e F9, que, quando acionadas, apresentam um cursor que percorre a parábola da esquerda para a direita (tecla F8) ou da direita para a esquerda (tecla F9), disponibilizando as coordenadas de cada ponto.

No decorrer das atividades, observamos que as duplas foram melhorando progressivamente o seu registro do gráfico das funções solicitadas. Essa melhora no esboço dos gráficos pode ter sido facilitada pela utilização concorrente de outros recursos didáticos, como o lápis e a régua, além do computador, o que permitiu o desenvolvimento de outras habilidades, extrapolando a utilização inicial dos recursos tecnológicos apresentados.

A média para a realização de cada uma das dez atividades propostas foi de 30 minutos. Se fôssemos trabalhar essas mesmas atividades em sala de aula, sem o auxílio do computador, teríamos um tempo médio bem maior que esse, pois, além da confecção dos gráficos das funções, os cálculos algébricos também demandariam certo tempo. A utilização do computador permitiu que outras atividades pudessem ser desenvolvidas em sala de aula, além das previamente estabelecidas pelo professor.

Podemos notar, também, que as duplas que não possuíam computador em casa (duplas 3 e 5) não tiveram dificuldades em interagir com os programas, visto que em algumas atividades estavam apenas poucos minutos acima da média, quando não abaixo desta. Durante a *Atividade 7*, a Dupla 4 excedeu em muito o tempo médio utilizado pelos outros grupos, que foi de 35 minutos. Os meninos utilizaram o tempo de 115 minutos, pois, além da investigação gráfica feita com o *software* 'Parábola', no estudo do comportamento dos vértices da família de parábolas $f(x) = x^2 + x + c$, eles procuraram desenvolver tal investigação algebricamente, através de sistemas lineares. Não conseguiram a finalização desta tarefa e, como não havia mais tempo disponível, desistiram de tentar. Na aula seguinte, não voltaram a essa investigação.

No desenvolvimento da *Atividade 1*, visando à familiarização com o *software* ‘Oficina de Funções’, podemos afirmar que as duplas não tiveram dúvidas, pois, das diversas funções registradas, apenas as Duplas 2 e 3 apresentaram, cada uma, um registro incorreto. No decorrer dessa atividade, percebemos que a Dupla 8 tinha dúvidas quanto à identificação dos coeficientes, tanto das funções quadráticas, como das de 1º grau. Logo após uma explicação, entendendo e distinguindo cada um deles, a dupla conseguiu terminar a atividade fazendo os registros corretos e, diferentemente das demais duplas, ao escrever as funções de 1º grau, não colocou, como costumeiramente, o coeficiente angular na frente. Um exemplo registrado por essa dupla foi o gráfico da função $f(x) = 2 + x$. Somente essa dupla utilizou tabelas para conferir os resultados obtidos na referida atividade.

Nas atividades desenvolvidas utilizando o *software* ‘Parábola’, as duplas puderam trabalhar com funções com coeficientes não inteiros, que geralmente não são trabalhadas em sala de aula. Na *Atividade 2*, além dessa oportunidade, também puderam confrontar os resultados obtidos graficamente com os obtidos algebricamente.

Dentre as oito duplas estudadas, apenas uma, a Dupla 1, não confrontou os resultados obtidos graficamente com os obtidos algebricamente. Foram feitos os registros gráficos erroneamente. No entanto, mesmo tendo efetuado os cálculos algébricos corretamente, não observaram a discrepância entre os resultados obtidos.

Outras duas duplas também, ao confrontar os resultados, perceberam a inconsistência dos mesmos. A Dupla 2 havia esboçado o gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 4x$ e feito os cálculos algébricos da função $f(x) = x^2 - 4$. Após verificarem os resultados, os cálculos foram refeitos corretamente.

A Dupla 4 esboçou o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ de forma inadequada, encontrando duas raízes, e não uma como o esperado. Ao calculá-las, como a equipe não estava obtendo os dois resultados, fez os cálculos incorretamente para obter as duas raízes procuradas.

Na *Atividade 3* o objetivo era correlacionar a posição da concavidade da parábola com as variações no valor do coeficiente a . Pudemos observar que a Dupla 6 e a Dupla 8, além de fazerem tal correlação, também relacionaram o valor do coeficiente a com a variação do sinal da parábola. Afirmaram que, se $a > 0$, a função é positiva; se $a < 0$, a função é negativa. A Dupla 1 não conseguiu desenvolver a generalização de tal relação.

Na atividade seguinte, *Atividade 4*, buscamos a correlação entre o valor do delta e o número de raízes de uma função do segundo grau. Dentre as duplas estudadas, somente três encontraram tal correlação a respeito do valor do delta quando este era menor que zero. A Dupla 1, ao desenvolver a atividade, apenas trabalhou com equações que resultavam em $\Delta < 0$. A Dupla 6 não calculou o valor do delta, apesar de ter registrado os gráficos corretamente. Quanto à Dupla 2, esta não conseguiu desenvolver os cálculos e obteve somente valores negativos para os deltas.

Após terem trabalhado com os dois programas, cada dupla pôde, a partir da *Atividade 5*, optar pelo *software* que mais lhe agradasse. Nessa atividade, solicitamos a cada dupla que observasse os valores do y_v para funções em que $a > 0$ e funções nas quais $a < 0$. A Dupla 8, que nesta atividade estava apenas com uma integrante, não respondeu a questão proposta. Quando questionada sobre o valor do y_v quando $a > 0$, a aluna afirmou não existir valor menor para ele, que seria sempre positivo, que a função é crescente. A integrante não terminou de concluir a idéia. A questão seguinte não foi respondida. Percebemos que essa aluna perdeu a motivação para desenvolver as atividades propostas.

Na *Atividade 6*, todos os alunos relacionaram corretamente o valor do coeficiente a com os valores de máximos ou mínimos das funções quadráticas, já que, na atividade anterior, haviam começado a refletir sobre tal correlação.

As atividades 1, 2, 3, 4, 5, e 6 foram desenvolvidas tendo como base os conceitos já estudados em sala de aula. A partir da atividade 7 e durante as atividades 8, 9 e 10, os alunos se depararam com atividades nunca exploradas em classe, ou seja, a investigação das famílias de parábolas, para a qual necessitamos da construção de vários gráficos. Investigações desse tipo são facilitadas pelo uso da tecnologia computacional através da utilização de recursos gráficos e novas possibilidades de manipulação de gráficos, difíceis de serem desenvolvidas à mão livre, com lápis e papel.

Nessas atividades, a visualização e a experimentação desempenharam papel importante na compreensão dos conceitos envolvendo o comportamento dos vértices de famílias de parábolas. Os alunos puderam tentar diversas soluções sem alterar os cálculos realizados.

Na *Atividade 7*, ao unirmos os vértices da família de parábolas das funções quadráticas $f(x) = x^2 + x + c$, ou seja, uma família de parábolas em que o coeficiente a e o b fossem iguais a 1, permitindo a variação do coeficiente c , verificamos que todos os vértices, quando unidos, pertencem a

uma reta, cuja equação é $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, $x = -\frac{1}{2} = -0,5$, conforme discutimos anteriormente.

A Dupla 3 percebeu que só havia uma translação em relação ao eixo y , quando afirmou: “Ela mantém constante para cima, o vértice cai”. A Dupla 4 relatou que os gráficos apresentavam uma pequena diferença de tamanho. Todas as duplas visualizaram que os vértices estariam sobre uma reta, mas, como mencionamos que se tratava de uma função, os alunos procuraram uma equação da forma $f(x) = ax + b$.

Duas duplas (Duplas 6 e 7) afirmaram apenas se tratar de uma reta; outras, Duplas 2 e 3, relataram que se tratava de uma reta, em que o valor de x fosse sempre igual a $-0,5$; as outras três duplas, Duplas 1, 4 e 5, afirmaram que se tratava de uma função de 1º grau, por isso, com o auxílio dos *softwares* procuraram encontrar tal função, variando os coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$, de tal forma que fosse, aparentemente, paralela ao eixo y , passando pelo ponto $x = 0,5$. As funções registradas por estas duplas foram $y = -50x - 25$, $y = -1000x - 500$ e $y = -50x - 25$, respectivamente.

Na *Atividade 8*, propusemos o estudo do comportamento dos vértices da família de parábolas $f(x) = x^2 + bx + c$, em que os coeficientes $a = c = 1$, com variação do valor do coeficiente b . Para essa família de parábolas, os vértices pertencem a uma parábola cuja função é $f(x) = -ax^2 + c$, ou seja, $f(x) = -x^2 + 1$. A Dupla 4 conseguiu perceber que essa curva interceptava o eixo y no ponto $(0, 1)$.

Todas as duplas, com exceção de uma, a qual mencionou se tratar apenas de uma parábola, afirmaram que, além de se tratar de uma parábola, tinha concavidade voltada para baixo, ou seja, $a < 0$. As duplas 1, 4 e 5 tentaram obter uma equação para a função através dos programas disponíveis. No entanto obtiveram as seguintes funções: $f(x) = -1x^2 + x + c$ (Dupla 1); $y = -x^2 + 1x + 1$ (Dupla 4) e $y = -x^2 + 0 + 0$ (Dupla 5).

A próxima atividade foi o estudo do comportamento da família de parábolas $f(x) = ax^2 + bx + c$. Os vértices dessa família de parábolas estão sobre a reta de equação dada por: $f(x) = \frac{b}{2}x + c$, ou seja, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

As Duplas 4 e 6 observaram que a reta procurada passa no ponto $(0, 1)$, apesar de a Dupla 4 ter afirmado que se tratava de uma função do 2º grau. Esta mesma observação foi feita pelas duplas 7 e 3. A Dupla 2 percebeu

que se tratava de uma reta, mas não tentou equacioná-la. O mesmo foi observado para a Dupla 6.

Explorando os *softwares*, a Dupla 1 tentou expressar algebricamente a função procurada. Percebeu que o coeficiente b deveria ser igual a 1, no entanto, equivocou-se quando afirmou que o coeficiente a deveria ser igual a 0, ao invés do valor correto igual a 0,5. Registrou a função $f(x) = 1$. A Dupla 5 disse ser uma função crescente e registrou a função $f(x) = x + 1$.

Para finalizar o estudo proposto, apresentamos a *Atividade 10*, a única elaborada após o início do desenvolvimento das atividades. Nela abordamos os intervalos em que a função quadrática era crescente e aqueles em que era decrescente, uma vez que os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento desse conceito.

Apenas a Dupla 7 não conseguiu realizar a análise dos intervalos para os quais a função era crescente e ou decrescente e, quando solicitamos que registrassem e estudassem outras funções, apenas registrou e esboçou o gráfico sem dizer qual era o intervalo onde a função era crescente ou onde era decrescente. O mesmo fez a Dupla 3, que apenas esboçou outras funções, sem fazer o estudo que havíamos solicitado. As demais duplas conseguiram realizar a análise corretamente.

No último item dessa atividade, foi solicitado que cada dupla elaborasse uma proposta de atividade, descrevendo-a passo a passo, sobre o tema função quadrática, utilizando um dos *softwares* apresentados ou ambos. A seguir descrevemos as atividades propostas.

I - A Dupla 1 propôs uma atividade para o cálculo das(s) raiz(es) da função quadrática $f(x) = x^2 - 2$, podendo ser resolvida gráfica ou algebricamente. Não especificou o *software* que deveria ser utilizado, mas, pelo que foi escrito “Coloca-se o cursor no eixo x...”, podemos deduzir que foi o ‘Oficina de Funções’. As garotas apresentaram a resolução da atividade proposta, afirmando que as duas raízes procuradas tinham valor de -1,5 e 1,5 (estes são os valores aproximados de $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$).

II - A Dupla 2 também elaborou uma atividade envolvendo o cálculo do número e do valor das raízes de uma função. Para a realização desta atividade foram sugeridas as funções $f(x) = 2x^2 + x + 3$ e $f(x) = x^2 + x - 2$. Além disso, foi solicitada a verificação de onde a função era crescente ou decrescente e o comentário sobre a concavidade do gráfico dessa função. A dupla não resolveu a atividade proposta.

III - Também trabalhando com o cálculo e o número de raízes, a Dupla 3 solicitou, na atividade, que tais valores fossem determinados graficamente, inclusive que fossem determinadas as coordenadas do vértice. A função proposta foi $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$. As integrantes dessa dupla responderam que essa função admitia duas raízes, $-0,29$ e $3,30$, e as coordenadas do vértice eram $V(1,5 ; -6,5)$. Apesar de as integrantes da dupla não terem mencionado o *software* utilizado, supusemos que para resolver esta atividade utilizaram o *software* 'Parábola', por ser o valor das raízes apresentado com duas casas decimais.

IV - A atividade elaborada pela Dupla 4 abordava o tópico ponto de mínimo ou máximo e o cálculo do número e do valor das raízes. Os integrantes da dupla apresentaram três funções: $f(x) = x^2 + 4x$; $f(x) = x^2 + 6$ e $f(x) = x^2 + 2x + 1$. A questão formulada por essa dupla solicitava que fosse observado cada gráfico e, além disso, que fosse descrito o que era observado quando se unia o vértice dessas funções; no final, deveria ser fornecida a equação de tal função. A dupla não apresentou as respostas e não especificou que programa deveria ser utilizado para realizar essa atividade.

V - Esta Dupla 5 elaborou uma atividade solicitando que fossem determinados os intervalos nos quais a função era crescente ou decrescente; que se fizesse o cálculo dos zeros da mesma e se determinassem o valor e as coordenadas do ponto mínimo. No entanto, ao apresentar a função, a dupla registrou a função $f(x) = x + 2$, esquecendo de colocar o expoente 2 no x . No decorrer da atividade, porém, foi resolvida, corretamente, a função $f(x) = x^2 + 2$. As alunas responderam que $a > 0$, que $f(x)$ era crescente para $x > 0$ e decrescente $x < 0$; não há raiz real; as coordenadas do ponto mínimo são $(0, 2)$. Quanto ao *software* a ser utilizado, não foi mencionado.

VI - A Dupla 6 terminou com somente uma integrante. Na verdade, a aluna não elaborou uma atividade; foram feitas algumas afirmações sobre quando uma função é crescente ou decrescente e foi esboçado o gráfico de uma função.

VII - As integrantes da Dupla 7 elaboraram uma atividade em que descreviam os passos a serem seguidos para a determinação do zero de uma função. Propuseram a função $f(x) = x^2 + 2x + 3$, mas, ao fazerem o seu registro, fizeram-no incorretamente, sem acrescentar o termo x . Portanto, a função registrada foi $f(x) = x^2 + 2 + 3$. Para resolver tal atividade, estipularam o *software* 'Oficina de Funções' e não apresentaram a solução.

As atividades solicitadas enfatizaram a visualização e a experimentação, sem deixar de lado o desenvolvimento da parte algébrica. O

uso de outros recursos, como lápis e papel, também foi de grande importância, pois, caso fosse necessário, os alunos teriam os registros na apostila para poderem observar e concluir a respeito de determinados fenômenos. O enfoque com ênfase na visualização fez com que algumas transformações nas funções quadráticas fossem estudadas e conhecidas.

O trabalho em dupla foi bastante produtivo, pois, enquanto um elemento interagia com os programas, o outro fazia o registro necessário. Também percebemos a troca de papéis entre os alunos na dupla: enquanto um integrante manuseava o computador, o outro fazia os registros na apostila e, de tempos em tempos, mudavam de papéis. Além disso, a proximidade possibilitou a troca de conhecimentos e idéias quando da resolução de problemas.

Para a utilização dos *softwares* não era necessário o conhecimento prévio em ciência da computação. Entretanto, era preciso algum conhecimento matemático sobre a função de 1º grau e, especialmente, sobre funções quadráticas, para que a interação com os *softwares* pudesse ser o mais efetiva possível. Por exemplo, o desempenho da Dupla 8 foi prejudicado durante o desenvolvimento da *Atividade 1* devido ao não-conhecimento prévio sobre os coeficientes a e b da função $f(x) = ax+b$.

Podemos também verificar quais as concepções apresentadas pelos alunos durante o estudo da função de 1º grau. Ocorre uma forte correlação entre esta função e o desenho de uma reta. Esta correlação pode ser verificada durante o desenvolvimento da *Atividade 7*, na qual era solicitado aos alunos que unissem os vértices da família das parábolas estudadas, o que sempre resultou no desenho de uma reta paralela ao eixo y , que já era identificada como uma função de 1º grau.

Considerações finais

Mesmo estudando conceitos matemáticos anteriormente vistos pelos alunos, este novo enfoque dado ao estudo das funções quadráticas proporcionou momentos de descoberta, graças à experimentação e à visualização: um modo particular de se conhecer (BORBA, 1995).

O computador foi concebido como um elemento facilitador, caracterizado por fazer o que já se fazia antes, mas de uma maneira um pouco mais eficiente, mais rápida e mais rigorosa (CANAVARRO, 1994).

Mudamos o enfoque de “como construir um gráfico” para um enfoque em que se privilegiam a leitura e a interpretação dos gráficos, bem como suas

características, procurando estimular o uso de práticas investigativas. Não deixamos de trabalhar com questões que envolvessem a utilização do desenvolvimento algébrico. O trabalho feito algebricamente pôde ser utilizado com um complemento aos estudos feitos graficamente e, em alguns casos, pudemos constatar o contrário, ou seja, a visualização gráfica serviu como um suporte ao desenvolvimento algébrico. Além disso, os alunos foram estimulados a descreverem os fatos observados, estimulando a representação verbal.

Outro aspecto que pôde ser evidenciado foi a participação dos alunos, que apresentaram uma maior autonomia na exploração de novas situações, buscando diferentes modos de resoluções das questões propostas, avaliando, reunindo e organizando as informações. Com a utilização da tecnologia computacional foi possível também uma nova abordagem das situações de erro encontradas nas salas de aula; erros que normalmente seriam pouco percebidos pelos alunos ou pelos professores, em situações de aprendizagem tradicionais, puderam ser observados mais facilmente e em alguns casos foram prontamente discutidos e avaliados.

Além das conclusões já apresentadas, podemos citar ainda:

- a) uma maior facilidade na obtenção de gráficos de funções;
- b) a comparação direta dos resultados gráficos com os resultados algébricos;
- c) interações mais efetivas aluno-aluno e aluno-professor, com a introdução do computador.

Consideramos que seja importante, e também necessária, a realização de trabalhos que utilizem o computador como ferramenta educacional em sala de aula, pois os nossos alunos devem ter acesso a essas novas tecnologias, principalmente para explorar novos conceitos sob vários enfoques e, assim:

tornar a Matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje (D'AMBROSIO, 2001, p. 15).

Numa proposta para um próximo trabalho, sugerimos a implantação de atividades em que o aluno aplique os conceitos estudados na resolução de situações-problemas em um ambiente de investigação onde as questões sejam mais abertas, isto é, sem a preocupação, inicial, de direcionar o envolvimento do aluno com a ferramenta computacional.

Referências bibliográficas

BORBA, M. C. Informática trará Mudanças na Educação Brasileira. *Zetetiké*. Nº 6, vol. 4, p. 123-134, 1996.

BORBA, M. C.. *Student's understanding of transformations of functions using multi-representational software*. Portugal: Associação de Professores de Matemática de Portugal, 1995. (Doutorado em Educação Matemática – Cornell University).

CANAVARRO, A. P. O computador nas concepções e práticas de professores de Matemática. *Quadrante*, Vol. 3, Nº 2, p. 25-49, 1994.

D'AMBROSIO, U. Desafios da Educação Matemática no novo Milênio. *Educação Matemática em Revista*, Nº 11, ano 8, p. 14-17, 2001.

GRACIAS, T. S., BORBA, M. C.. Calculadoras gráficas e Funções Quadráticas. *Revista de educação Matemática*, Nº 4, ano 6, p. 27-32, 1998.

PALIS, G. de L. R. Tecnologia, Gráficos e Equações. *Revista do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática. Nº 26. p. 30-38, 2º semestre de 1994.

PENTEADO, M. G., BORBA, M. C. (org). *A informática em Ação: Formação de Professores, Pesquisa e Extensão*. São Paulo: Olho D'água, 2000.

SOUZA, A. R., PAULOVICH, L., NASCIMENTO, M. C. Vértices de famílias de Parábolas. *Revista do Professor de Matemática*, Nº 41, p. 7-11, 3º quadrimestre de 1999.

SOUZA, T. A. *Calculadoras gráficas: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas*. Rio Claro, 1996. 221p. Dissertação (Mestrado em

Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP – Universidade Estadual Paulista.

TRINDADE, J. A. O., MORETTI, M. T. Uma relação entre a Teoria Histórico-cultural e a Epistemologia Histórico-crítica no Ensino de Funções: a mediação. *Revista Zetetiké*. Campinas, SP. V. 8, Nº 13/14. p. 29-50, jan/dez. 2000.

VALENTE, J. A. (Org). *Computadores e conhecimento: Repensando a Educação*. Campinas: Gráfica UNICAMP, 2ª ed, 1998.

ZUFFI, E. M., PACCA, J. L. A. Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio. *Zetetiké*. Campinas, SP. V. 8, Nº 13/14. p. 7-28, jan/dez. 2000.