

## Da cubagem de madeira às possibilidades de discussão em sala de aula\*

*Neiva Ignês Grandó\*\* e Mérciles Thadeu Moretti\*\*\**

**Resumo:** Este artigo tem como objetivo registrar os procedimentos utilizados em diferentes serrarias da região Norte do Estado do Rio Grande do Sul para determinar o volume de um toro<sup>1</sup> a ser transformado em madeira beneficiada. Além disso, objetiva mostrar possibilidades de discussão em sala de aula, tomando tais procedimentos como uma das referências para a educação matemática na educação básica. Dentre essas possibilidades destacam-se a análise matemática dos procedimentos e algumas das possíveis comparações entre eles, a uniformização dos modelos matemáticos e a análise do erro relativo. Na concretização dessas possibilidades são veiculadas idéias matemáticas que caracterizam o conteúdo de sala de aula, constituindo um novo currículo.

**Palavras-chave:** Etnomatemática; práticas sociais de referência; registros de representação semiótica; volume.

## From wood cubature to the possibilities of classroom discussion

**Abstract:** The goal of this article is to register the procedures used by different secretariats of the Northern region of Rio Grande do Sul to determine the volume of a whole to be transformed into processed wood. Furthermore, it aims at showing the classroom discussion possibilities by taking these procedures as one of the references for mathematical learning in basic education. Among these possibilities, mathematical analysis of procedures and some possible comparisons among them, uniformization of mathematical models and analysis of a relative mistake stand out. In the materialization of these possibilities,

---

\* Esse trabalho foi elaborado com apoio do CNPq (Estágio Pós-Doutoral : 08/05-02/06 Processo 151061/2005-0).

\*\* Professora do Instituto de Ciências Exatas e Geociências e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Passo Fundo/UPF. E-mail: neiva@upf.br.

\*\*\* Professor do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC. E-mail: mericles@mtm.ufsc.br.

<sup>1</sup> Tronco de árvore abatida, ainda com a casca e limpo da rama (HOUAISS, 2004, p. 2.738). Nas serrarias, em geral, a linguagem utilizada é *tora* ao invés de *toro* de madeira.

mathematical ideas are transmitted which characterize the classroom content by constituting a new curriculum.

**Key words:** Ethnomathematics; social practices of reference; registers of semi-optical representation; volume.

## Introdução

O estudo da etnomatemática de diferentes contextos e a análise das possibilidades de inserção de seus conhecimentos na escola são objeto de inúmeras pesquisas em educação matemática.

Dentre as discussões mais gerais feitas nessas pesquisas destacamos duas idéias que consideramos significativas para o processo ensino-aprendizagem. Na concepção de Monteiro (2002, p. 106)

*[...] a organização escolar na perspectiva da Etnomatemática [...] implica em redimensionar o saber escolar, considerando a escola não apenas uma instituição responsável pela difusão do conhecimento científico, mas também um espaço de interlocução entre diferentes saberes, que possibilite a incorporação de um conhecimento recheado de “vida”.*

Giardinetto (2005, p. 3) enfatiza que

*[...] a importância da escola está na decodificação, via sistematização, da produção do saber em contextos sociais diversos através da análise das distintas produções da matemática pela caracterização do “cerne fundamental”, da “estrutura básica da matemática já elaborada histórica e socialmente” [...].*

Destacamos também a análise dos procedimentos matemáticos utilizados para determinação da medida de áreas de terra (GRANDO e MORETTI, 1995), com base num estudo que envolveu os contextos da agricultura e da escola (GRANDO, 1988). Nessa análise, foi feita uma comparação dos modelos matemáticos utilizados nesses dois contextos, para quadriláteros e triângulos, a partir de diferentes campos e níveis matemáticos, tendo como finalidade vislumbrar possibilidades de aproximação dos conhecimentos de diferentes contextos. No estudo de Grandó (1988), além da análise dos procedimentos utilizados pelos agricultores, foram elaborados problemas a partir de situações de suas atividades diárias para professores e estudantes de 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental, do meio rural e urbano. Verificamos que os professores desconheciam os procedimentos utilizados pelos agricultores e não incluíam em suas aulas situações relacionadas com atividades agrícolas. Quanto aos estudantes, constatamos que apresentaram inúmeras dificuldades conceituais para resolver os referidos problemas, contendo conceitos matemáticos já estudados, como porcentagem, perímetro, área, volume e capacidade.

Especificamente em relação ao tema deste artigo, identificamos dois trabalhos sobre cubagem de madeira, realizados com estudantes e que, assim como os anteriores, vêm ao encontro de nossas preocupações. Em um deles, Giroto (2000) mostra como extratores de toras calculam a cubagem de uma árvore e compara com os conhecimentos obtidos em sala de aula por estudantes

de 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Dentre as conclusões a que chegou está a de que “os alunos começaram a aplicar as fórmulas antes demonstradas algebricamente e utilizadas em exemplos supostos, em casos práticos de grande aplicabilidade e de grande importância” (p. 4). O trabalho de Mossman, Maldaner e Blaszak (2002, p. 8), que objetivou pesquisar as diferentes formas de cubagem de madeira e estabelecer relações entre elas, mostra que “é de suma importância possibilitar aos alunos meios para que entrem em contato com estes diferentes métodos, principalmente, com aqueles mais usados quotidianamente”, justificando que, “considerando a valorização do que, muitas vezes, eles já viram, será uma motivação para os estudos dos métodos matemáticos formais.”

Neste texto, fazemos uma discussão matemática e pedagógica sobre o processo de determinação do volume de um toro de madeira<sup>2</sup> (tronco de cone reto) a ser transformado em madeira beneficiada<sup>3</sup>. Para isso, tomamos como base dois estudos de Grando (1991<sup>4</sup>; 1992<sup>5</sup>) que abordaram atividades desenvolvidas em serrarias.

O primeiro desses dois estudos faz parte de um trabalho de uma equipe de professores que planejava elaborar uma proposta de educação para o meio rural. Na época, na etapa do projeto em que estava sendo feita a caracterização do contexto, numa serraria que funcionava na comunidade escolar, foi identificado um modelo matemático para determinar o volume de madeira de um caminhão carregado de toros e outro para determinar o volume de um único toro de madeira. Na serraria em questão, obtivemos a informação de que era necessário multiplicar a medida do diâmetro da “ponta fina” do toro por ela mesma e, depois, multiplicar o produto obtido pelo comprimento do toro. Em seguida, devia-se descontar 30% do produto final, que representa a perda de madeira no processo de corte do toro em tábuas.

Para o segundo estudo, as informações foram coletadas em oito serrarias de municípios<sup>6</sup> da região Norte do Estado do Rio Grande do Sul por acadêmicos de um curso de licenciatura. Numa disciplina em que se discutiam propostas metodológicas para o Ensino Fundamental - 5ª a 8ª série —, no estudo de volume do cone e do cilindro, propusemos que os acadêmicos fizessem um levantamento em serrarias de seus municípios de origem. Em conversas informais com os profissionais em seus locais de trabalho, foram identificadas oito diferentes maneiras de calcular o volume de um toro de madeira. As informações e os procedimentos utilizados nas serrarias foram analisados e

---

<sup>2</sup> Para fins de análise, nesse artigo, o toro de madeira será considerado como um tronco de cone reto.

<sup>3</sup> Industrializada: transformação em tábuas-padrão (5,40 m de comprimento, 30 cm de largura e 2,5 cm de espessura), ripas, peças para assoalho, etc.

<sup>4</sup> Informações obtidas no processo de caracterização do contexto de uma comunidade rural pelo projeto “Elaboração e implementação de uma proposta pedagógica alternativa para o meio rural”, desenvolvido pela Universidade de Passo Fundo - Faed e Iceg, na localidade de Povinho Velho/Passo Fundo/RS.

<sup>5</sup> Informações coletadas por acadêmicos do Curso de Ciências licenciatura Plena/Universidade de Passo Fundo, na disciplina de matemática IV, ministrada por Neiva Ignês Grando, semestre 1/1991.

<sup>6</sup> Carazinho, Getúlio Vargas, Lagoa Vermelha, Não-Me-Toque, Passo Fundo e Sertão.

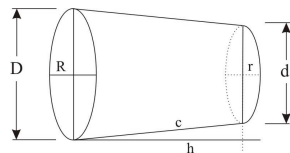
transformados em modelos matemáticos. Diante da diversidade encontrada, foram feitos cálculos com cada um dos modelos, tomando-se como exemplo um toro com medidas<sup>7</sup> indicadas por um dos trabalhadores. Os resultados foram comparados com aquele encontrado com a fórmula do volume do cone, utilizando a projeção do tronco de cone, representado pelo toro de madeira. As discussões e análises realizadas com a turma foram bastante significativas, principalmente em se tratando de um curso de formação de professores, com habilitação para ciências e matemática em nível de Ensino Fundamental - 5ª a 8ª série. Vislumbrou-se, entre os acadêmicos, a possibilidade de desenvolver um processo semelhante na disciplina de matemática em seus locais de trabalho.

No artigo que estamos apresentando fazemos uma discussão ampliada sobre as possibilidades pedagógicas desses dois estudos a partir de uma análise matemática mais detalhada, considerando diferentes campos matemáticos e níveis diferenciados de ensino. Incluímos nessa análise alguns aspectos da teoria de registros de representação semiótica, mais especificamente sobre transformações de registros.

### Determinação do volume de um toro de madeira: dos procedimentos aos modelos matemáticos

Antes de iniciar a análise propriamente dita, faremos algumas considerações para que possamos realizar o estudo dos modelos matemáticos em todos os casos.

Baseamo-nos no desenho a seguir:



- consideraremos os troncos de madeira com a forma de um tronco de cone com seções planas e perpendiculares à altura  $h$ . Descartamos, portanto, as rugosidades naturais na madeira e outras irregularidades;

- consideraremos  $h = c$ . A diferença entre a altura e o comprimento não é significativa, como podemos verificar para o exemplo de um tronco com  $h = 540$  cm,  $r = 15$  cm e  $R = 20$  cm. Neste caso específico, a diferença entre  $h$  e  $c$  não chega a 1 mm, não sendo considerada significativa para as medidas de volume encontradas com  $h$  ou  $c$ .

Além de utilizar o artifício matemático de igualar as medidas da altura e do comprimento, é preciso verificar como é feita essa medição nas serrarias. Supomos que, ao falar em altura do toro, o trabalhador esteja se referindo mesmo ao seu comprimento, uma vez que para a medida da altura seria necessário considerá-la perpendicular à base. De toda a forma, altura é um

<sup>7</sup> Medidas: comprimento, 5,40 m, diâmetro da base menor, 30 cm e diâmetro da base maior, 40 cm.

elemento importante, tanto para o estudo de sólidos como para figuras geométricas, constituindo-se numa das dificuldades dos estudantes em diferentes níveis de ensino. Citemos o caso da identificação ou traçado da altura de um triângulo equilátero ou de um paralelogramo, por exemplo, quando é comum estudantes confundirem a altura com o lado dessas figuras.

É importante perceber que as considerações feitas anteriormente para melhor possibilitar a análise dos procedimentos utilizados nas serrarias podem ser amplamente discutidas e, dessa forma, transformadas em “conteúdo” de aulas de matemática, tanto para o assunto estudado num determinado momento, como para a matemática de um modo mais geral, ou seja, para outras situações de ensino.

Com essas considerações e indicando o volume do tronco de cone por  $V_{tc}$ , expresso matematicamente por

$$V_{tc} = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2),$$

na seqüência apresentaremos duas representações algébricas para os procedimentos identificados nas serrarias (Quadro 1). A primeira mostra a seqüência de operações matemáticas realizadas para determinar o volume de um toro de madeira em cada serraria, preservada a linguagem utilizada. A segunda expressão traz uma uniformização de linguagem, na qual substituímos diâmetros por raios (das bases maior e menor do tronco de cone) e comprimento do toro por altura.

A partir dessas representações podemos levantar alguns pontos que merecem destaque. Observe-se que todos os modelos matemáticos identificados possuem uma estrutura multiplicativa (VERGNAUD, 1983), com a utilização de três medidas como fatores, o que significa que representam volume. Em todos eles há uma preocupação inicial com as bases do toro, sendo que as operações iniciais envolvem, explicitamente, raios, diâmetros ou áreas das bases. Todos os procedimentos incluem a medida da altura ou do comprimento do toro e alguns utilizam o número  $\pi$ .

Pedagogicamente, podemos ver que o trabalho de uniformização dos procedimentos identificados nas serrarias pode também se constituir em conteúdo escolar. Desde a compreensão de cada um dos procedimentos até chegar aos modelos uniformizados há um longo caminho, que envolve diferentes conceitos. Os processos de análise e síntese, de abstração e generalização estão, necessariamente e em diferentes níveis, presentes (VIGOTSKI, 1996).

Além disso, é importante destacar que os dois registros (DUVAL, 1993; 2003), o procedimento original e o modelo matemático uniformizado, complementam-se, dependendo do tipo de análise que pretendemos fazer. É possível comparar tanto os procedimentos da escola com aqueles de outros contextos como os de outros contextos entre si. Por exemplo, para comparar, algebricamente, com a fórmula escolar do tronco de cone, os procedimentos das serrarias tornam-se mais visíveis com uma linguagem uniformizada.

Particularizando, vemos claramente a diferença entre  $V_{tc} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$  e  $V_s = h(R^2 + 2Rr + r^2)$ , o que não seria possível de imediato se comparássemos  $\frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$  com  $(\frac{D+d}{2})(\frac{D+d}{2})h$ .

Número de serrarias e respectivas localidades		Cubagem de madeira nas serrarias		Modelos matemáticos $V_{ser}$
		Procedimentos	Informações adicionais	
1	Sertão	$\frac{d}{2} \times \frac{d}{2} \times h \times \pi$	d = medida do diâmetro da base menor h = altura do toro	$\pi r^2 h$
2	Passo Fundo	$r \times r \times \pi \times h - 30\%$	r = medida do raio da base menor Tipo de madeira: pinheiro	$\pi r^2 h - 0,3\pi r^2 h$
		$r \times r \times \pi \times h - 40\%$	Tipo de madeira: canela	$\pi r^2 h - 0,4\pi r^2 h$
3	Passo Fundo	$\frac{(D_1 \times D_2) + (d_1 \times d_2)}{2} \times c$	C = comprimento do toro	$2h(R^2 + r^2)$
4	Passo Fundo	$(\frac{A_{pé} + A_{ponta}}{2}) \times h$	$A_{pé} = \frac{\pi D^2}{4}$ $A_{ponta} = \frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi h(r^2 + R^2)}{2}$
5	Passo Fundo (Povinho Velho)	$d \times d \times c - 30\%$	d = medida do diâmetro da base menor	$2,8 r^2 h$
6	Getúlio Vargas	$d \times d \times h - 30\%$		$2,8 r^2 h$
7	Carazinho	$[(\frac{R+r}{2}) : 2 \times (\frac{R+r}{2}) : 2] \pi h$	R = medida do raio da base maior r = medida do raio da base menor	$\pi h \frac{(r+R)^2}{16}$
8	Não-Me-Toque	$(\frac{D+d}{2})(\frac{D+d}{2})h$	D = medida do diâmetro da base maior d = medida do diâmetro da base menor	$h(R^2 + 2Rr + r^2)$ ou $h(R+r)^2$
9	Lagoa Vermelha	$(\frac{A+a}{2})h$	A = área do quadrado inscrito na base maior a = área do quadrado inscrito na base menor	$(R^2 + r^2)h$

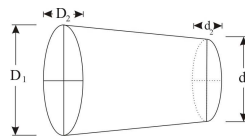
Quadro 1: procedimentos para cubagem de madeira e modelos matemáticos uniformizados

Por outro lado, é com o procedimento original que melhor se percebe o trabalho inicial com as bases e, conseqüentemente, a idéia geral do

procedimento: “médias das medidas das bases vezes altura”. Podemos, por exemplo, comparar os procedimentos das serrarias 3, 4 e 9, considerando a primeira parte ou primeiro fator de cada um deles:  $\frac{(D_1 \times D_2) + (d_1 \times d_2)}{2}$  representa a média das áreas de retângulos (ou quadrados) circunscritos às bases;  $\frac{A_{pé} + A_{ponta}}{2}$  representa a média das áreas das bases, consideradas como círculos;  $\frac{A + a}{2}$  representa a média das áreas de quadrados inscritos nas bases do toro de madeira (tronco de cone). No entanto, percebemos que a comparação entre os procedimentos dessas três serrarias fica evidenciada mais claramente se olharmos os respectivos modelos matemáticos uniformizados,  $2h(R^2 + r^2)$ ,  $\frac{\pi h(r^2 + R^2)}{2}$  e  $(R^2 + r^2)h$ , observando que  $V_3 > V_4 > V_9$ , para quaisquer medidas de h, r e R. É interessante perceber que, por não considerar as bases do toro de madeira como círculos, o procedimento da serraria 3 mostra-se coerente com a realidade; no entanto, é o procedimento da serraria 4 que vai nos fornecer uma medida de volume mais aproximada em relação àquela obtida com o modelo escolar (ver resultados na tabela 1, mais adiante), apresentando, portanto, o menor erro matemático relativo em relação aos demais<sup>8</sup>. A diferença básica entre os procedimentos 3 e 4 encontra-se exatamente no tipo de cálculo utilizado para determinar a “média das medidas das bases” e, mais especificamente, para a medida das superfícies das próprias bases.

Uma outra discussão desse nível resulta da comparação dos procedimentos das serrarias 1, 2, 5 e 6, uma vez que apresentam a mesma idéia geral: “área da base menor vezes altura”. A diferença fundamental é a de que os sujeitos das duas primeiras serrarias consideram a base como um círculo e os das outras duas, como um quadrado circunscrito em um círculo.

Com base nas duas considerações feitas anteriormente, o procedimento da serraria 3 é o que se apresenta diferenciado em relação aos demais, em função dos “diâmetros”. Vemos que das bases são tomadas duas medidas diferentes,  $D_1$  e  $D_2$  da base maior e  $d_1$  e  $d_2$  da base menor, o que significa que as bases não são consideradas como círculos como nos demais procedimentos. No entanto, para uniformizar o modelo, consideramos  $D_1$  e  $D_2$  e  $d_1$  e  $d_2$  como segmentos perpendiculares, com interseção no ponto médio de cada um dos dois pares. Assim, pelo procedimento dessa serraria,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $d_1$  e  $d_2$  equivalem às medidas dos lados de dois retângulos circunscritos às bases do toro de madeira, como podemos deduzir da figura a seguir:



<sup>8</sup> Cálculos feitos para o caso particular de um toro de madeira com medidas específicas (h = 5,40 m; r = 15 cm; R = 20 cm).

A partir disso, consideramos  $\frac{(D_1 \times D_2) + (d_1 \times d_2)}{2}$  como a média das áreas de dois retângulos de lados  $D_1$  e  $D_2$  e  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. Iniciando com a primeira área, transformamos esse retângulo num quadrado com superfície equivalente a  $D_1 \times D_2$ , de lados  $A$  e  $B$ , de tal forma que podemos identificar a área do quadrado como  $L^2 = A \times B$ . Assim:

de  $L = 2R$  vem  $(2R)^2 = A \times B$ , ou seja,  $4R^2 = A \times B$ . Logo,  $L^2 = 4R^2$ .

Da mesma forma, para a outra base, a área é  $l^2 = 4r^2$ .

Substituindo, no procedimento da serraria  $\frac{(D_1 \times D_2) + (d_1 \times d_2)}{2} \times c$ , temos:

$$V_{ser3} = \left(\frac{AB+ab}{2}\right)h, \quad \text{ou seja,} \quad V_{ser3} = \left(\frac{4R^2 + 4r^2}{2}\right)h, \quad \text{que equivale a}$$

$$V_{ser3} = 2h(R^2 + r^2).$$

### Sobre o erro relativo dos modelos matemáticos das serrarias

Pelas diferenças existentes entre os modelos matemáticos podemos concluir que os resultados encontrados sofrem uma variação para mais ou para menos, tendo como parâmetro os moldes escolares. Significa dizer que, com os modelos matemáticos das serrarias, o volume encontrado representa uma medida aproximada, por falta ou por excesso, em relação à medida real. Para fins de cálculo, consideramos um tronco de cone com as seguintes medidas:  $h =$

5,40 m,  $d = 30$  cm e  $D = 40$  cm. Aplicando a fórmula  $V_{tc} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$ ,

obtivemos  $0,5230 \text{ m}^3$  para o volume do tronco de cone, que pode ser comparado com as medidas encontradas com os modelos matemáticos das serrarias, apresentadas na Tabela 1. Além disso, nesta tabela apresentamos a diferença de medida entre  $V_{tc}$  e  $V_{ser}$ , em  $\text{m}^3$ , e, finalmente, o erro relativo de cada modelo comparado ao volume do tronco de cone, determinado com a fórmula escolar.

Com base nas informações da tabela, destacamos alguns aspectos que poderiam servir de referência para estudos escolares. Além da diversidade dos modelos em si e de sua relação com o conceito de volume como grandeza tridimensional (VERGNAUD, 1983), poderíamos levantar a discussão sobre a pertinência desses modelos para o propósito que estão sendo utilizados. Analisar as aproximações com o modelo matemático da escola, tanto com ferramentas aritméticas, como com algébricas, também proporcionaria o desenvolvimento da capacidade de análise de situações contendo conceitos da matemática escolar. Observamos que, ao uniformizar a linguagem simbólica dos modelos matemáticos das serrarias, podemos visualmente perceber semelhanças e diferenças, tanto entre eles mesmos, como entre eles e o modelo escolar. Por outro lado, os cálculos nos dão uma idéia das diferenças de medida, aspecto que pode ser também importante, dependendo do nível e da série em que estivermos atuando. Nesse sentido, é importante que os estudantes percebam o significado



das fórmulas, o papel que representam na matemática e em outras disciplinas e áreas do conhecimento; que distingam uma fórmula - representação algébrica - de um resultado específico - representação aritmética -, como é o caso da fórmula do volume do tronco de cone e a medida encontrada para um tronco de cone particular.

Número de serrarias e respectivas localidades <sup>9</sup>		Modelos matemáticos $V_{ser}$	Volume m <sup>3</sup>	Diferença: $V_{tc} - V_{ser}$	Erro relativo: $E = \text{abs}\left(\frac{V_{tc} - V_{serraria}}{V_{tc}}\right)$
	Sertão	$\pi r^2 h$	0,3817	+0,1413	0,2702 (27,02% a menos)
	Passo Fundo	$\pi r^2 h - 0,3\pi r^2 h$	0,2671	+0,2559	0,4893 (48,93% a menos)
		$\pi r^2 h - 0,4\pi r^2 h$	0,2290	+0,2940	0,5622 (56,22% a menos)
	Passo Fundo	$2h(R^2 + r^2)$	0,6750	-0,1520	0,2906 (29,06% a mais)
	Passo Fundo	$\frac{\pi h(r^2 + R^2)}{2}$	0,5301	-0,0071	0,0135 (1,35% a mais)
	Passo Fundo (Povinho Velho)	$2,8 r^2 h$	0,3402	+0,1828	0,3496 (34,96% a menos)
	Getúlio Vargas	$2,8 r^2 h$	0,3402	+0,1828	0,3496 (34,96% a menos)
	Carazinho	$\pi h \frac{(r + R)^2}{16}$	0,1298	+0,3932	0,7519 (75,19% a menos)
	Não-Me-Toque	$h(R + r)^2$	0,6615	-0,1385	0,2648 (26,48% a mais)
	Lagoa Vermelha	$(R^2 + r^2)h$	0,3375	+0,1855	0,3547 (35,47% a menos)

Tabela 1: volume, diferença e erro relativo dos modelos matemáticos das serrarias

Nessa discussão poderíamos incluir aquela relacionada ao objeto da matemática como ciência e como disciplina escolar, tendo como parâmetro o conhecimento de outras áreas. Tomando volume como exemplo, vemos que é um conhecimento abstrato - o conceito de volume não representa um objeto da realidade, mas uma medida de objetos tridimensionais ou do espaço que estes ocupam. É um objeto matemático. Por outro lado, volume, como medida de espaço, é um conceito geral. Se quisermos determinar a medida de um objeto tridimensional, necessitamos de uma fórmula matemática específica que nos possibilite determinar seu volume. Nesse caso, relativamente ao mesmo conceito— volume —, há diferentes fórmulas matemáticas escolares, todas

<sup>9</sup> O procedimento da serraria 5 refere-se ao estudo de Grando (1991). Os demais fazem parte do estudo de Grando (1992).

baseadas numa estrutura multiplicativa incluindo três fatores com unidades de medida de comprimento (VERGNAUD, 1983). Assim,  $V_{tc} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$  é um tipo de registro de representação do objeto matemático volume do tronco de cone (DUVAL, 2003).

A linguagem utilizada nos diferentes contextos geraria, também, uma discussão interessante. É comum ouvir as expressões *cubação de madeira*, *cubagem de madeira*, *cubar a madeira*, assim como *cubar a terra*, em contextos de serraria e agricultura. O que significa *cubar a terra*, o que é *cubagem de madeira* são questões a serem colocadas. Qual a relação entre o metro cúbico e um tronco de madeira? E, mesmo, o que significa *metro cúbico*? O que é *medir*?

Além disso, o estudo da história da matemática, especificamente da evolução do conceito de volume ao longo do desenvolvimento da humanidade, ampliaria as possibilidades de visão da cultura como resultado de um processo, carregando consigo possibilidades de aprendizagem e de desenvolvimento intelectual. Os próprios conceitos de cultura e de processo poderiam ser discutidos e ampliados entre os estudantes e professores nas aulas de matemática.

Um aspecto retirado das informações da Tabela 1 merece também destaque. Estamos falando do erro relativo dos procedimentos identificados nas serrarias, modelos matemáticos e gráficos das funções correspondentes. Neste texto apresentamos uma discussão em relação ao modelo matemático de duas das serrarias, para fornecer uma idéia desse tipo de análise que envolve diferentes níveis de complexidade matemática.

Para calcular o volume, na serraria de Sertão, o toro de madeira é considerado como um cilindro. Sendo o comprimento  $h$  e o raio tomado como o menor entre as seções, o volume calculado é dado por:  $V_{sertão} = \pi r^2 h$ . O volume assim calculado é uma aproximação por falta. Tem a sua razão de ordem prática, porque a parte que não é considerada representa aproximadamente a parte inaproveitável para a produção de tábuas, as chamadas “costaneiras”, destinadas para outros fins, com um valor de mercado bem menor.

Considerando o erro relativo dado por:  $E_{Sertão} = \text{abs}\left(\frac{V_{tc} - V_{sertão}}{V_{tc}}\right)$  e

fazendo  $k = \frac{R}{r}$ , podemos escrever esse erro da seguinte maneira:

$E_{Sertão} = \text{abs}\left(\frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1}\right)$ . Aplicando o tratamento matemático adequado,

obtemos uma expressão equivalente:  $E_{Sertão} = \text{abs}\left(1 - \frac{3}{k^2 + k + 1}\right)$ .

É importante destacar que, a exemplo da uniformização dos modelos matemáticos, feita anteriormente, o tratamento dado à expressão que representa o erro absoluto do procedimento da serraria de Sertão transforma-se, também, em conteúdo de sala de aula. Observemos que, inicialmente, foi necessário

utilizar um artifício matemático, ou seja, considerar  $\frac{R}{r} = k$ . Para chegar à expressão final desejada,  $E_{\text{Sertão}} = \text{abs}\left(1 - \frac{3}{k^2 + k + 1}\right)$ , foi necessário utilizar um outro artifício matemático não dado inicialmente:  $E_{\text{Sertão}} = \text{abs}\left(\frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1}\right) = \text{abs}\left(\frac{(k^2 + k + 1) - 3}{k^2 + k + 1}\right)$ . A partir daí, dividindo ambos os termos do numerador pelo denominador, obtivemos  $E_{\text{Sertão}} = \text{abs}\left(1 - \frac{3}{k^2 + k + 1}\right)$ .

Observemos que, mesmo tendo a mesma referência, a expressão dada em  $E_{\text{Sertão}} = \text{abs}\left(1 - \frac{3}{k^2 + k + 1}\right)$  fornece informações mais visíveis em relação ao

erro do que a expressão  $E_{\text{Sertão}} = \text{abs}\left(\frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1}\right)$ . Por exemplo, quando  $k = 1$  ( $R$

$= r$ ), o erro é 0 (caso do toro de madeira em forma de cilindro) e, à medida que  $k$  cresce (com  $R$  tornando-se cada vez maior do que  $r$ ), o erro se aproxima de 1, que é o máximo a que pode chegar (100%). Nesse caso específico do modelo matemático de Sertão, quanto menor a diferença entre os raios  $R$  e  $r$ , das bases do tronco de cone (toro de madeira), menor é o erro do modelo, em relação à fórmula ou modelo escolar. Dentre os procedimentos cujo volume representa uma aproximação por falta, podemos verificar que o da serraria de Carazinho determina o menor volume, ou seja, 75% a menos do que o real (para  $k = 1$ ). Com o tratamento matemático dado a esse procedimento transformamos sua

expressão em  $\pi h \frac{(r+R)^2}{16}$ , que representa o volume de um cilindro de raio

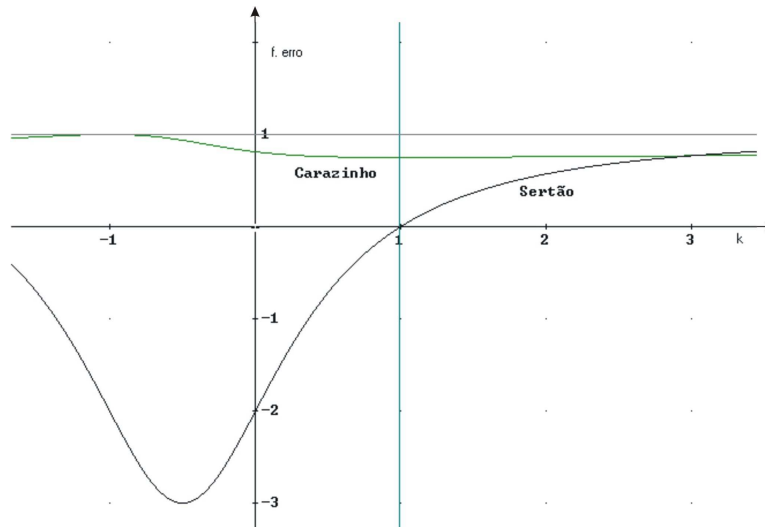
$\frac{(r+R)}{4}$ . O erro para esse caso, em termos da constante  $k$ , é dado por

$$E_{\text{car}} = \text{abs}\left(\frac{13k^2 + 10k + 13}{16(k^2 + k + 1)}\right) = \text{abs}\left(\frac{13}{16} - \frac{3k}{16(k^2 + k + 1)}\right).$$

Podemos observar que o tratamento desses modelos matemáticos (DUVAL, 1993; 2003), como uma transformação interna, possibilita maior compreensão do erro de cada um deles. Por outro lado, a sua representação em forma curva no plano cartesiano caracteriza-se como uma conversão de

$f_{\text{Sertão}} = \frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1}$  e de  $f_{\text{Carazinho}} = \frac{13k^2 + 10k + 13}{16(k^2 + k + 1)}$ , como as expressões das

funções associadas ao erro para os seus respectivos gráficos:



Comparando as duas curvas, que representam as funções referentes aos procedimentos de Sertão e de Carazinho, observamos que os gráficos das respectivas funções são considerados para os valores de  $k \geq 1$ .

Dessa forma, o erro de Sertão vai aumentando e aproxima-se de 100%, à medida que  $k$  aumenta indefinidamente, ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1} \right) = 1$ .

Essa mesma conclusão pode ser obtida em outro nível de ensino, tomando-se por base a expressão  $\left( 1 - \frac{3}{k^2 + k + 1} \right)$ . Observemos que, quando  $k$  cresce indefinidamente, a expressão  $\left( \frac{3}{k^2 + k + 1} \right)$  aproxima-se de zero, uma vez que o 3 fica dividido por um valor que aumenta indefinidamente.

No caso de Carazinho, com  $k$  aumentando indefinidamente, a expressão  $\left( \frac{3k}{16(k^2 + k + 1)} \right)$  também se aproxima de zero. Porém, tanto essa representação

como a sua equivalente  $\left( \frac{13}{16} - \frac{3k}{16(k^2 + k + 1)} \right)$  não mostram claramente o valor

limite de resultados, havendo a necessidade de usar um novo artifício matemático. Dividindo a segunda fração por  $k$ , vemos que, quando  $k$  aumenta indefinidamente, o erro do modelo matemático de Carazinho, expresso agora por

$$\left( \frac{13}{16} - \frac{3}{16(k+1+1/k)} \right), \text{ tende a } \frac{13}{16}, \text{ sendo o } \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{13k^2 + 10k + 13}{16(k^2 + k + 1)} \right) = \frac{13}{16}.$$

Como observamos, as expressões  $\left(1 - \frac{3}{k^2 + k + 1}\right)$  e  $\left(\frac{13}{16} - \frac{3}{16(k+1+1/k)}\right)$  revelam mais claramente o valor limite da função quando  $k$  tende a infinito do que as respectivas expressões indicadas anteriormente, em  $f_{\text{Sertão}} = \frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k + 1}$  e  $f_{\text{Carazinho}} = \frac{13k^2 + 10k + 13}{16(k^2 + k + 1)}$ . Constatamos, mais uma vez, que as

transformações de registros, quer sejam tratamentos, quer sejam conversões, aumentam e diversificam as possibilidades de análise e contribuem para a apropriação ou ampliação dos significados matemáticos.

### Algumas considerações finais

Como podemos ver, a diversidade de modelos matemáticos possibilita também a diversidade de interpretações. O importante é o desafio de estabelecer relações e analisar de diferentes ângulos, principalmente em se tratando de situações reais. Estaremos proporcionando a “saída” do pensamento, direcionando-nos a outros contextos, vendo a matemática com diferentes “olhares”.

Em síntese, informações sobre a matemática de diferentes contextos podem ser obtidas por professores ou estudantes e analisadas na escola, o que caracterizaria um currículo diferenciado. Esse processo proporcionaria maiores possibilidades para a apropriação de significados, a ampliação da visão de matemática e a capacidade de analisar situações reais.

Conceitos científicos gerados por necessidades da relação do homem com o mundo e, portanto, determinados pelas condições materiais do desenvolvimento sócio-histórico são descontextualizados, através do processo de transposição didática<sup>10</sup>, para se constituírem em objetos de conhecimento na escola. Os conceitos matemáticos chegam à sala de aula descontextualizados em relação ao processo de elaboração, e a recontextualização ou ressignificação poderiam se dar pela análise epistemológica - história da matemática - ou pela análise de atividades nas quais os conceitos científicos abordados pela escola são utilizados. Nesse sentido, Develay (1993) e Martinand (1986) defendem a utilização de práticas sociais como referência para a escola. O envolvimento de práticas sociais na atividade de estudo implicaria, então, uma ampliação da noção e do significado da transposição didática estudada por Chevallard (1985), que se refere às transformações do saber sábio/conhecimento científico.

Nesse sentido, as discussões, teóricas e práticas, sobre etnomatemática fazem parte de um processo e, como tal, ainda precisam avançar. Interrompemos nossa discussão com uma citação de Ponte (2003, p. 3), que explicita uma concepção relacionada com as idéias que estamos defendendo: “Para mim o que está em causa na aprendizagem escolar da matemática, é o

<sup>10</sup> Essa é uma noção desenvolvida por Chevallard (1985) para caracterizar o conjunto de transformações adaptativas do saber sábio (científico) até se tornar objeto de ensino.

desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, mas também a capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando idéias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo”.

Com base nas idéias veiculadas e nas discussões feitas ao longo do texto, observamos que a importância para educação matemática não está estritamente ligada aos procedimentos utilizados nas serrarias, em si, mas, principalmente, às possibilidades de análise e às relações que podem ser feitas ao longo dos processos de ensino e de aprendizagem escolar.

Ressaltamos ainda que as possibilidades de análise indicadas neste texto não excluem outras que poderiam ser levantadas em sala de aula e analisadas com os estudantes em diferentes níveis de ensino.

### Referências bibliográficas

CHEVALLARD, Yves. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage, 1985.

DEVELAY, Michel. *De l'apprentissage à l'enseignement: pour une épistémologie scolaire*. 3. ed., Paris: ESF éditeur, 1993.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, n. 5, 1993, p. 37-65.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. Cultura, escola e ensino da matemática: algumas reflexões quanto à apropriação do conhecimento escolar em face à questão cultural. In: Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 5, 2005, Porto. *Anais...* Porto: Ed. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005. 1 CD-ROM.

GIROTTTO, Márcia Ballestro. *A matemática vivenciada pelos madeireiros em comparação à ensinada em sala de aula*. Disponível em : < <http://www.ensino.univates.br/~4iberoamericano/trabalhos/trabalho050.pdf> >. Acesso em 03/11/2006.

GRANDO, Neiva Ignês. *A matemática na agricultura e na escola*. 1988. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1988.

GRANDO, Neiva Ignês. A matemática em diferentes contextos culturais. *Boletim de Educação Matemática - SBEM/RS*, n. 3, p. 8-11, ago./out. 1991.

\_\_\_\_\_. Diversidade de modelos matemáticos. *Boletim de Educação Matemática - SBEM/RS*, n.4, p. 26-28, nov./dez. 1991, jan./abr. 1992.

GRANDO, Neiva Ignês; MORETTI, Mércles Thadeu. Análise de modelos utilizados na agricultura na determinação de áreas. *Zetetiké*, Campinas, a. 3, n. 4, p. 73-93, nov. 1995.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Salles. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

MARTINAND, Jean-Louis. *Connaitre et transformer la matière: des objectifs pour l'initiation aux sciences et techniques*. Berne: Peter Lang, 1986.

MONTEIRO, Alexandrina. A etnomatemática em cenários de escolarização: alguns elementos de reflexão. *Reflexão e ação*, Santa Cruz do Sul, v. 10, n. 1, p. 93-108, jan./jun. 2002.

MOSSMANN, Adriana Inês; MALDANER, Janice Maria; BLASZAK, Sidmara. *Cubagem de madeira*. Disponível em : < <http://www.projetos.unijui.edu.br/matemática/modelagem/cubagem/index.html>>. Acesso em 03/11/2006.

PONTE, João Pedro Mendes da. Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM)*, p. 25-39. Lisboa: APM.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics: concept and process*. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

