



SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA: sobre as mudanças do conhecimento tecnológico de um determinado tempo e espaço

DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE: about changes in technological knowledge of a determined time and space

Carmen Vieira Mathias¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5667-159X>

RESUMO

Nas últimas três décadas, foram desenvolvidos ambientes tecnológicos que oferecem diferentes maneiras de realizar atividades de cunho geométrico, desde o ensino básico até o ensino superior. Este artigo, baseado nas experiências vivenciadas pela autora e em pesquisas publicadas em periódicos nacionais e internacionais sobre educação matemática, tem o objetivo de descrever memórias de uma professora ao ensinar Geometria em cursos de formação de professores de matemática, fixando o olhar na mediação proposta pelas tecnologias digitais disponíveis em diferentes épocas. O trabalho começa fornecendo uma visão sobre a apropriação das tecnologias pelo professor. A segunda seção faz uma pequena síntese do caminho trilhado pela autora do artigo ao começar a usar as tecnologias digitais em sala de aula. A terceira seção enfoca, em ordem cronológica, os diferentes softwares utilizados para ensinar e aprender Geometria e outros conteúdos. Conclui-se que revisitar memórias do que se fez oportuniza refletir sobre as práticas, principalmente sobre o quanto se aprende quando se ensina.

Palavras-chave: Geometria. Tecnologias. Softwares.

ABSTRACT

Over the last three decades, technological environments have been developed that offer different ways to carry out geometric activities, from basic education to higher education. This article, based on the author's experiences and on research published in national and international journals on mathematics education, aims to describe memories of a teacher while teaching Geometry in mathematics teacher training courses, focusing on the mediation proposed by technologies available at different times. The work begins by providing an insight into the appropriation of technologies by the teacher, the second section makes a short summary of the path taken by the author of the article when she started to use digital technologies in the classroom. The third section focuses, in chronological order, on the different software used to teach and learn Geometry and other content. It is concluded that when revisiting memories of what was done, it gives us the opportunity to reflect on practices, especially on how much is learned when teaching.

Keywords: Geometry. Technologies. Software.

¹ Doutora em Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Roraima, 1000, P. 13 – sala 1217, Camobi, Santa Maria, RS, Brasil, CEP: 97105900. E-mail: carmen@ufsm.br.

INTRODUÇÃO

Em quase todos os aspectos da vida, há mudanças tecnológicas drasticamente importantes que afetam o cotidiano. Um exemplo marcante é a presença de dispositivos móveis, em particular os smartphones, que são amplamente utilizados por pessoas de todas as idades. No entanto, o efeito da tecnologia no sistema educacional não é tão avassalador como nas outras áreas da vida. Essa falta de mudança não é, necessariamente, resultado de oportunidades ou de incentivos para a educação. Kaput (1992) já previa que as principais limitações do uso das tecnologias, nas próximas décadas, provavelmente seriam “menos o resultado de limitações quanto ao seu uso, do que o resultado da limitação da imaginação humana e das restrições a velhos hábitos e estruturas sociais” (Kaput, 1992, p.515). Nesse sentido, Borba e Pentado (2010) referem-se aos velhos hábitos, ao citar que “alguns professores procuram caminhar numa zona de conforto onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento” (Borba & Pentado, 2016, p. 56).

Os professores aos quais Borba e Pentado (2016) referem-se são, principalmente, aqueles que atuam no ensino básico. Para esse nível de ensino, a Resolução CNE/CP nº 9/2001, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores na Educação Básica, prevê “que os cursos de formação ofereçam condições para que os futuros professores aprendam a usar tecnologias de informação e comunicação, cujo domínio é importante para a docência e para as demais dimensões da vida moderna” (Brasil, 2002, p.45). Ou seja, pela força da lei, as instituições de ensino superior deveriam disponibilizar formação sobre tecnologias aos alunos de licenciatura desde o início dos anos 2000.

Apesar desse fato, pesquisas como Bittar (2011) e Aguiar e Basso (2018) discutem sobre a apropriação da tecnologia pelo professor, assim como sobre seu uso nas práticas pedagógicas, especialmente no que diz respeito à matemática. Conforme Aguiar e Basso (2018), existem lacunas na formação de professores dos Anos Iniciais no que tange ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para fins pedagógicos. Reforçando, Bittar (2011) aponta que a integração das tecnologias na prática pedagógica do professor

(...) implica em fazer uso do instrumento de forma que este contribua com o processo de aprendizagem do aluno, que lhe permita compreender, ter acesso, explorar diferentes aspectos do saber em cena. (...) a tecnologia deve ser usada com fins de permitir ao aluno ter acesso a propriedades ou a aspectos de um conceito; ou ainda a atividades matemáticas diferentes daquelas habitualmente tratadas no ambiente papel e lápis (Bittar, 2011, p.158).

Nesse contexto, Bittar (2011) exemplifica a integração das tecnologias no contexto escolar via o uso de softwares de geometria dinâmica. Os referidos softwares foram os

principais responsáveis pela revitalização do ensino de Geometria ocorrida nos últimos anos (Aguiar, 2009). É exatamente sobre a combinação desse tópico da matemática e das tecnologias que trata este artigo, cujo objetivo é descrever as memórias de uma professora ao ensinar Geometria em cursos de formação de professores de matemática, fixando o olhar na mediação proposta pelas tecnologias digitais disponíveis em diferentes épocas.

1. O COMEÇO ²

Esta história inicia no final dos anos de 1990, quando eu, recém formada em Matemática Licenciatura, começo minha carreira profissional lecionando em uma escola privada no interior do Rio Grande do Sul. Como sabemos, para que uma escola privada sobreviva, deve vender seus serviços e, naquela época, o que havia de mais moderno eram os laboratórios de informática. No caso da referida escola, o laboratório era equipado com 10 computadores com processador Pentium 166 MX, drives para disquetes e 8 Mb (*megabytes*) de memória RAM. Lembro da especificação, pois é a mesma do meu primeiro computador. Algo interessante é que, no laboratório, não havia acesso à internet, apesar de vários alunos já fazerem uso dessa ferramenta em suas casas.

Quanto aos softwares utilizados, recorro que o sistema operacional era o Windows e tínhamos à disposição todo o pacote Office (Word, Power Point e Excel). Em particular, para o ensino de matemática, a rede da qual a escola fazia parte adquiriu um software denominado Cabri- Géomètre (que será abordado com mais detalhes na próxima seção deste texto e, de agora em diante, será denominado apenas de Cabri). Nesse cenário, ministrando aulas para a oitava série, eu precisava usar o laboratório (na verdade, era uma obrigação). Meu conhecimento de informática, à época, limitava-se ao Word. Entretanto, durante a graduação, tive contato com um software chamado Mathematica³, o que foi providencial, pois retirou parte da insegurança em me atrever e tentar aprender a usar o Cabri.

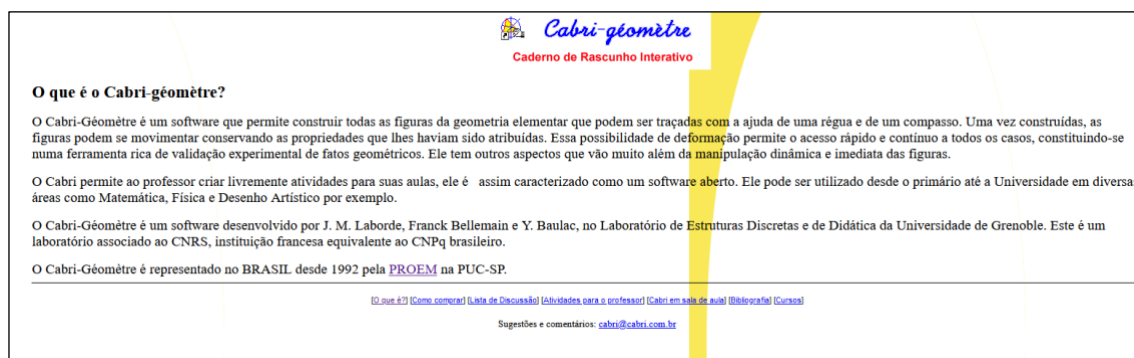
Essa experiência em compreender como utilizar um software diferente se deu pelo acesso, via rede de computadores, a sites especializados. Um deles foi o site do próprio software em Língua Portuguesa. Utilizando a ferramenta *WaybackMachine*⁴, foi possível verificar que existe um domínio denominado *cabri.com.br* desde o ano de 1999 (Figura 1).

² Faço uso da primeira pessoa do singular, neste momento, por se tratar de minhas experiências e histórias.

³ <https://www.wolfram.com/mathematica/>

⁴ <https://archive.org/web/>

Figura 1 – Site do Cabri em português



Fonte: Recuperado via o site *WaybackMachine* (2021)

Além dos sites, existiam livros que ensinavam a utilizar o software. Em particular, o denominado “Descobrimo o Cabri-Géomètre - Caderno de atividades” (Bongiovanni et al., 1997), adquirido pela escola, foi a minha fonte de pesquisa e de inspiração para o planejamento das aulas.

Em 1998, a simples ideia de levar os alunos do ensino fundamental ao laboratório de informática era assustadora. Vários questionamentos vinham à mente: “e se os alunos estragarem algo, se não se comportarem ou se souberem mais do que eu?”. Essas angústias permeavam meus dias e, principalmente, os momentos de planejamento das aulas. Lembro que, na primeira aula, exploramos as ferramentas disponíveis, tal como faziam Bongiovanni et al. (1997). Lamentavelmente, não guardei os registros escritos ou realizei registros fotográficos de tais aulas. Porém, recordo, com alegria, de uma atividade em especial, a qual guardei com muito zelo, por tratar de uma experiência que foi extremamente marcante (Figura 2).

Figura 2 – Uma atividade usando o software Cabri

ATIVIDADES COM CABRI GÉOMÈTRE

Você pode definir as relações trigonométricas em um triângulo retângulo, através da Calculadora

Para isso, construa um triângulo retângulo, Meça seus ângulos internos, para saber de qual ângulo você está determinando o seno, o co-seno, e a tangente.

Use da definição das relações trigonométricas em um triângulo retângulo para encontrar o seno, o co-seno e a tangente do ângulo escolhido.

Para isso, siga os seguintes passos:

- Crie duas semi-retas de mesma origem O
- Crie dois pontos A e B sobre uma das semi-retas
- Crie duas perpendiculares a semi-reta inferior, uma passando por A e outra por B
- Marque as interseções A' e B' das perpendiculares com a semi-reta superior
- Crie os segmentos AA' e BB'
- Esconda as perpendiculares
- Selecione Marca de ângulo e marque os ângulos BÔB, OÂA' e OÔB'
- Meça o ângulo BÔB'
- Meça os segmentos AA' e BB', AO, OB, OA' e OB'

Depois desses passos você obterá algo semelhante a figura seguinte:

Use a calculadora e efetue os quocientes $\frac{AA'}{OA}$ e $\frac{BB'}{OB}$. O que você observa com relação aos resultados obtidos?

Movimente os pontos A e B sobre a semi-reta e observe o que ocorre. Movimente a semi-reta e observe os resultados. O que acontece quando aumentamos o ângulo?

Chamamos a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa de seno do ângulo. Se você selecionar a opção calculadora e calcular o seno do **ângulo Ô**, deverá obter a mesma resposta anterior.

Use os mesmos procedimentos acima e determine o co-seno e a tangente do ângulo Ô.

Fonte: Arquivos da autora (2021)

Aqueles que já ensinaram razões trigonométricas em um triângulo retângulo percebem como é complexo fazer com que os alunos se apropriem de tais conceitos. Em uma primeira

experiência como professora ministrando esse conteúdo, tal atividade tornou-se ainda mais difícil, seja pela falta de vivência de sala de aula, seja pela impaciência imposta pela própria juventude. No meu caso, não foi diferente, pois meus alunos simplesmente não conseguiam compreender por que aqueles cálculos faziam sentido.

Recordo que, ao trabalhar a atividade ilustrada na Figura 02, os alunos a consideraram muito massante, pois precisaram construir todos os elementos. Porém, ao finalizar a construção e ao movimentá-la, houve um certo alvoroço no laboratório, foi como se surgisse uma luz. Em particular, lembro da reação de um menino que ficou encantando ao perceber que os pontos mudavam de lugar, mas que as relações continuavam as mesmas. Ele explicou esse fato com muita propriedade aos colegas e foi um momento ímpar na minha trajetória docente.

A partir desse dia, decidi que, sempre que possível, o Cabri seria um aliado importante e estaria presente no planejamento de minhas aulas. No ano de 1999, encerrei meu ciclo como professora do ensino básico e comecei a trabalhar como professora no ensino superior. Nessa caminhada, lecionei várias disciplinas (desde “Estatística Básica” até “Geometria Diferencial”), mas meu foco sempre esteve em disciplinas como “Geometria”, “Desenho Geométrico” e “Tecnologias Educacionais”. Assim, nas seções seguintes, abordarei os softwares que utilizei ou ainda utilizo, em sala de aula, nesse nível de ensino.

2. UMA CAMINHADA COM OS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

A contribuição da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Geometria, nos dias atuais, está fortemente ligada às representações gráficas interativas dinamicamente manipuláveis. Porém, a mídia digital para o aprendizado da Geometria surgiu com o ambiente Logo⁵ (Abelson & Disessa, 1981), em um momento em que a manipulação dinâmica ainda não estava disponível. Na ausência dessa funcionalidade, o registro representacional gráfico não foi o centro das atenções. A prioridade nesse ambiente foram os recursos de programação para a construção de significado matemático (Papert, 1994).

Nos últimos quarenta anos, pesquisas têm se dedicado, principalmente, a dois tipos de tecnologias que possibilitam representações gráficas: o ambiente Logo e sua filosofia de micromundo e os softwares de geometria dinâmica (SGD), que possuem graus variados e geralmente crescentes de interatividade e manipulação direta. Ambos os tipos de tecnologia

⁵ Logo-based Turtle Geometry

estão ligados a uma perspectiva teórica de aprendizagem. Porém, nosso interesse concentra-se no segundo tipo, ou seja, nos SGD.

O termo “software de geometria dinâmica” foi originalmente usado em 1990, pelo designer Nick Jackiw e pelo diretor da Key Curriculum Press Steven Rasmussen. Eles inventaram o termo "Geometria Dinâmica" para descrever as imagens geométricas interativas do software que desenvolveram (Goldenberg & Cuoco, 2012). Os SGD são importantes para o ensino e a aprendizagem de matemática, devido à capacidade que possuem de permitir ao usuário arrastar objetos dinamicamente, bem como de comparar e descobrir relações entre os entes geométricos envolvidos.

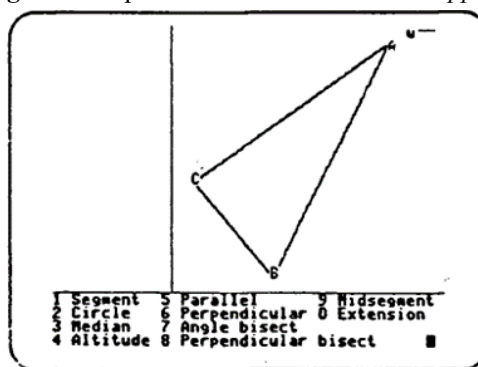
A ação de arrastar (característica central dos ambientes de GD) muda o aspecto figural de uma construção geométrica, mas não o aspecto conceitual, uma vez que todas as propriedades do objeto geométrico são mantidas. Esta dualidade figural/conceitual não é possível em um ambiente estático de lápis e papel, uma vez que os aspectos figurais são tratados em um registro visual e um conceito é tratado em um registro discursivo. (Basso & Notare, 2015, p.6)

Acredita-se importante destacar a definição dada por Gravina (1996) para os SGD, pois é uma das primeiras em Língua Portuguesa.

São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento. (Gravina, 1996, p.6)

As origens dos SGD são geralmente atribuídas a um programa chamado *The Geometric Supposer* (Figura 3), que foi desenvolvido nos anos 1985, “para um dos primeiros computadores pessoais, o Apple II, por uma equipe do MIT liderada por Judah L. Schwarz” (Oldknow, 1997, p.1).

Figura 3 – Aparência do *The Geometric Supposer*



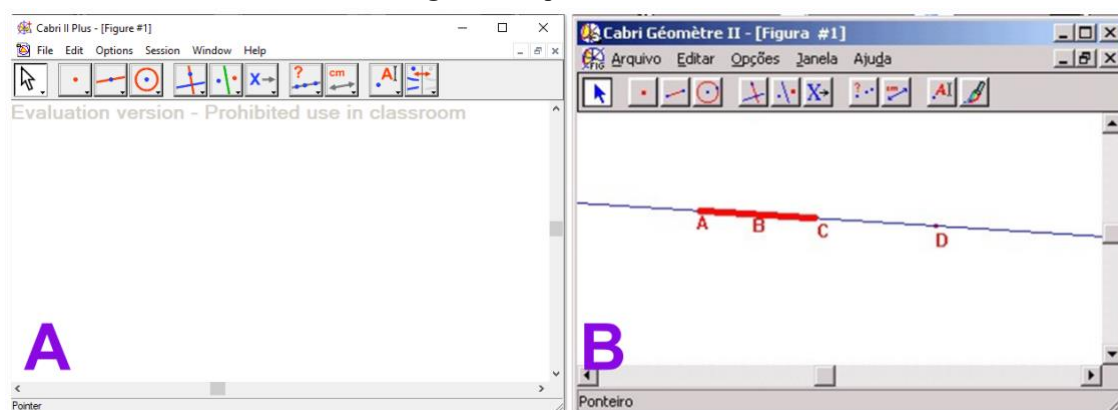
Fonte: Worster (1989, p.46)

O *The Geometric Supposer* foi pensando para ser utilizado como um recurso didático no processo de resolução de problemas (Worster, 1989). Acredita-se importante destacar esse SGD, pois existe uma semelhança visual desse software com os que o precederam.

Com o advento do primeiro Apple Mac, outros softwares educacionais para geometria foram desenvolvidos. Um deles é o Cabri, o qual foi muito popular no nosso país nos finais dos anos 1990 e o início dos anos 2000. Conforme Bellemain (1988), sua concepção iniciou em 1984 e fez parte de um projeto maior, cujo acrônimo nomeou, parcialmente, o software. A sigla *CABRI* vem da expressão em francês *CAhier de BRouillon Informatisé* (Caderno de Rascunho Informático) e o projeto consistia na construção de ferramentas tecnológicas que permitiriam ter funcionalidades de um caderno interativo.

Cabe salientar que o Cabri é um software comercial, cuja difusão, no Brasil, foi promovida pelo “Programa de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática” (PROEM) da PUC (Pontifícia Universidade Católica) de São Paulo. Atualmente, é possível baixar o instalador do software de forma gratuita no site do Cabri⁶. Para recuperar os arquivos guardados, foi necessário realizar a instalação do software no computador pessoal. A versão instalada é da forma *trial*, e possui validade de um mês. A Figura 04 -A ilustra a aparência atual do Cabri, e a Figura 04 - B ilustra sua aparência no início dos anos 2000, época em que foi utilizado em sala de aula, no ensino superior.

Figura 4 – Aparência do Cabri



Fonte: Arquivos da autora (2021)

Comparando as figuras, observa-se que, na versão atual, os comandos não estão em português. Isso ocorre porque, no momento da instalação, essa opção não é mais sugerida. Ou seja, em algum momento houve uma descontinuidade na tradução do Cabri para o português.

⁶ <https://cabri.com/en/>

Esse software foi utilizado em sala de aula no ensino superior, mais especificamente, em disciplinas de “Desenho Geométrico” e “Geometria Euclidiana”, desde 1999 até o ano de 2009. Esse uso era realizado no laboratório de informática (Figura 05) de uma instituição privada de ensino superior no interior do Rio Grande do Sul. Uma das fontes de consulta de materiais para o planejamento das atividades a serem realizadas pelos alunos era o livro disponibilizado em português⁷ denominado Cabri Geometry II - Guia de utilização para Windows.

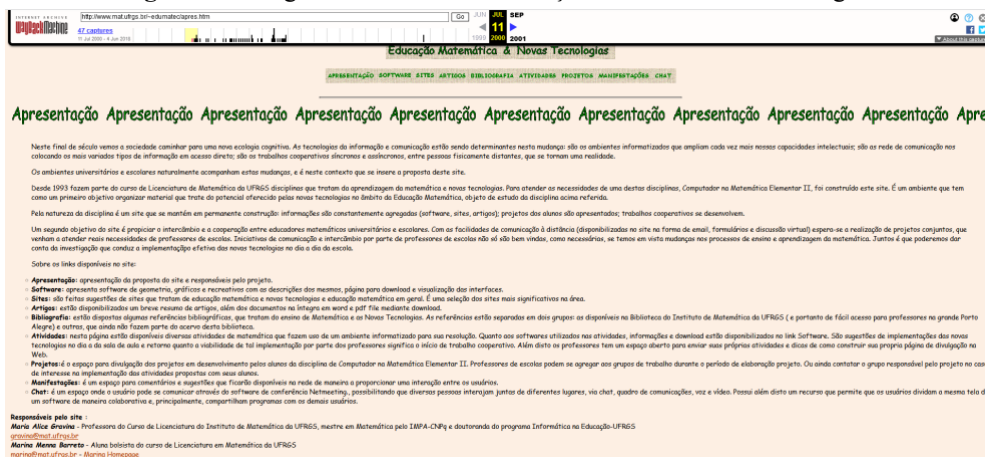
Figura 05 – Laboratório de Informática



Fonte: Arquivos da autora (2021)

Outra fonte de materiais muito utilizada era um site (Figura 06) desenvolvido pela professora Maria Alice Gravina, para a disciplina denominada Computador na Matemática Elementar II, do curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

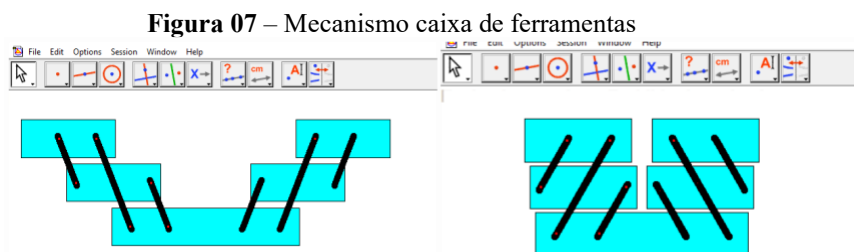
Figura 06 – Página inicial do site Educação Matemática e Tecnologias



Fonte: Recuperado via o site WaybackMachine (2021)

⁷ <https://drive.google.com/file/d/1CJmeMamtXG1od5CBwrzMf-tH84jTQctd/view?usp=sharing>

No site denominado Educação Matemática & Novas Tecnologias, eram disponibilizadas sugestões de atividades. Em especial, um tipo de atividade, inspirada nas apresentadas na referida página, foi muito utilizado, em sala de aula. A atividade denominada Modelagem Geométrica: Construindo Mecanismos no Cabri consistia em construir, via software, o modelo de um objeto concreto. Essa atividade é, ainda, considerada particularmente interessante, pois, para resolvê-la, é necessário pensar nas relações geométricas que fazem parte do objeto a ser criado, assim como organizar estratégias de construção, de modo que o mecanismo mantenha sua forma e suas propriedades quando movimentado. A Figura 07 ilustra o mecanismo que simula uma caixa de ferramentas.



Fonte: Arquivos da autora (2021)

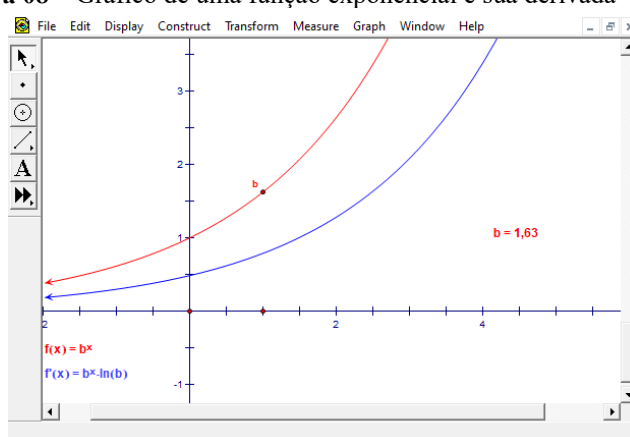
Observa-se que esse mecanismo possui movimento, o que torna a construção muito desafiadora para o aluno, pois, para realizar a construção, o aluno precisa conhecer as propriedades geométricas que compõem o movimento, ou seja, que proporcionam ao mecanismo ter algumas características de movimento. No caso da caixa de ferramentas, além de construir o objeto, é preciso que ele a abra e a feche sem alterar a geometria dos elementos que a constituem.

No site, era possível obter informações sobre outros softwares disponíveis para o ensino e a aprendizagem de Geometria e de outros conteúdos. Observa-se que esse espírito de compartilhamento não era comum naquela época e que foi muito importante para o desenvolvimento e a difusão do ensino de matemática mediado por tecnologias em vários cantos do país. Assim, por meio do site Educação Matemática & Novas Tecnologias, foi possível conhecer outros SGD, em especial, o Geometer's Sketchpad. As origens desse software remetem à década de 1980 e ao “Visual Geometry Project”, um projeto de pesquisa financiado pela National Science Foundation (agência de fomento americana) que teve como objetivo desenvolver novos materiais de base tecnológica para o ensino de geometria (McGraw-Hill Education, 2014). O *Geometer's Sketchpad* é um software comercial e, atualmente, é possível

realizar o download desse SGD no site da Key Curriculum⁸, empresa que o comercializa. Porém, após a instalação da versão 5.04, é possibilitado o seu uso por 20 minutos sem custos, sendo vedado salvar as construções, exportá-las ou copiar a tela (*print screen*).

O *Geometer's Sketchpad* foi o segundo SGD utilizado, em sala de aula, e o trabalho com ele limitou-se ao ensino superior. As experiências remontam os anos de 2001 a 2009, nas disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Euclidiana, que eram parte do currículo do curso de licenciatura em Matemática. Além dessas disciplinas, o software foi amplamente utilizado em uma disciplina complementar específica para trabalhar com tecnologias educacionais. Diferente do Cabri, o *Geometer's Sketchpad* possuía algumas funcionalidades mais dinâmicas, como, por exemplo, a presença de um controle deslizante (*slider*) e a possibilidade de fazer gráficos (Figura 08), o que ampliava o leque de conteúdos a serem trabalhados.

Figura 08 – Gráfico de uma função exponencial e sua derivada

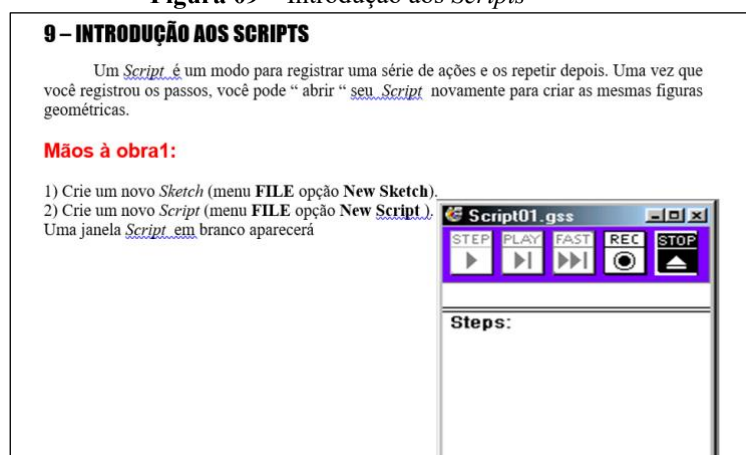


Fonte: Arquivos da autora (2021)

Além das funcionalidades descritas, o software possuía um diferencial muito didático, o que auxiliava na preparação das aulas. No site, era possível realizar o download de vários arquivos que continham construções realizadas no software e, por meio de uma ferramenta denominada *Script*, verificar o protocolo de construção usado, ou seja, revisitar o passo a passo da construção. Essa ferramenta foi muito útil à professora no planejamento das aulas e era ensinada aos alunos, como ilustra a Figura 09.

⁸ <https://sketchpad.keycurriculum.com/>

Figura 09 – Introdução aos *Scripts*



Fonte: Arquivos da autora (2021)

A Figura 09 apresenta parte de um pequeno tutorial⁹ disponibilizado aos alunos na disciplina optativa. Esse material foi produzido, com base no Guia de Aprendizagem do software (*Learning Guide*¹⁰).

Algum tempo depois do *Geometer's Sketchpad* ter sido lançado, foi apresentado, aos usuários, um software complementar, denominado *JavaSketchpad*. Este último foi o precursor dos softwares facilitadores a desenvolver e distribuir *mathlets* (applets¹¹ de matemática) na Internet. Embora o *JavaSketchpad* exigisse um navegador habilitado para visualizar as construções, não era necessário que o usuário programasse em linguagem Java para criá-las. Em vez disso, bastava construir uma figura no *Geometer's Sketchpad*, salvá-la no formato *HTML* e incorporá-la a uma página *web*. Essa facilidade permitiu um compartilhamento crescente de informações e de possibilidades, pois, ao invés de ter uma figura estática em um site, era possível interagir com ela. Porém, em 2016, a tecnologia Java para páginas *web* foi descontinuada¹², o que ocasionou uma perda significativa de informações, visto que nem todos os sites dedicados à Geometria Dinâmica foram atualizados para tecnologias mais modernas.

Outro SGD que permitia criar *applets* de forma fácil era o *Cinderella*, o qual, atualmente, pode ser baixado no site do software¹³. Conforme Santos e Martinez (2000), o *Cinderella* foi desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert e por Ulrich Kortenkamp, sendo lançado comercialmente na forma de um livro acompanhado por um *Compact Disc* (CD), em 1999. Um diferencial desse SGD, em relação aos demais citados anteriormente, é que ele permite

⁹ https://drive.google.com/file/d/1Awyi5rn5Nx-f0Ffu3fp7MK6YFdCAJ6_z/view?usp=sharing

¹⁰ https://drive.google.com/file/d/1InpvHLtsZPbZN6u_C5NSv79Ye-HQj_t2/view?usp=sharing

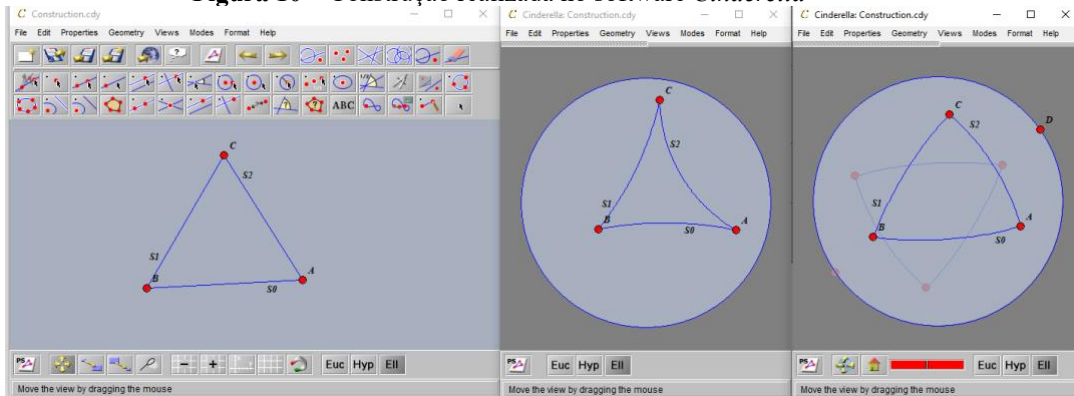
¹¹ *Applets* são pequenos programas que são executados embutidos dentro de páginas *web* (SANTOS, 1999)

¹² <https://tecnoblog.net/190896/oracle-fim-plugin-java/>

¹³ <https://www.cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella.2>

trabalhar, também, com Geometrias não Euclidianas (Hiperbólica e Esférica). A Figura 10 ilustra as visões, nas três geometrias, de um triângulo construído no software *Cinderella*.

Figura 10 – Construção realizada no software *Cinderella*



Fonte: Arquivos da autora (2021)

O SGD *Cinderella* foi amplamente utilizado, em sala de aula do ensino superior, nas disciplinas “Geometria I” e “Geometria II” do curso de licenciatura em Matemática, no período de 2001 a 2009. No caso específico de Geometria II, a disciplina continha uma unidade dedicada ao ensino e à aprendizagem de tópicos de Geometrias não Euclidianas, como ilustra a Figura 11.

Figura 11 – Recorte do plano de ensino¹⁴ da disciplina Geometria II

<p>4) Conteúdo programático</p> <p>Geometria Espacial: paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos no espaço, diedros triedros e poliedros. Construção de sólidos geométricos.</p> <p>Áreas e volumes dos sólidos geométricos.</p> <p>Geometrias não Euclidianas: histórico; geometria hiperbólica e seus modelos; geometria elíptica; pontos e triângulos impróprios; quadrilátero de Saccheri e de Lambert; teoremas sobre áreas e congruência de triângulos; comparação de Geometria Euclidiana com as Geometrias não Euclidianas.</p>
<p>5) Caracterização geral da metodologia de ensino</p> <p>A metodologia da disciplina será desenvolvida através de exposição oral e escrita no quadro de giz, análise e estudo da bibliografia básica, realização de exercícios em aula e no laboratório de informática para o caso das Geometrias não Euclidianas. O Software que será utilizado é o <i>Cinderella</i>.</p>

Fonte: Arquivos da autora (2021)

Observa-se que os três SGD apresentados neste artigo eram comerciais, ou seja, era necessário adquirir uma licença para poder utilizá-los em sala de aula. O primeiro software com licença aberta (gratuita) que foi utilizado, em sala de aula, denomina-se Régua e Compasso (*Compass and Ruler - C.a.R.*). Conforme Bantchev (2010), esse software foi criado pelo professor René Grothmann, da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha. Seu nome original é Z.u.L., do alemão, *Zirkel und Lineal*.

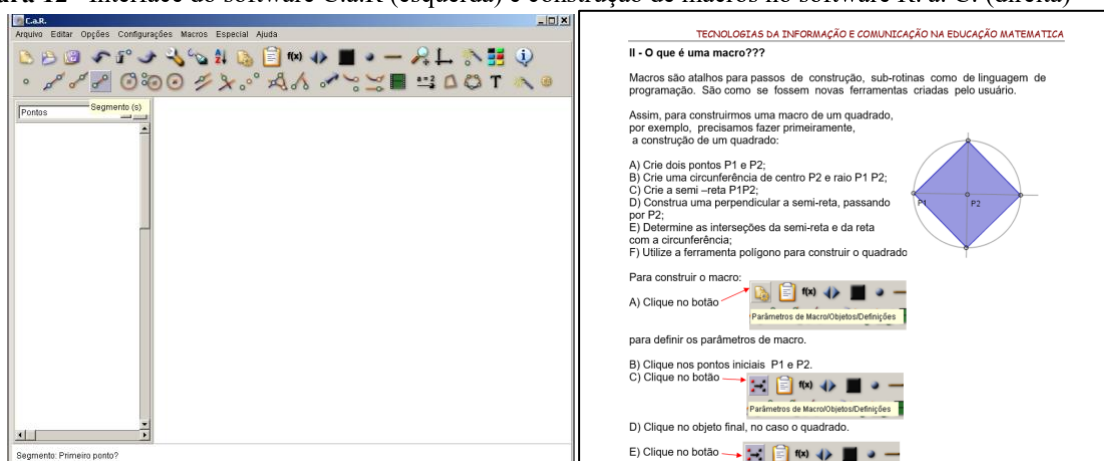
¹⁴ <https://drive.google.com/file/d/1SmwGiJcaguniS8PTbZVfz884vSvEXYKD/view?usp=sharing>

No Brasil, foi amplamente difundido pelo professor Humberto Bortolossi¹⁵, que disponibilizou tutoriais para a utilização do software. Atualmente, ainda é possível realizar o download do instalador do C.a.R. no site do referido professor, porém, ao tentar executá-lo no computador, não é possível utilizá-lo, visto a descontinuidade do Java, linguagem em que o software foi escrito. As experiências com esse software datam dos anos 2006 a 2013, nas disciplinas de “Geometria” e de “Desenho Geométrico” na instituição privada.

Esse SGD também foi utilizado em uma disciplina optativa denominada “Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática” (TIC-EM), do curso de Licenciatura em Matemática, e em uma disciplina de mesmo nome, em um curso de Especialização, ambos em uma universidade pública no interior do Rio Grande do Sul. A interface desse software (Figura 12 - esquerda) diferencia-se dos demais por apresentar um espaço que descreve algebricamente os objetos construídos com as ferramentas disponíveis.

Esse software dispunha de todas as ferramentas que os SGD comerciais possuíam, até mesmo as mais sofisticadas, como as macros, que são como novas ferramentas criadas pelo usuário. Essa funcionalidade foi muito utilizada em sala de aula, como ilustra a Figura 12 (direita), que é um recorte de um material¹⁶ disponibilizado aos alunos na disciplina “TIC-EM”, em meados de 2010.

Figura 12 –Interface do software C.a.R (esquerda) e construção de macros no software R. a. C. (direita)



Fonte: Arquivos da autora (2021)

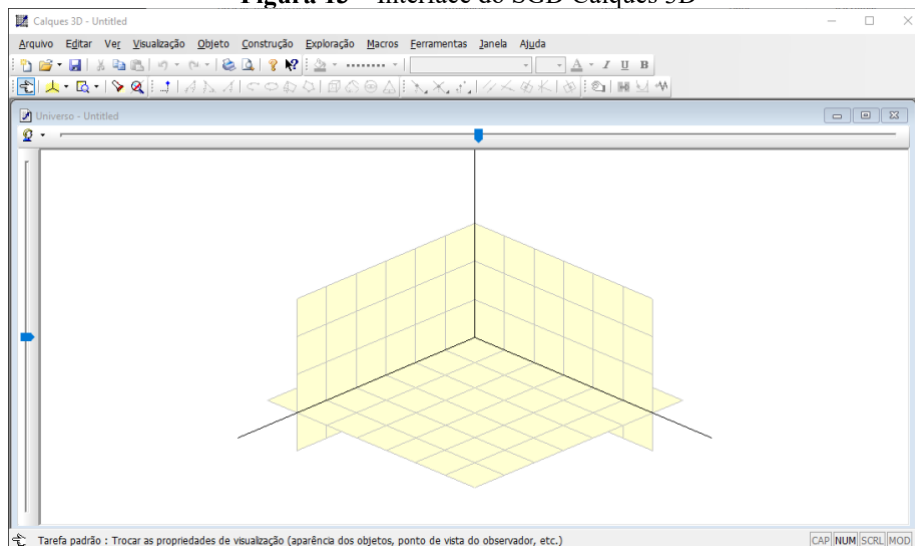
Os SGD citados até o momento eram utilizados no ensino e na aprendizagem de tópicos de Geometria Plana. Em alguns casos, trabalhavam-se conceitos de Geometria Espacial, mas de forma muito artesanal e meramente ilustrativa.

¹⁵ <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjtbortol/car/index.html>

¹⁶ <https://drive.google.com/file/d/1C6VbUfujLMxh3UoUGRojeSJK9xQmKpXJ/view?usp=sharing>

Porém, existem softwares específicos para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial, como o Calques 3D (Figura 13), por exemplo.

Figura 13 – Interface do SGD Calques 3D



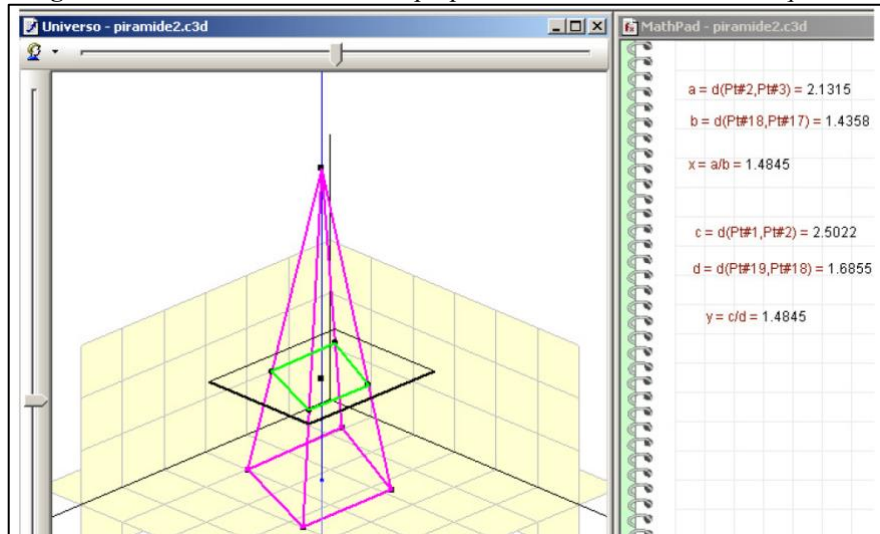
Fonte: Arquivos da autora (2021)

O *Calques 3D*¹⁷ é um software gratuito desenvolvido por Nicolas Van Labeke, como parte de sua tese de doutorado, em uma universidade francesa, em 1999. Ele é um micromundo planejado para a construção, observação e exploração de figuras geométricas espaciais (Van Labeke, 1999). Como os demais SGD, o *Calques3D* oferece um conjunto de ferramentas para a construção de objetos, nesse caso, tridimensionais. Nele, é possível construir, por exemplo, a interseção entre vários objetos e fazer construções que envolvam perpendicularidade e paralelismo, por meio de uma interface simples. Uma vez construída a figura, é possível mudar o ângulo de visão e configurar o sistema de referência: eixos, solo e paredes. Esses recursos ajudam o aluno a ter uma percepção tridimensional mais apurada do objeto. Os passos da construção podem ser acompanhados de dois modos: por meio de uma janela que possui o histórico da construção ou de uma janela que descreve uma árvore de dependência dos objetos.

Observa-se que a experiência em utilizar o *Calques 3D* ocorreu nos anos de 2006 a 2010, bem como que ele foi o primeiro SGD que a autora deste artigo utilizou com turmas que não eram da licenciatura em Matemática, pois ele possui um recurso chamado janela *MathPad*, que exibe as coordenadas e as equações cartesianas de pontos, retas, planos e esferas. O software foi utilizado na disciplina de “Geometria Analítica”, com alunos do curso de Ciência da Computação. Por meio da janela *MathPap*, foi possível trabalhar com atividades que exploravam as características analíticas de construções tridimensionais (Figura 14).

¹⁷ Atualmente, disponível para download no site <http://www.calques3d.org>.

Figura 14 – Parte de uma atividade proposta utilizando o software *Calques 3D*



Fonte: Arquivos da autora (2021)

Assim como o *Calques 3D* foi produto de uma tese de doutorado, outro software também surgiu de uma pesquisa foi o GeoGebra. Conforme Preiner (2008), o desenvolvimento do GeoGebra começou em 2001, como projeto de mestrado de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg, Áustria. O objetivo era criar um software educacional que combinasse a facilidade de utilização de um SGD e os recursos disponíveis em um sistema de álgebra computacional. Após publicar um protótipo do software na Internet em 2002, professores na Áustria e na Alemanha começaram a usar o GeoGebra para ensinar matemática, algo bastante inesperado pelo desenvolvedor, que recebeu muitos e-mails entusiasmados e o feedback positivo desses professores (Hohenwarter & Lavicza, 2007).

Ao contrário dos outros SGD, sobre os quais recorda-se o momento exato em que teve o primeiro contato, não existe uma lembrança clara da primeira vez que o GeoGebra foi utilizado. Acredita-se que essa falta de memória ocorra pelo fato de que, com a internet via cabo (não mais discada), as informações tornaram-se, além de mais acessíveis, mais rápidas.

Conforme Hohenwarter e Preiner (2007), por um lado, o GeoGebra é um SGD que suporta construções com pontos, retas e seções cônicas. Por outro lado, fornece características típicas de um Sistema de Álgebra Computacional (*Computer Algebra System- CAS*), como plotagem do gráfico de funções, localização de raízes, cálculo e representação gráfica de derivadas e integrais. É devido a essas características que chamamos o GeoGebra de Software de Matemática Dinâmica (SMD) destinado ao ensino de geometria, álgebra e cálculo.

Ao ser desenvolvido, a ideia básica do GeoGebra era fornecer duas representações de cada objeto matemático nas zonas (janelas) de álgebra e gráfica. Na versão 3.2, a primeira que se teve contato, existia também uma folha de cálculo (Figura 15).

Figura 15 – GeoGebra – Versão 3.2



Fonte: Arquivos da autora (2021)

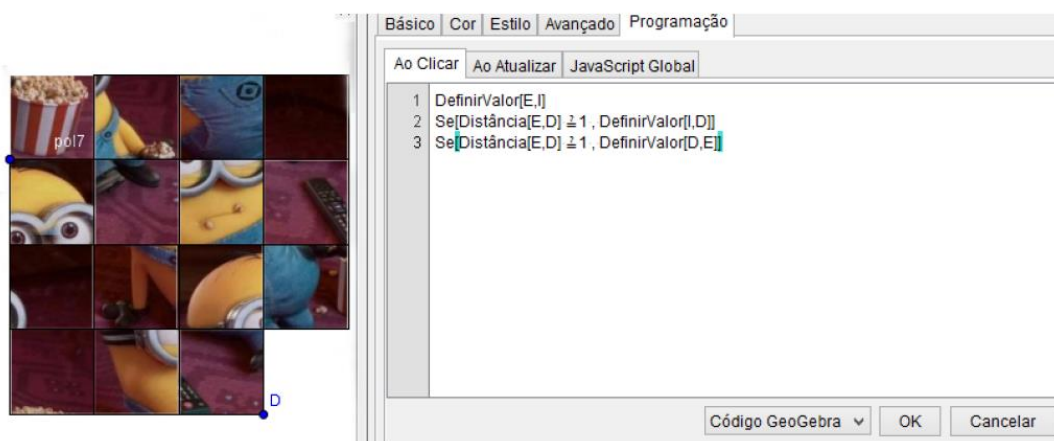
O interessante nesse SMD é que, ao alterar um objeto em uma dessas janelas, a representação na outra é atualizada imediatamente. Isso já ocorria nos SGD C.a.R. e *Calques 3D*, mas o GeoGebra sempre foi mais robusto, ou seja, funcionava, mesmo em condições adversas, sem travar ou apresentar problemas. Observa-se que, desde 2006, o GeoGebra é apoiado pelo Ministério da Educação austríaco, para manter a disponibilidade gratuita para o ensino de matemática em escolas e universidades (Hohenwarter & Preiner, 2007). Conforme Mathias e Leivas (2020), o GeoGebra possui o domínio geogebra.org desde o ano de 2006, onde é possível baixar o software. Os arquivos da autora mostram que começou a trabalhar com esse software em 2009 e, nessa época, uma fonte de consulta muito importante era o Fórum de usuários do GeoGebra, onde era possível discutir dúvidas e ideias com outros usuários

Segundo Tomaschko et al. (2018), atualmente, o aprimoramento das funcionalidades do software é realizado por uma equipe internacional de pesquisadores e desenvolvedores de aplicativos, os quais trabalham colaborativamente, a fim de melhorar a usabilidade desse software. Há alguns anos, esse SMD também está disponível como aplicativo para as principais plataformas de dispositivos móveis, sendo este um diferencial em relação aos demais SGD. Além disso, o fórum de usuários ainda é ativo, mas o GeoGebra possui um repositório de materiais em que os usuários podem compartilhar suas produções ou navegar pelos recursos educacionais abertos compartilhados. O referido repositório de materiais auxilia na elaboração das aulas, pois permite aprender com as experiências de professores de diferentes nacionalidades.

Além de trabalhar com construções geométricas básicas, como ocorria com os outros SGD, evidencia-se a oportunidade que o GeoGebra trouxe de trabalhar alguns elementos de programação em sala de aula. Nesse sentido, uma experiência que merece destaque é a produção de jogos por alunos que cursam a disciplina denominada “Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I”, a qual, desde 2013, é obrigatória no curso de Matemática Licenciatura da instituição em que a autora do artigo atua.

A Figura 16 ilustra o Jogo do 15, “no qual um jogador deve mover as peças, na horizontal ou na vertical, quando possível, para uma casa vazia de modo a posicionar os números em ordem crescente” (Dantas, 2021). Esse jogo foi construído por uma aluna do primeiro semestre curso de Matemática Licenciatura, no ano de 2015.

Figura 16 –Produção de uma aluna do Jogo do 15



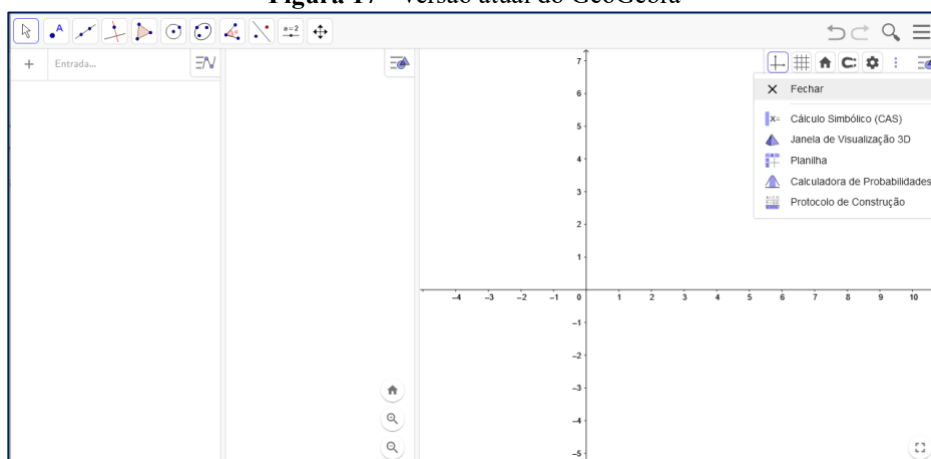
Fonte: Arquivos da autora (2021)

A ideia de trabalhar com jogos foi inspirada em vídeos do professor Sérgio Dantas, que é o responsável pelo site O GeoGebra¹⁸, no qual são disponibilizados cursos regulares sobre esse software.

Atualmente, o GeoGebra para computadores conta com outras janelas (zonas) além das originalmente pensadas (Janela de visualização 2, CAS, 3D, Protocolo de Construção e calculadora de probabilidades). A versão mais atual é a 6.0.665-0-w (Figura 17), atualizada em 14 de setembro de 2021. Observa-se que, a partir da versão 6, o GeoGebra passa a funcionar diretamente no navegador, não sendo necessário nenhum tipo de instalação.

¹⁸ <https://ogeogebra.com.br/>

Figura 17– Versão atual do GeoGebra



Fonte: Arquivos da autora (2021)

Para uso com os alunos, o GeoGebra lançou dois sistemas de gerenciamento de aprendizagem, denominados “GeoGebra Classes” e “GeoGebra Grupos”. O uso desses sistemas permite o compartilhamento de materiais de autoria privada e/ou disponíveis publicamente no repositório do GeoGebra. Atualmente, o sistema oferece suporte a elementos básicos como texto, vídeos, perguntas, tarefas interativas do GeoGebra, todos utilizáveis em diferentes plataformas, incluindo dispositivos móveis. Tais sistemas foram de extrema utilidade nos anos de 2020 e 2021, visto o período pandêmico enfrentado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente artigo foi descrever as memórias de uma professora ao ensinar Geometria em cursos de formação de professores de matemática, fixando o olhar na mediação proposta pelas tecnologias digitais disponíveis em diferentes épocas. Iniciou-se o trabalho com um breve histórico pessoal e, na sequência, foram apresentados, em ordem cronológica, alguns softwares com os quais trabalhou-se em sala de aula. Observa-se que foi fornecido um pequeno histórico sobre cada um dos SGD, cujas mudanças e ampliação tem ocorrido de forma paralela com a atuação dos professores que iniciaram suas carreiras no final do século XX e trabalham com tecnologias em sala de aula.

As referidas mudanças dos conhecimentos tecnológicos faz com que os professores que optam por usar determinadas tecnologias digitais estejam em constante aprimoramento, o que não significa dizer que os demais docentes não devam estudar e planejar aulas a partir de diferentes propostas metodológicas. Por exemplo, os conteúdos que faziam parte da ementa de

um curso de Álgebra Linear no início dos anos 1990 ainda são, em geral, os mesmos que o professor trabalha no ano de 2021. Porém, quando o professor se dispõe a utilizar tecnologias em sala de aula, é preciso conhecer o software que será utilizado (pelo menos ter noções básicas do seu funcionamento), o que requer um pouco de disponibilidade e uma predisposição ao uso. E, ao lecionar disciplinas específicas de Tecnologias Educacionais, a atualização do profissional deve ser constante, visto que o desenvolvimento dessa área é contínuo.

Salienta-se que, no artigo, foram apresentados pequenos fragmentos da vivência de uma professora. Muitas foram as atividades não relatadas, assim como não foram descritas experiências com softwares destinados a outras disciplinas, como Cálculo, por exemplo. Nesse rol de softwares, destacam-se o Mathematica, o Maple, o Derive, o Mupad, o GraphEq e o próprio GeoGebra. Outros SGD que também foram trabalhados em sala de aula, mas cujos arquivos foram perdidos, como o WinGeom, o Poly e o Tabulae, não foram mencionados no presente trabalho.

Optou-se por apresentar apenas softwares usados em laboratórios de informática, um lugar que se acredita estar em vias de extinção, visto a larga utilização de dispositivos móveis e a facilidade que a geração atual possui em manipular os aplicativos disponíveis para esse tipo de tecnologia. Nesse sentido, tem-se trabalhado com os aplicativos GeoGebra para dispositivos móveis (como o *Graphing Calculator*, o *Geometry*, o *CAS Calculator*, o *3D Calculator* e o *GeoGebra AR*), tanto nos cursos de graduação como de pós-graduação.

Ao escrever esse texto, foi necessário revisitar antigos arquivos, olhar para a produção dos alunos, lembrar dos gestos utilizados e das experiências vividas nesse tempo dedicado a ensinar e a aprender. Um momento que foi significativo, pois, no turbilhão das tarefas cotidianas, em geral, não se dedica um espaço para refletir sobre as práticas, principalmente sobre o quanto se aprende quando se ensina. Como disse de Antoine de Saint-Exupéry “aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós”. Ou seja, este artigo foi muito mais sobre o que se aprendeu do que sobre o que foi ensinado em uma caminhada que teve início no final dos anos 1990.

REFERÊNCIAS

- Abelson, H., & DiSessa, A. A. (1986). *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics*. MIT press.
- Aguiar, C. E. (2009). Óptica e geometria dinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31, 3302-1. <https://doi.org/10.1590/S1806-11172009005000005>

- Aguiar, M. B., & Basso, M. V. de A. (2018). Investigação sobre as visões de um grupo de professoras acerca do uso das tecnologias em sala de aula para ensino de matemática: um olhar para a formação das pedagogas e as formas de utilização da tecnologia em seu fazer docente. *RENOTE*, 16(2), 160-169. <https://doi.org/10.22456/1679-1916.89306>
- Bantchev, B. B. (2010). A brief tour to dynamic geometry software. *CaMSP February 2015 Newsletter*, 1-6. Recuperado de <http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/Articles/BB-dgs.pdf>
- Basso, M., & Notare, M. R. (2015). Pensar-com tecnologias digitais de matemática dinâmica. *RENOTE*, 13(2). <https://doi.org/10.22456/1679-1916.61432>
- Bellemain, F. (1988). Le logiciel Cabri-Géomètre, un nouvel environnement pour l'enseignement de la géométrie. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (5), 1-25. Recuperado de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1988-1989__5_A7_0.pdf
- Bittar, M. (2011). A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. *Educar em revista*, 157-171. Recuperado de <https://www.scielo.br/j/er/a/XtVYn634Y95PPjHRBLQG4kp/?lang=pt>
- Bongiovanni, V., Campos, T. M., & Almouloud, S. A. (1997). *Descobrimos o Cabri-Géomètre: caderno de atividades*. São Paulo: FTD.
- Borba, M. de C., & Penteadó, M. G. (2016). *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Brasil. (2002). Parecer CNE/CP 9/2001. Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. *Diário Oficial da União*, 31. Recuperado de <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf>
- Dantas S. C. (2021). O que é o GeoGebra. Recuperado de <https://www.ogeegebra.com.br/arquivos/oqueeogeegebra.pdf>
- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (2012). What is dynamic geometry?. In *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 365-382). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203053461>
- Gravina, M. A. (1996). Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, 1, 1-13. Recuperado de http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf
- Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 49-54. Recuperado de <https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-27-3-09.pdf>
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. *MAA*, ID, 1448. Recuperado de https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 515, 556.
- Mathias, C. V., & Leivas, J. C. P. (2020). Potencial de um sistema de matemática dinâmica no estudo de transformações lineares. # Tear: *Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 9(1). <https://doi.org/10.35819/tear.v9.n1.a3821>

- McGraw-Hill Education. (2014). The Sketchpad Story. Recuperado de https://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/The_Sketchpad_Story.html
- Oldknow, A. (1997). Dynamic geometry software-a powerful tool for teaching mathematics, not just geometry. In *Proceedings of International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Recuperado de <http://euler.uni-koblenz.de/ictmt3/cdrom/pdf/oldknow2.pdf>.
- Papert, S. (1994). *A máquina das crianças*. Porto Alegre: Artmed, 17.
- Preiner, J. (2008). Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra (Doctoral dissertation in Mathematics Education, University of Salzburg, Salzburg, Austria). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/315689337_Introducing_Dynamic_Mathematics_Software_to_Mathematics_Teachers_the_Case_of_GeoGebra
- Santos, E. T. (1999, September). Um applet para o ensino de geometria descritiva na internet. In *Anais do XXVII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia (COBENGE 99), Natal-RN, Brasil*. Recuperado de https://www.academia.edu/download/4952147/cobenge99_applet.pdf
- Santos, E. T., & Martinez, M. L. (2000). Software para ensino de geometria e desenho técnico. *Ouro Preto: Graphica, 9*.
- Tomaschko, M., Kocadere, S. A., & Hohenwarter, M. (2018). Opportunities for participation, productivity, and personalization through geogebra mathematics apps. In *Handbook of research on mobile devices and smart gadgets in K-12 education* (pp. 45-56). IGI Global.
- Van Labeke, N. (1999). *Prise en compte de l'usager enseignant dans la conception des EIAO. Illustration dans Calques 3D* (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy 1). Recuperado de <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754340/document>
- Worster, J. R. (1989). *An investigation of the effects of the geometric supposer software on geometric proof writing at the grade 10 level* (Doctoral dissertation, University of British Columbia). Recuperado de <https://open.library.ubc.ca/collections/831/831/items/1.0302150>