



A MATEMÁTICA MODERNA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA DE OITO ANOS (décadas de 1960 e 1970)

MODERN MATHEMATICS OF THE TEACHING OF FRACTIONS IN THE EIGHT-YEAR SCHOOL (1960s and 1970s)

Luciane de Fatima Bertini¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0948-4745>

Rosilda dos Santos Morais²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7029-0515>

RESUMO

O presente artigo teve como objetivo problematizar a matemática do ensino de frações produzida para atender a proposta de uma escola de oito anos em meio a discussões de modernização da matemática como parte do amplo processo de modernização da sociedade. Para tal, foram tomados como documentos de análise os cinco primeiros livros da coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau”, que tiveram sua forma acabada publicada no início da década de 1970 já atendendo ao novo modelo de escola, agora obrigatória dos 7 aos 14 anos, com o ensino de 1º grau e dos preceitos da nova matemática, dita moderna. A análise indicou que a proposta de ensino nas obras segue um encadeamento característico de uma matemática do ensino de frações com respeito à graduação do ensino, que privilegia o trabalho intuitivo com frações mais familiares aos alunos, indo para o trabalho exaustivo com frações equivalentes já a partir do 2º ano visando a formalização do número racional e de suas operações. Identificou-se, ainda, um apelo ao uso de pares ordenados para representar partes de um inteiro em relação ao todo com o objetivo de que essa representação possibilitasse o trânsito do racional para a reta real, saber necessário ao trabalho com funções nas séries seguintes.

Palavras-chave: Frações. Matemática do ensino. Movimento da Matemática Moderna. Livros Didáticos

ABSTRACT

This paper aims to discuss the mathematics of teaching fractions produced to contemplate the proposal of an eight-year school amid discussions of modernization of mathematics as part of the broad process of modernization of society. For this purpose, the first five books of the collection “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau” were taken as analysis documents, which had their finished form published in the early 1970s, already meeting the new school model, now mandatory for students. 7 to 14 years old with 1st degree education, and the precepts of the modern mathematics. The analysis indicated that the teaching proposal in the collection follows a characteristic chain of a mathematics of teaching fractions with respect to the graduation of teaching, which privileges the intuitive work with fractions more familiar to the students, going to the exhaustive work with fractions equivalent already to from the 2nd year aiming at formalizing the rational number and its operations. It was also identified an appeal to the use of ordered pairs to represent parts of an integer in relation to the whole with the objective that this representation would allow the transition from the rational to the real line, necessary knowledge to work with functions in the following series.

Keywords: Fractions. Teaching mathematics. Modern Mathematics Movement. Textbook.

¹ Doutora em Educação pela Universidade Federal de São Paulo (UFSCar). Docente na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Paim, 296, apartamento 2202, Bela Vista, São Paulo/SP, Brasil, CEP: 01306-010. E-mail: luciane.bertini@unifesp.br

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Rio Claro, SP. Docente na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Santo Antônio, 722, ap. 2307, Bairro Bela Vista, São Paulo, SP. E-mail: rosilda.morais@unifesp.br

INTRODUÇÃO

Este artigo faz parte de uma pesquisa realizada por estas autoras que analisa como tem se desenvolvido historicamente o ensino de frações nos primeiros anos escolares.

Em estudo anterior afirmamos³ que a escola tem papel fundamental na criação de saberes como produto da cultura escolar ao longo do tempo. Em continuidade a esse estudo, neste artigo serão apresentados resultados desse processo criativo da escola a partir da ampliação da obrigatoriedade do ensino imposto pela lei n. 5692, de 1971, que rearranjou em oito anos os conteúdos escolares antes estruturados para serem trabalhados em quatro, antigo ensino primário⁴. Com a lei 5692/71, fica a cargo do Estado os oito anos de obrigatoriedade escolar, antes limitado a quatro. Nesse contexto criativo, nossas pesquisas têm se dedicado a investigar a *matemática do ensino* que "compreende a dimensão do ensino propriamente dito e a formação de professores para esse ensino" (Morais, Bertini & Valente, 2021, p. 10).

Nossas análises têm nos levado a investigar dinâmicas do processo de elaboração da *matemática do ensino* e, neste caso, a *matemática do ensino* de frações, tema escolhido por conta de sua historicidade, isto é, os diferentes modos em que foi trabalhado em diferentes tempos históricos (Morais, Bertini & Valente, 2021) e, não menos importante, pelo antagonismo existente em favor da continuidade de seu ensino ou extinção do currículo.

Nesse cenário, a presente escrita teve como objetivo discutir a *matemática do ensino* de frações produzida para atender a proposta de uma escola de oito anos em meio a discussões de modernização da matemática como parte do amplo processo de modernização da sociedade. As fontes escolhidas foram livros didáticos produzidos ao longo da década de 1960 e 1970 de autoria de Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez, Anna Franchi e outras, uma vez que as versões produzidas na década de 1970 tiveram como base suas primeiras elaborações ainda na década de 1960. Assim, tem-se as décadas de 1960 e 1970 como recorte temporal da pesquisa que resultou neste artigo considerando ter sido esse o momento em que o interesse pela modernização da matemática movimentou cursos de formação de professores pelo Brasil e a produção de materiais didáticos. Os tópicos seguintes irão tratar com mais detalhes dessas escolhas.

³ Em parceria com Wagner R. Valente publicamos, em 2021, o livro "A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC". São Paulo: Livraria da Física, 2021.

⁴ A promulgação da Lei 5692/71 se dá em 1971, mas tanto lei quanto materiais de apoio didático têm início da década anterior, razão pela qual este estudo situa-se entre as décadas de 1960-1970.

1. MATEMÁTICA DO ENSINO: AS FRAÇÕES EM FOCO

No livro "A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC", Morais, Bertini e Valente (2021) discutem o conceito *matemática do ensino* a partir da análise cultural das instituições com o objetivo de compreender a teia de significados presentes no cotidiano escolar assumindo que a escola tem uma cultura própria, ou seja, a análise da *matemática do ensino* deve levar em conta a *cultura escolar*⁵.

A discussão proposta por esses pesquisadores visa diferenciar *matemática do ensino* de *ensino de matemática*. O primeiro caso será tema de discussão deste artigo, mais especificamente trataremos da *matemática do ensino* de frações, enquanto que o segundo se refere ao "ensino matemático de frações" (Morais, Bertini, Valente, 2021). Um estudo sobre esse último tema poderia contemplar discussões sobre metodologias, aprendizagens de alunos, avaliação, materiais e métodos entre outros. De outra parte, a *matemática do ensino* tem como centro de sua discussão questões epistemológicas.

A *matemática do ensino* envolve, ainda, produções próprias de espaços de formação de professores, que mantêm articulação com produções do espaço escolar. Assim, o processo produtivo da *matemática do ensino* envolve normas e finalidades desses dois "espaços", considerando, então, um "ambiente descontínuo, reunindo no âmbito da *cultura escolar*, também a formação de professores em cada tempo histórico" (Bertini & Valente, no prelo).

Resultados de pesquisas que tiveram como foco de estudo o tema frações em perspectiva histórica⁶ têm apontado alterações ao longo do tempo no que diz respeito a materiais e metodologias indicadas para seu ensino e também em seus significados, que vão assumindo representatividade em cada tempo. A leitura desses resultados nos leva a considerar a possibilidade de exploração do tema frações como elemento da *matemática do ensino*, tendo sua constituição epistemológica em cada tempo histórico definida pela articulação entre produções do ensino e da formação de professores. É nessa perspectiva que o presente artigo se apresenta, colocando em discussão aspectos da *matemática do ensino* de frações em tempos da modernização da matemática no Brasil com a escola de oito anos.

⁵ Para aprofundamento sobre esse tema ver Julia (2001).

⁶ Alguns exemplos: Valente (2021); Novaes, Berticelli & Pinto (2020); Domingues, Gregorio & Costa (2020); Neves (2019).

2. A MODERNIZAÇÃO DA MATEMÁTICA E A ESCOLA DE OITO ANOS

A modernização da Matemática, movimento de dimensão internacional, fez parte do processo de modernização nacional iniciado no período pós-guerra. No Brasil, sua maior representatividade se deu em discussões sobre o ensino de matemática, produção de materiais e formação de professores entre as décadas de 1960 e 1970. De acordo com Búrigo (2006, p. 45), são componentes centrais no discurso veiculado por protagonistas do movimento no Brasil: "a valorização do ensino de matemática como indispensável à formação científica e técnica, num contexto de identificação entre progresso técnico e desenvolvimento social; a conciliação propugnada entre uma matemática mais avançada, correta e ao mesmo tempo mais acessível".

No que diz respeito ao ensino primário, o movimento de modernização do ensino da matemática envolveu uma proposta de caráter experimentalista, na qual

o aluno deveria permanecer em atividade constante durante a construção do conhecimento por meio de situações de aprendizagem com materiais concretos. O professor deveria assumir o papel de orientador das descobertas, primeiramente intuitivas, que seriam sistematizadas e formalizadas gradativamente e tratadas sem grande preocupação com a simbologia. (Duarte et al., 2011, p. 134)

A década de 1960 é apontada pela literatura como de muita efervescência nas esferas política, econômica, social e, como não poderia ter sido diferente, escolar, que amargava quantidades ínfimas de vagas frente ao crescente número da população em idade escolar.

A fim de trabalhar essa lacuna e visando a necessidade de desenvolvimento humano necessário ao país que aspirava por uma sociedade moderna, em 08 de outubro de 1962 foi instaurado o Plano Nacional de Educação (PNE), proposto por Anísio Teixeira, cuja execução deveria se dar até 1970 e abranger todos os níveis de ensino – primário, médio⁷ e superior. As metas do PNE eram quantitativas e qualitativas e concernente ao ensino primário, o que interessa a este texto, eram da seguinte ordem:

Metas quantitativas

1. ENSINO PRIMÁRIO, matrícula até a quarta série de 100 % da população escolar de 7 a 11 anos de idade e matrícula nas quinta e sexta séries de 70% da população escolar de 12 a 14 anos.

Metas qualitativas

4. Além de matricular toda a população em idade escolar primária, deverá o sistema escolar contar, até 1970, com professores primários diplomados, sendo 20% em cursos de regentes, 60% em cursos normais e 20% em cursos de nível pós-colegial.

⁷ "Diferente do ciclo que hoje chamamos com este nome, naquele tempo o 'ensino secundário' era composto por ginásial (de 12 a 15 anos, e colegial, de 15 a 18 anos); e o 'ensino técnico-profissionalizante', que poderia ser industrial, agrícola, comercial ou normal (este último para formar professores)". Fonte: <http://memoriasdaditadura.org.br/antes-do-golpe/> Acesso em: 22 jun. 2021.

5. As duas últimas séries, pelo menos, do curso primário (5ª e 6ª séries) deverão oferecer dia completo de atividades escolares e incluir no seu programa o ensino, em oficinas adequadas, das artes industriais (Teixeira, 1962, pp. 24-31).

Nos termos da Lei 4.024/61 (Brasil, 1961), o PNE destacava, além da expansão de vagas previstas para todos os níveis, a necessidade de que cada estado providenciasse "treinamento e aperfeiçoamento, em regime de aprendizado, de professores primários em cursos intensivos de um, dois e três anos" (Teixeira, 1962). O documento reconhecia que o país não cumpria com suas obrigações constitucionais e legais de escolarizar a população em quantidades compatíveis com seu desenvolvimento e era determinante ao apontar a correlação entre desenvolvimento e escolarização de seu povo.

Nota-se pelas recomendações do PNE a efervescência citada anteriormente, desta vez no âmbito do sistema escolar, a partir de duas instâncias, a expansão de vagas para a escola primária e, ao mesmo tempo, a formação de professores que deveriam atuar nesse ensino. É no bojo dessas mudanças, e apoiadas por essas normativas, que Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi dão início, em 1962, a cursos de formação de professores para a escola primária em diferentes lugares do Brasil.

Os cursos de formação de professores ministrados por essas professoras se constituíram, para elas, em verdadeiros "laboratórios" de produção de livros didáticos para a escola primária durante toda a década de 1960. Simultaneamente a esses cursos, professoras de escolas da rede de ensino público da cidade de São Paulo trabalhavam com esses livros, também em fase experimental, fato que nos possibilitou identificar mudanças na *graduação*⁸ dos conteúdos desde as primeiras versões, publicada no início da década de 1960, às últimas, publicadas no início da década de 1970.

A produção de Liberman, Franchi, Sanchez e outras é composta por oito livros e foi nomeada na década de 1970 de "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau"⁹. Conforme enuncia o título, trata-se de um curso moderno com conteúdos programados em conformidade com a proposta da nova matemática, dita moderna, e com abrangência a toda a escola de oito anos, uma obrigatoriedade imposta pela LDB 5692/71 (Brasil, 1971):

⁸ Para aprofundamento sobre esse tema, análise de *sequência e graduação* do ensino, ver Moraes, Bertini e Valente (2021).

⁹ Inicialmente os livros que compõem essa coleção eram nomeados de "Curso Moderno para a Escola Elementar". O novo título, "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau", se refere aos "mesmos" livros, porém revisados a partir dos cursos de formação de professores ministrados pelas autoras e da fase experimental em escolas públicas da cidade de São Paulo, segundo declarações das próprias autoras nas obras publicadas na década de 1970.

Art. 20. O ensino de 1º grau será obrigatório dos 7 aos 14 anos, cabendo aos Municípios promover, anualmente, o levantamento da população que alcance a idade escolar e proceder à sua chamada para matrícula.

Parágrafo único. Nos Estados, no Distrito Federal, nos Territórios e nos Municípios, deverá a administração do ensino fiscalizar o cumprimento da obrigatoriedade escolar e incentivar a frequência dos alunos.

A expansão das vagas para a escola primária exigiu de governantes e governados empenho de toda ordem. Era preciso formar professores para atuar na escola primária ao mesmo tempo em que uma outra demanda surgia, a modernização da matemática. Essa, por sua vez, requereu a produção de novos materiais didáticos que pudessem, também, atender a essa nova configuração de sociedade, movimentos esses que para Duarte et al. (2011) deram espaço ao "caráter experimental da matemática moderna na escola primária".

A obra "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau", com seus 8 livros, tem sua forma acabada publicada no início da década de 1970 já atendendo ao novo modelo de escola, agora obrigatória dos 7 aos 14 anos com o ensino de 1º grau, e os preceitos da nova matemática, dita moderna. Fruto do trabalho realizado por Liberman, Sanchez e Franchi¹⁰ durante toda a década de 1960, essa obra passa a orientar o ensino da nova matemática no 1º grau. De acordo com Vilella (2009), ela ocupou o 2º lugar de tiragem e vendagem entre as coleções publicadas pela Companhia Editora Nacional no período de 1964 a 1980, corroborando a efervescência antes citada neste texto. De acordo com Rios, Búrigo e Oliveira Filho (2011), a coleção "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau" merece destaque por se tratar de uma produção coletiva do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA)¹¹ e por seu vínculo com os cursos de formação de professores desenvolvidos por esse grupo.

Considerando que os livros didáticos se constituíram como principais instrumentos de divulgação da Matemática Moderna no Brasil (Rios, Búrigo, Oliveira Filho, 2011) e o interesse do presente estudo em explorar a *matemática do ensino* de frações na escola de oito anos, fizemos a opção, por ora, pela análise de cinco, de um total de oito, livros da obra "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º. grau".

¹⁰ Franchi é co-autora dos livros dos 1º e 2º anos. As obras dos 4º e 5º anos levam a assinatura de Liberman e Sanchez, apenas. A partir do 5º ano, outras autoras passam a compor o grupo de autoras, o que será apresentado mais adiante neste texto.

¹¹ O grupo teve origem no convívio de Anna Franchi, Lucília Bechara e Manhúcia Perelberg, às quais se juntaram posteriormente Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb. (Rios, Búrigo & Oliveira Filho, 2011). Mais informações sobre a constituição do grupo e sobre suas produções podem ser obtidas em Vilella (2009).

Os quatro primeiros livros foram objeto de análise no estudo de Morais, Bertini e Valente (2021) sobre a *matemática do ensino* de frações nos primeiros anos escolares. No entanto, a particularidade da coleção estudada, que visou construir uma proposta articulada para o ensino de matemática nas oito séries do ensino do 1º grau, indica que a análise dos livros das séries seguintes pode contribuir com o entendimento da proposta para o ensino de frações. Assim, neste estudo, avançamos para a análise do livro da 5ª série, o qual tem continuidade as propostas para o ensino de frações, buscando relações com o proposto nos livros anteriores. Trata-se de um primeiro movimento na busca dessas relações que poderá ser ampliado, em outros estudos, com a análise dos livros das séries seguintes.

3. AS FRAÇÕES NA ESCOLA DE OITO ANOS

As frações na escola de oito anos foram analisadas neste artigo a partir de cinco dos oito livros que compõem a coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau”, de autoria de Manhúcia P. Liberman, Anna Franchi, Lucília Bechara Sanchez e outras, produzida, conforme antes mencionado, a partir da iniciativa das autoras em cursos de formação de professores para a escola primária iniciado na década de 1960 pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM). Foi esse mesmo Grupo que anunciou a necessidade de modernização da matemática no Brasil, tema já em andamento em diferentes lugares no mundo, no "IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática", em 1962. Doravante a esse anúncio, o GEEM passou a atuar ativamente na formação de professores para esse ensino com a escrita de livros-texto, realização de congressos, simpósios e cursos visando sensibilizar órgãos educacionais a oficializar uma proposta de organização desse movimento de modernização, que ficou conhecido como Matemática Moderna (MM). Vinculada a esse Grupo no início da década de 1960, Liberman, Franchi e Sanchez iniciam o projeto de produção de livros sobre a proposta da Matemática Moderna para a "Escola Elementar", que se tornou "Escola de 1º grau" a partir de 1971 com a lei 5692.

Conforme foi antes mencionado, os livros que compõem a coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau” foram testados em escolas da rede de ensino público durante toda a década de 1960. Uma análise das primeiras versões por Morais, Bertini e Valente (2021) mostrou que a experimentação foi relevante haja vista a necessidade de realocação de conteúdos, antes condensados em quatro anos, agora rearranjados para serem trabalhados em oito anos, ajustes no título de algumas das obras, sobretudo aquelas dos primeiros anos, e melhor adequação das atividades às séries correspondentes. Um exemplo foi o livro do 1º ano

que, de início, tinha os conteúdos organizados em dois volumes, 1º (1967) e 2º volumes (1968), destinados ao primeiro e segundo semestre do 1º ano, respectivamente, sob o título "Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar" (1967/1968) que, conforme afirmaram Liberman, Sanchez e Franchi (1967/1968), objetivava introduzir a Matemática Moderna na Escola Primária. Esse mesmo livro é reorganizado na edição de 1975, sendo apresentado em volume único para o 1º ano da escola primária e com título novo, mais coerente com o currículo da escola de oito anos, desta vez nomeado "Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau".

Identifica-se ainda nesse volume único, em relação às edições de 1967/1968, que houve cortes de conteúdos do 1º ano, melhor apresentação das atividades no livro do aluno e elaboração do Guia do Professor. Por exemplo, no rol de conteúdos do 2º semestre do 1º ano (1968) fala-se em "metade, dobro; terça parte, triplo; quarta parte, quádruplo". Na sessão de atividades no livro do aluno, seguido do enunciado "Vamos caminhar para o 'quádruplo'", são apresentadas duas colunas. As figuras da coluna da esquerda representam a quarta parte daquelas presentes na coluna da direita. O aluno deveria ligar figuras da coluna da esquerda ao seu quádruplo na coluna da direita.

Invertendo a posição da folha (cabeça para baixo), a atividade diz: "Vamos caminhar para um quarto". Na edição de 1975 sobre esse mesmo conteúdo, o enunciado diz: "Pinte a quarta parte de vermelho". Não há menção ao "quádruplo" de um número e observa-se, ainda, mudança na linguagem empregada, ou seja, em vez de se falar em "um quarto", fala-se em "quarta parte". Ao que parece, a readequação da linguagem se justifica por conta da necessidade de aproximação com aquilo que é mais próximo das experiências cotidianas da vida dos alunos, conforme as autoras afirmam: "Novamente será feito um trabalho inicial com material concreto, especialmente neste capítulo, porque não trataremos aqui de formação de conceitos mas, sim, do seu uso em situações concretas" (Liberman, Franchi & Sanchez, 1974, p. 30, Guia do Professor). E elas consideram, ainda, ser difícil para professores e alunos lidarem com situações concretas envolvendo terças partes, entretanto reiteram a importância de ir dos fatos, pela manipulação de objetos, para os conceitos, corroborando o conceito moderno da ciência matemática (Dienes, 1977).

Considerando a ênfase na manipulação de objetos concretos da proposta de modernização da matemática, sobretudo nas séries iniciais, não faria sentido, ao menos do ponto de vista teórico, propor uma atividade que não pudesse ser experimentada, experienciada por meio de tais objetos. Essa reflexão nos leva a considerar que as atividades sobre quádruplo se distanciavam ainda mais do vivido pelos alunos em seu cotidiano, o que pode ter sido decisivo

para o corte dos exercícios sobre esse conceito no volume de 1975 que encerra essa discussão na atividade citada anteriormente, que ligava uma figura da coluna da esquerda ao seu triplo na coluna da direita.

Para este estudo elegemos as publicações da década de 1970 por serem produtos finais da fase experimental e terem passado pelos ajustes necessários para melhor adequação da série ao conteúdo no tempo de oito anos da escola básica. Além disso, esses volumes são compostos por "livro do aluno" e "guia do professor", o que não se observa para todos os volumes da década de 1960. Foram os Guias que possibilitaram a Moraes, Bertini e Valente (2021, p. 19) analisarem a *graduação* do ensino que, em outras palavras, no caso do ensino de frações se traduz no cuidado de se iniciar o trabalho a partir de frações que têm alguma relação com a vida cotidiana dos alunos para aquelas mais gerais. Para esses pesquisadores, a *graduação* se refere a "estruturação de uma dada rubrica escolar, nos seus diferentes temas para o ensino". Ela "está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e aprendizagem de um dado assunto pelos alunos".

A fim de avançarmos nas discussões desse primeiro estudo, neste artigo analisamos o livro do 5º ano da escola de 1º grau considerando o mesmo conteúdo, frações, no sentido de discutir a *matemática do ensino* de frações produzida para atender a proposta de uma escola de oito anos. Os parágrafos seguintes trazem, de modo sucinto, resultados do primeiro estudo.

Figura 1 – Capas dos livros dos quatro primeiros volumes da coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º. Grau”.



Fonte: Repositório de Conteúdo Digital UFSC.

Nas quatro primeiras obras (Figura 1) identificamos que o ensino de frações se dá a partir do estudo das frações ordinárias para as decimais, conceitos que são formalizados a partir

do 3º ano da escola primária. A ênfase no material concreto – uma referência às etapas piagetianas que orienta a pedagogia nesses tempos – como meio de discussão para o trabalho com frações se dá, já, no 1º ano com a exploração de dobraduras em folhas de papel, distribuição de objetos, entre outros, considerando os conceitos de metade, dobro, terça-parte, triplo, quarta parte. Aqui, embora não haja menção do conceito fração, seja para alunos ou professores¹², busca-se trabalhar com as frações a partir de uma referência intuitiva, por meio de atividades exploratórias, com frações próximas do cotidiano imediato dos alunos em vez de explorar seu significado matemático, que irá ocorrer nas séries seguintes. As atividades exploratórias visam partir dos fatos, de frações familiares aos alunos, para os conceitos corroborando Dienes (1977). A passagem das operações concretas para as abstratas ocorre ainda no 1º ano e se dá, em princípio, pela substituição de objetos concretos por suas representações por meio de desenhos em cartazes.

O rol de conteúdos do livro do aluno do 2º ano traz o conteúdo fração, mas não há menção ao mesmo nas atividades apresentadas, isto é, na lista de conteúdos do sumário aparece a terminologia "fração", mas nas atividades propostas não se faz menção a essa terminologia. O que o livro traz para os alunos são atividades envolvendo frações sem se prender à terminologia. Já o Guia do Professor, pela primeira vez, apresenta uma discussão teórica sobre frações e informa o professor que as atividades do livro do aluno visam prepará-los para a introdução do conceito de fração (número racional) (Morais, Bertini & Valente, 2021). São apresentadas atividades envolvendo medidas não padronizadas denotando um primeiro movimento de Liberman, Sanchez e Franchi (1974) na orientação do processo de passagem da contagem para a medida, que será sistematizada com a formalização dos racionais.

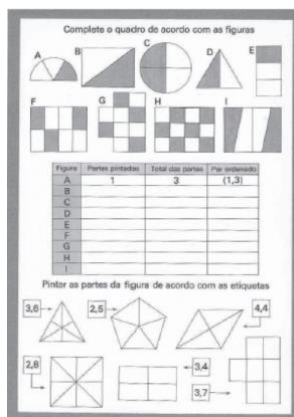
Após o conceito de segmento de reta, o Guia do Professor do 2º ano apresenta o conceito "Fração" como número racional: "no conjunto dos naturais vale a propriedade do fechamento para as operações de adição e multiplicação, isto é, dados dois números naturais, existe sempre a soma ou o produto deles" (Liberman, Sanchez & Franchi, 1974, p. 41). Entretanto destacam que o mesmo não vale para as operações de subtração e divisão nesse conjunto usando esse como argumento para ampliar o conjunto dos números naturais. Toda essa teorização está no Guia do Professor, o que levou Morales, Bertini e Valente (2021) a considerarem esse documento como formador do professor que iria trabalhar a nova matemática nos primeiros anos do ensino de 1º grau.

¹² Para a análise foram considerados livro do aluno e Guia do professor.

A partir desse momento, aparece nas orientações ao professor o *significado* da fração – fração como um número racional, um saber profissional do professor que irá trabalhar com o 2º ano da escola de 1º grau. Morais, Bertini e Valente (2021) consideraram que essa orientação indica preocupação das autoras, Liberman, Sanchez e Franchi (1974), com respeito a *graduação* do ensino, contudo esse saber será de conhecimento dos alunos somente no 3º ano quando lhes será apresentado o conceito "fração".

Aos alunos, no 2º ano, é exaustivo o trabalho que associa figuras a pares ordenados equivalentes. Notamos que esse exercício visa introduzir a ideia de frações equivalentes aos alunos, o que é considerado pelas autoras como essencial para a construção do conceito de número racional: "os pares ordenados associados a figuras planas divididas em partes equivalentes pretendendo que o aluno comece a perceber a existência de figuras assim como pares equivalentes" (Liberman, Sanchez & Franchi, 1975, p. 42) (Figura 2). A ideia das autoras com essa associação é "livrar-se" das representações pictóricas, uma passagem dos fatos para os conceitos, do concreto ao abstrato. Reconhecer frações equivalentes, portanto números racionais equivalentes, será o objetivo do trabalho com esse conceito no 3º ano.

Figura 2 – Pares ordenados associados a figuras planas divididas em partes equivalentes.



Fonte: Liberman, Sanchez e Franchi (1974, p. 102).

Dos pares ordenados à representação, no livro do aluno do 3º ano, do racional na forma $\frac{a}{b}$ ¹³. O título "Fração" é apresentado como conteúdo a ser trabalhado. Os exercícios já demandam dos alunos a representação da fração na forma $\frac{a}{b}$. Essa transição de representação

¹³ No livro do aluno não se discute a formalização do racional, com $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Essa discussão é parte do Guia do Professor do livro do 3º ano.

de par ordenado à fração na forma $\frac{a}{b}$ se dá de forma abrupta, sem uma preocupação de explicitar aos alunos a relação entre essas diferentes representações.

No Guia do professor nota-se a seguinte orientação: no par ordenado (2,3), tem-se, na adição 5, na multiplicação 6, e na fração 2 em 3. Sanchez e Liberman (1974) ressaltam que os exercícios do livro do aluno, nessa etapa, reveem a relação entre o número de partes pintadas e o todo e sua representação na forma de fração. Amplia-se o significado da fração como relação da parte com o todo para uma das representações do número racional; duas frações são equivalentes quando representam o mesmo racional; números racionais maiores que a unidade etc. O conceito de número misto é o que possibilita aos alunos a representação imediata do racional na reta numerada.

Um outro ponto observado no 3º ano foi quanto aos *exercícios e problemas*. Observamos que o ensino de frações tem como foco principal introduzir o conceito de número racional, fato que se dá, efetivamente, no 3º ano da escola de 1º grau corroborando Morais, Bertini e Valente (2021, p. 54): "parte-se, primeiramente, do intuitivo, pela manipulação de objetos, objetivando a etapa das operações concretas, segue-se para as representações pictóricas em direção à definição de número racional" (Morais, Bertini & Valente, 2021, p. 54).

Se para o professor a justificativa estava construída, para o aluno não, ou seja, nenhuma explicação foi dada a ele sobre o porquê de se escrever $\frac{a}{b}$ em vez de (a,b). Morais, Bertini e Valente (2021) afirmam que "A matemática do ensino de frações é, antes de tudo, matemática" e justificam que por "detrás do discurso fração" há uma matemática a ser construída e ela se resume ao conceito de "número racional". "A lógica de orientação do ensino guia-se pela estruturação matemática dos conteúdos" (p. 56).

Apresentados os resultados do trabalho de Morais, Bertini e Valente (2021) com os quatro primeiros livros da coleção partimos, então, para análise do livro da 5ª série. Logo nas primeiras páginas desse livro, na versão para o professor, as autoras explicitam a intenção de apresentar uma obra completa para o ensino de 1º Grau e, nesse sentido, uma preocupação com encadeamento da proposta quando justificam que a equipe foi ampliada

[...] com a presença de Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb para os trabalhos de elaboração de textos, experimentação e controle de resultados, a fim de que a preocupação com a linguagem adequada ao nível dos alunos não sacrifique a precisão de conceitos, para que os alunos não sejam mais tarde forçados a destruir para construir. (Liberman et al., 1977, p. 1)

Essa preocupação está relacionada com uma linguagem matematicamente adequada, que privilegie a "precisão de conceitos" do ponto de vista da Matemática. Assim, a obra

pretende fazer uso de uma *graduação* no ensino “[...] que trate a Matemática como um todo e não como um processo mecânico de resolver problemas” (p. 2).

Com o objetivo de melhor compreender a *graduação* proposta para o ensino de frações, para a análise da obra da 5ª série não foram privilegiados somente os tópicos diretamente relacionados às frações, mas as relações entre os tópicos buscando relações que permitam pensar na “Matemática como um todo”, conforme expressão utilizada pelas autoras da obra. Com o mesmo intento foram consideradas relações com as propostas estabelecidas nos livros da 1ª à 4ª série.

No livro da 5ª série, na versão escrita para os professores, há nas páginas iniciais a apresentação dos objetivos da obra, das estratégias utilizadas e algumas “observações de ordem didática”. Nesse espaço são apresentados os “objetivos instrucionais” divididos no que as autoras classificam como núcleos: conjuntos; relações; multiplicação, divisão e potenciação em \mathbb{N} ; trabalhando em \mathbb{N} ; funções; sistema de numeração; fatores; frações; operações; sistema de medidas; números inteiros.

Nessa listagem de objetivos é possível estabelecer, também, conexão entre o que é proposto para o ensino das “relações” e das “funções” com a abordagem dos pares ordenados utilizada a partir do livro do 3º ano da coleção. Vejamos o que as autoras propõem:

RELAÇÕES

1. **Identificar um par ordenado.**

2. Representar um par ordenado em um gráfico cartesiano.

3. Descobrir leis que relacionam elementos de conjuntos.

4. Relacionar elementos de conjuntos por meio de uma lei dada.

5. **Representar por meio de flechas, pares ordenados**, tabelas ou gráficos os elementos de uma relação.

6. Identificar os gráficos de relação com os gráficos usados em outras áreas, como geografia e estatística.

7. Determinar produto cartesiano de conjuntos.

[...]

FUNÇÕES

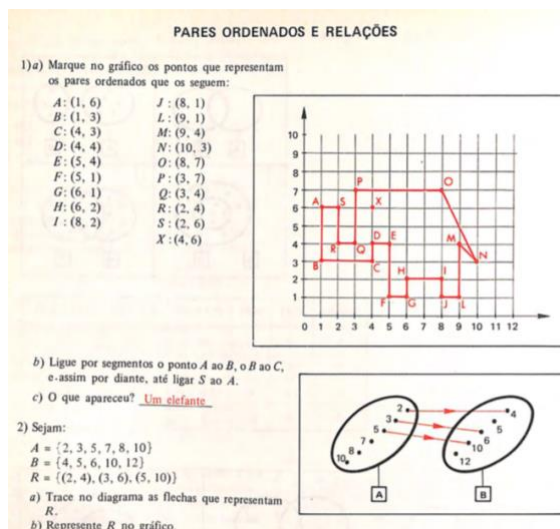
1. **Diferenciar a função como um caso particular de relações.**

2. Identificar bijeções.

(Lieberman et al., 1977, p. 4, grifos nossos)

Na continuidade da obra são apresentadas atividades relacionadas a cada um dos núcleos. Os pares ordenados e as relações representadas por flechas podem ser observados em atividades como as da Figura 3.

Figura 3: Atividades envolvendo pares ordenados e relações.



Fonte: Liberman et al. (1977, p. 16).

A utilização dos pares ordenados e das relações entre esses pares indicados por meio de flechas compõem a estratégia utilizada para o ensino do conceito de função. Parece que as opções utilizadas na obra para o ensino de frações nos quatro primeiros anos, fazendo uso de pares ordenados e de relações indicadas por flechas, não se referem unicamente ao entendimento do conceito de fração, mas a todo o encadeamento estabelecido que envolve, no livro da 5ª série, o conceito de função. O encadeamento proposto parece não se vincular a questões didáticas, mas ao tratamento proposto na obra da “Matemática como um todo”. A presença dos pares ordenados no ensino de frações no 3º ano, por exemplo, tem relação mais vinculada ao ensino de função, no livro da 5ª série, do que com a própria continuidade do ensino de fração no 3º ano afinal, como observado anteriormente, há uma transição abrupta da representação de par ordenado à fração na forma $\frac{a}{b}$.

No trabalho relacionado ao núcleo “frações” as autoras listam os seguintes objetivos instrucionais:

1. Reconhecer frações equivalentes como maneiras diferentes de escrever o mesmo número racional.
 2. Representar números racionais escritos na forma de fração na reta numerada.
 3. Simplificar frações e obter frações equivalentes sob a forma irredutível.
 4. Comparar números racionais na forma de fração.
 5. Determinar a soma e a diferença de números racionais na forma de fração.
- (Liberman et al, 1977, p. 5)

A relação entre frações e números racionais tem destaque na listagem apresentada. Conforme já discutido, Morais, Bertini e Valente (2021) identificam que o ensino de frações nos primeiros livros da coleção tem como objetivo a construção do conceito de número racional.

De forma explícita, no livro da 5ª série, para o professor, a fração é tratada como uma das representações dos números racionais: “números racionais na forma de fração”.

No livro do aluno, o trabalho com as frações envolve: frações equivalentes, incluindo a ideia de frações irredutíveis; comparação de números na forma de fração, incluindo o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c) e a representação de frações na reta numerada; e adição e subtração de frações. A comparação de frações, o cálculo do m.m.c e as operações de adição e subtração são desenvolvidos a partir de frações equivalentes. Se nas séries anteriores o trabalho com as frações equivalentes se dava pela visualização a partir da sobreposição de figuras, nos fatos, aqui percebe-se que elas são mobilizadas em diferentes atividades, como comparação de frações e cálculo do m.m.c, ganhando centralidade na sistematização do procedimento para somar e subtrair frações no livro da 5ª série: "Para adicionar ou subtrair números representados na forma de fração, é necessário escrever as frações com o mesmo denominador" (Lieberman et al., 1977, p. 122). Tal conclusão é apresentada após a realização de alguns exercícios que envolvem o procedimento de adição e subtração de frações, conforme indica a Figura 4.

Figura 4: Exercícios preliminares – adição e subtração de frações.

Handwritten mathematical exercises for adding and subtracting fractions. The page includes instructions in Portuguese, such as "Andei $\frac{3}{4}$ de uma pista e voltei $\frac{2}{5}$. Onde parei?" and "Calcule as somas e diferenças. Observe os exemplos." It shows several examples of fraction addition and subtraction with common denominators, such as $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ and $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$. A note at the bottom states: "Para adicionar ou subtrair números representados na forma de fração, é necessário escrever as frações com o mesmo denominador."

Fonte: Lieberman et al. (1977, p. 122).

As temáticas abordadas no livro da 5ª série já haviam sido exploradas nas séries anteriores. No entanto, a própria organização da obra intenciona que alguns conceitos e/ou procedimentos ganhem uma sistematização escrita.

Nas páginas iniciais do livro do professor são apresentadas as estratégias de organização da obra. Parte-se de "Exercícios preliminares", com situações conhecidas pelos alunos, são também realizadas observações no item "Observe que", chamando a atenção para particularidades que caracterizam as situações abordadas nos *exercícios preliminares*. Conclusões e generalizações são apresentadas sob o título de "De um modo geral" ou "Anote"

visando "dar uma oportunidade de aprimoramento aos alunos melhor dotados" (Lieberman et al., 1977, p. 3), por fim são propostos os "Exercícios de aplicação" para um aprofundamento ou aplicação das conclusões (Figura 5).

No tratamento das frações, os exercícios preliminares e de aplicação envolvem temas já abordados nos livros anteriores, mas agora com algumas sistematizações por escrito a serem apresentadas aos alunos.

Figura 5: Primeiras páginas da proposta para o ensino do “núcleo” frações.

FRAÇÕES

Grupo I – Exercícios preliminares

1) Complete o quadro, observando as figuras abaixo:

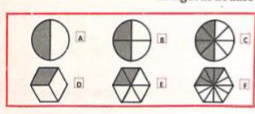


Figura	Fração que representa a parte pintada
A	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{3}{4}$
D	$\frac{1}{8}$
E	$\frac{3}{8}$
F	$\frac{5}{8}$

Observe que:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ são representações diferentes do mesmo número.
Por isto escrevemos: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

Frações equivalentes representam o mesmo número racional.

Obtemos frações equivalentes multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número.

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$ $\frac{5}{15} = \frac{5 : 5}{15 : 5} = \frac{1}{3}$

2) Escreva frações equivalentes, dividindo o numerador e o denominador por um mesmo número, ou seja, *simplifique as frações*.

3) Escreva a fração equivalente, dividindo o numerador e o denominador pelo maior divisor comum (m.d.c.). (Observe o modelo.)

20 = 20 : 2 = 10 Existem primos
32 = 32 : 2 = 16 respectos.
30 = 30 : 5 = 6
45 = 45 : 3 = 9
30 = 30 : 15 = 2
45 = 45 : 15 = 3 m.m.c. (30, 45) = 15
48 = 48 : 48 = 1 m.d.c. (48, 96) = 48
96 = 96 : 48 = 2
150 = 150 : 50 = 3 m.d.c. (150, 200) = 50
200 = 200 : 50 = 4

Anote:

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração pelo maior divisor comum deles, obtemos uma fração cujos termos são primos entre si.
A fração obtida é chamada *fração irredutível*.

Grupo II – Exercícios de aplicação

1) Complete o quadro usando apenas as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$:

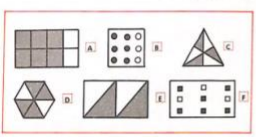


Figura	Fração
A	$\frac{3}{4}$
B	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{2}$
D	$\frac{2}{3}$
E	$\frac{1}{2}$
F	$\frac{2}{3}$

2) Simplifique as frações:

$\frac{24}{60} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
 $\frac{45}{54} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

3) Escreva as frações irredutíveis equivalentes às frações dadas:

$\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$ m.m.c. (36, 45) = 9
 $\frac{105}{415} = \frac{21}{83}$ m.d.c. (105, 415) = 5
 $\frac{42}{18} = \frac{7}{3}$ m.d.c. (18, 42) = 6
 $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ m.d.c. (30, 45) = 15

4) Complete, escrevendo em cada conjunto frações equivalentes à primeira.

$\left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{12}, \frac{3}{18}, \frac{4}{24}, \frac{5}{30}, \frac{6}{36}, \dots \right\}$
 $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \dots \right\}$
 $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{15}{16}, \frac{18}{20}, \frac{24}{24}, \dots \right\}$

5) Represente nos segmentos as frações. (Para facilitar seu trabalho, escreva antes na forma irredutível)

$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ 0 ——— 1
 $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ 0 ——— 1
 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ 0 ——— 1
 $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ 0 ——— 1

Fonte: Lieberman et al. (1977, p. 118-119).

As sistematizações no tema frações, no livro da 5ª série, envolvem as ideias de fração equivalente, de fração irredutível, de mínimo múltiplo comum, bem como procedimentos para comparar, adicionar ou subtrair frações, uma extensão aos conceitos trabalhados nos anos anteriores.

CONSIDERAÇÕES

O presente artigo teve como objetivo discutir a *matemática do ensino* de frações produzida para atender a proposta de uma escola de oito anos em meio às discussões do movimento de modernização da Matemática. Para tal intento foram analisados os cinco primeiros livros da coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º. grau” no sentido compreender o encadeamento das propostas para o ensino de frações, bem como das relações estabelecidas com o ensino de outros temas da matemática.

A opção da apresentação da obra em livros direcionados aos alunos e professores trouxe para este estudo possibilidades de análise da *matemática do ensino* de frações considerando a articulação entre ensino e formação de professores.

Pode-se afirmar a partir do estudo que os livros analisados constituem-se em veículos de formação de professores a partir das orientações que envolveram objetivos educacionais, estratégias de ensino, e observações de "ordem didática" e também elementos relacionados ao ensino a partir da identificação do que deveria ser ensinado aos alunos, fato possibilitado pela análise comparada entre Guia do Professor e livro do aluno. Além disso, destaca-se o fato de que a coleção tenha sido resultado de experiências das autoras com cursos de formação de professores.

Produzida para atender à proposta de um ensino, agora, organizado em oito séries, a coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de 1º. grau” assume explicitamente a preocupação com encadeamento da proposta ao longo das séries e a intenção de um trabalho que privilegia a ideia da "matemática como um todo". No ensino de frações essa preocupação leva a uma *graduação* do ensino que privilegia o trabalho com frações equivalentes desde a 2ª série para sua mobilização em séries posteriores nos procedimentos de adição e subtração de frações.

A concepção de "matemática como um todo" parece ser responsável também pela opção de utilização de pares ordenados no ensino de frações nas séries iniciais, uma vez que estes serão mobilizados em séries posteriores para o ensino de funções.

Destaca-se, ainda, nesse encadeamento a preocupação com a linguagem, que nos livros dos quatro primeiros anos toma forma em sequências de exercícios e ilustrações e que no livro da 5ª série começa a ganhar formalidade escrita. No caso das frações essa sistematização em linguagem escrita de ideias e de procedimentos se dá como uma extensão de temas já abordados nos anos anteriores. São exemplos as ideias de fração equivalente, de fração irredutível, de mínimo múltiplo comum, e os procedimentos para comparar, adicionar ou subtrair frações.

As potencialidades observadas em análises que envolvem as relações entre as propostas para o ensino considerando o encadeamento ao longo das diferentes séries, particularmente em destaque na proposta articulada da coleção estudada, deixa como possibilidade a ampliação das discussões aqui realizadas, em futuros estudos, a partir da análise dos três últimos livros da coleção.

REFERÊNCIAS

- Bertini, L. F.; Valente, W. R. (No prelo). Os problemas aritméticos e as articulações entre o ensino e a formação de professores: elementos da matemática do ensino. *Cadernos CEDES*, 41(115).
- Brasil. Lei Federal n. 5692 de 11 de agosto de 1971. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html> Acessado em: 23 jun. 2021
- _____. Lei Federal n. 4024, de 20 de dezembro de 1961. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html> Acessado em: 23 jun. 2021
- Búrigo, E. Z. (2006). O movimento da matemática moderna no Brasil: encontro de certezas e ambiguidades. *Revista Diálogo Educacional*, 6(18), p. 35-47.
- Dienes, Z. P. (1977). *A Matemática Moderna no Ensino Primário*. 4ª ed. Lisboa, Portugal, Livros Horizonte.
- Domingues, J. M., Gregorio, J. M. C., & Costa D. A. (2020). Matemática a ensinar e matemática para ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 10, pp. 3-18.
- Duarte, A. R. S. (2011). A matemática moderna para crianças. In: M. C. A. de Oliveira, M. C. Leme da Silva, W. R. Valente. *O movimento da matemática moderna: história de uma revolução curricular*. Juiz de Fora: Ed. UFJF.
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*. Campinas, SP. SBHE/Editores Associados, 1, pp. 9-43, jan./jun.
- Liberman, M. P., Sanchez, L. B., Averbuch, A., Franca, G. (1977). *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º. Grau – Exemplar do Professor*, 5ª série. São Paulo: Editora Nacional.
- Liberman, M. P.; Sanchez, L. B.; Franchi, A. *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º grau*: 2. Guia do Professor. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.
- Liberman, M. P.; Franchi, A.; Bechara, L. *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar*. 1º volume, São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

- _____. Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar. 2º volume, 2ª ed., São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.
- Morais, R. S., Bertini, L. F. & Valente, W. R. (2021). *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. São Paulo: Livraria da Física.
- Neves, K. C. R. (2019). Manuais preparatórios para os exames de admissão ao ginásio: uma análise sobre a fração. *HISTEMAT*, 5(1), pp 132-149.
- Novaes, B. W. D., Berticelli, D. G. D., & Pinto, N. B. (2020). Guidelines on the use of teaching materials for teaching fraction in the Brazilian primary course (1930-1970). *Pedagogical Research*, 5(3).
- Rios, D. F.; Búrigo, E. Z. & Oliveira Filho, F. (2011). O movimento da matemática moderna: sua difusão e institucionalização - O MMM no Brasil. In: M. C. A. de Oliveira, M. C. Leme da Silva, W. R. Valente. *O movimento da matemática moderna: história de uma revolução curricular*. Juiz de Fora: Ed. UFJF
- Sanchez, L. B.; Liberman, A. P. (1974). *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau*: 3. São Paulo: Editora Nacional, 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208798>. Acesso em 28 set. 2020.
- _____. (1975). *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau*. Guia do Professor. São Paulo: Editora Nacional.
- Teixeira, A. Plano nacional de educação. Referente aos fundos nacionais de ensino primário, médio e superior. *Documenta*. Rio de Janeiro, 8, pp. 24-31. Disponível em: <http://www.bvanisioteixeira.ufba.br/artigos/plano1.html>. Acessado em: 25 jun. 2021.
- Valente, W. R. (2021). A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares, segunda metade do século XIX. *Historia de la Educación*, 39, pp. 31-44.
- Villela, L. M. A. (2009). *GRUEMA - uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo.