EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p209-230

El problema del caftán: Proporcionalidad como herramienta óptima en un problema de resolución de ecuaciones

The caftan problem: Proportionality as an optimum tool in equation solving problems

---

AITZOL LASA [1]

ÁLVARO SÁENZ DE CABEZÓN [2]

MIGUEL R. WILHELMI [3]

JAIONE ABAURREA [4]

Resumen

Este trabajo presenta un análisis didáctico de las resoluciones dadas por estudiantes de 2ºESO (13 años) a un problema recreativo clásico de Rusia, denominado El problema del caftán*. El reto se propuso a estudiantes de la Olimpiada matemática en Navarra (España), y el análisis cualitativo y estadístico de las soluciones confirma que el problema es apropiado para el desarrollo de tópicos algebraicos en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-16 años). En el estudio se emplean herramientas del análisis implicativo, a partir de las cuales se valida una premisa del NCTM, según la cual, la noción de proporcionalidad simple vertebra el currículo de matemáticas en la etapa de secundaria, por lo que las nociones algebraicas no se deberían tratar al margen de este contexto.*

Palabras-clave: *Álgebra, proporcionalidad, olimpiada matemática, análisis implicativo.*

Abstract

In this paper, we present a didactical analysis of the resolutions given by Grade 8 students (13 years old) to a classic recreational problem in Russia, named The Caftan Problem*. We proposed the problem to students who participated in the Mathematical Olympiad in Navarra (Spain). The qualitative and statistical analysis of those solutions, confirms that the problem is appropriate for the development of algebraic topics in mandatory secondary education stage. We used implicative analysis tools, which allows us to validate a premise from the NCTM, which states, that notions of simple proportionality vertebrate the mathematics curriculum at this stage. Therefore, algebraic notions should not be given outside this context.*

Keywords: *Algebra, proportionality, Mathematical Olympiad, implicative analysis.*

---

[1] Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Dpto. Matemáticas UPNA, aitzol.lasa@unavarra.es
[2] DEA en Didáctica de las Matemáticas, Dpto. Matemáticas UPNA, alvaro.saenzdecabezon@unavarra.es
[3] Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Dpto. Matemáticas UPNA, miguelr.wilhelmi@unavarra.es
[4] Máster en Profesorado, Dpto. Matemáticas UPNA, jaione.abaurrea@unavarra.es

Introducción

La colaboración entre las distintas entidades que conforman la *noosfera* o contexto social de la educación matemática, resulta clave en la articulación de dinámicas para la mejora en la enseñanza de esta disciplina, en las distintas etapas educativas (LASA; WILHELMI; ABAURREA, 2017). Esta colaboración permite, por ejemplo, que una entidad universitaria, una consejería de educación de un gobierno regional o una asociación de profesores trabajen conjuntamente con el objetivo único de mejorar las dinámicas de enseñanza de las matemáticas.

En este contexto, el Grupo de investigación en didáctica de las matemáticas de la Universidad Pública de Navarra (España) organiza, junto con el Centro de apoyo al profesorado del Departamento de Educación del Gobierno, dinámicas de formación del profesorado con metodologías activas. Además de participar en cursos y jornadas, el Grupo diseña para la Asociación de profesores de matemáticas TORNAMIRA la prueba anual de la Olimpiada Matemática para estudiantes de 2ºESO (Educación Secundaria Obligatoria, 13 años) y coordina el Tribunal de esta prueba. De manera adicional, el estudio y análisis de las soluciones aportadas por los participantes permite un proceso de mejora continuada para sucesivas ediciones.

En particular, la introducción y el desarrollo del lenguaje algebraico es característico de la etapa de ESO; es decir, los estudiantes que terminan la Educación Primaria parten de conocimientos previos en aritmética y proporcionalidad, y avanzan paulatinamente en la adquisición y utilización de nociones y herramientas del álgebra, hasta finalizar la etapa con un nivel de maestría consolidado. En este sentido, las nociones algebraicas forman parte del diseño de la prueba y suponen un aspecto clave en la discriminación de las respuestas del alumnado.

Así, en este trabajo se analizan las propuestas de solución de los participantes de la Olimpiada a un problema de tipo aritmético-algebraico. Para el diseño y el análisis del problema, se toman como marco teórico y curricular las *directrices* del NCTM (2000) y los *niveles de algebrización* del EOS (GODINO et al., 2014; 2015).

Dentro de la metodología empleada en el estudio de las soluciones, se realiza tanto un análisis cualitativo de las distintas tipologías de respuestas y argumentos de los estudiantes, así como un análisis cuantitativo a partir de un *análisis estadístico implicativo*.

Marco curricular y *niveles de algebrización*

Los currículos nacionales deben ser sensibles a las consideraciones de entidades supranacionales que velan por el buen desarrollo de la educación. En matemáticas, la NCTM identifica seis principios básicos en educación matemática, entre los que destaca el *principio del currículo*, según el cual, "un currículum es algo más que una simple colección de actividades: debe ser coherente, enfocado a matemáticas importantes y bien articulado en los distintos niveles" (NCTM, 2000, p. 20). En los niveles relativos a estudiantes de 11-14 años, se identifica claramente que la noción de *ratio* o *proporción* es clave en la vertebración y articulación del currículo de matemáticas: aparece ligada a tipos de tareas en las que se articulan contenidos y técnicas algebraicas, y nociones funcionales de linealidad (WILHELMI (2017)).

A su vez, el EOS (GODINO et al. (2015)) modeliza la adquisición de las nociones algebraicas en niveles de uso del álgebra, que van desde el puramente aritmético en ausencia de lenguaje algebraico (*nivel* 0), hasta la consolidación del álgebra (*nivel* 3), pasando por niveles en los que el uso del álgebra es incipiente (*nivel* 1) o intermedio (*nivel* 2). Estos niveles se diferencian por los objetos intervinientes, el tipo de transformaciones que se realizan y los lenguajes utilizados (tabla 1).

Tabla 1 – Características de niveles de razonamiento algebraico elemental

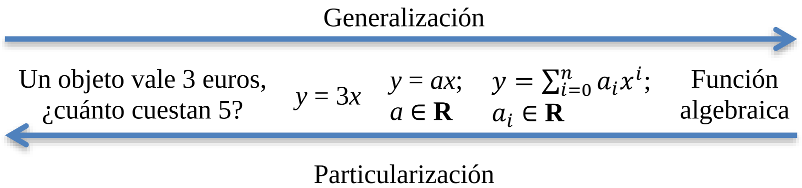
Nivel	Objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	Datos concretos o intensivos de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos	Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares)	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	Intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2, esto es, clases de intensivos de grado 1	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales (esquemas de proporcionalidad, reglas de tres, tablas o diagramas que estructuran la información, etc.)	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos intensivos intervinientes
2	Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Fuente: Godino et al., 2015, p. 121

Los *objetos extensivos* son concretos o particulares, representantes de un tipo o clase de objeto, que se dice *intensivo*. Por ejemplo, la función $y = 3x$ es un ejemplar o extensivo del tipo o intensivo "función lineal" ($y = ax$; $a \in \mathbf{R}$). El carácter extensivo-intensivo (o ejemplar-tipo) es contextual, es decir, un mismo objeto puede ser considerado como particular o general dependiendo del significado de referencia considerado. Por ejemplo, la función lineal ($y = ax$; $a \in \mathbf{R}$) es un caso particular de la clase "función polinómica" ($y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $a_i \in \mathbf{R}$), que a su vez es un caso particular de "función algebraica".

Esta dualidad extensivo-intensivo (o ejemplar-tipo) se da en todos los niveles de algebrización. Por ejemplo, el número "dos" (2, ii o cualquier otra representación) es ya una concreción de objetos físicos; de hecho, de todos los conjuntos de objetos con cardinal 2. Por lo tanto, "2" es ya un "intensivo", que se cataloga de "*primer orden*". En el ejemplo anterior, la función $y = 3x$ puede también ser considerada como un intensivo de primer orden; a saber, modelo-clase de todas las situaciones susceptibles de ser modelizadas por dicha función lineal concreta. De esta forma, la "función lineal" ($y = ax$; $a \in \mathbf{R}$) es un intensivo de segundo orden, dado que representa la clase de funciones a la que pertenece la función concreta $y = 3x$. Con otras palabras, al menos desde el punto de vista teórico, se pueden establecer "cadenas" de sucesivas particularizaciones-generalizaciones (figura 1).

Figura 1 – Generalización y particularización: carácter contextual de la dualidad extensivo-intensivo



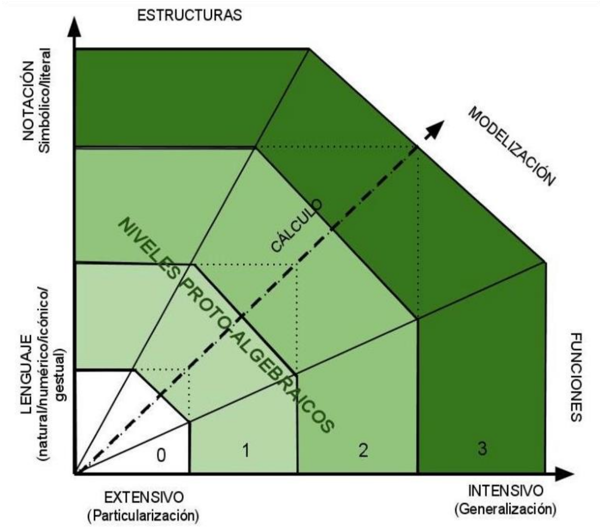
Fuente: Elaboración propia

Así, uno de los indicadores del progreso en los niveles de algebrización es la maestría en la comprensión de la dualidad extensivo-intensivo (o ejemplar-tipo) en la resolución de tareas. De hecho, en la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años), el estudiante recorre paulatinamente los niveles algebraicos, siendo clave en su progreso la gestión de la dialéctica entre lo particular y lo general, clave en la construcción, aplicación y comunicación del conocimiento matemático.

La progresiva adquisición de los niveles de utilización del álgebra se desarrolla en varias dimensiones o contextos en paralelo (figura 2), en los que se desarrolla la notación simbólica (a partir de un lenguaje natural y numérico, que incorpora eventualmente información icónica o gestual), se realizan cálculos con objetos matemáticos cada vez más complejos y generales, o se generalizan fórmulas a partir del estudio de casos particulares y siguiendo procedimientos inductivos y deductivos.

De esta forma, el estudiante avanza en la comprensión de las propiedades de los diversos conjuntos numéricos y de las operaciones que se definen sobre ellos, en las estructuras algebraicas, en el uso del álgebra en la modelización de situaciones o en la resolución de problemas geométricos que articulan cálculos aritméticos y algebraicos. Asimismo, se emplean expresiones algebraicas en contextos funcionales, donde prevalece el uso de variables en representaciones gráficas de ecuaciones, estudio de familias de funciones, etc. En este contexto, la noción de *proporción* aparece ligada, sobre todo, a la modelización y al lenguaje de gráficas y funciones.

Figura 2 – Desarrollo de los niveles de utilización del álgebra (EOS)



Fuente: Godino; Aké; Gonzato y Wilhelmi, 2014, p. 216

Por regla general, los documentos curriculares tienden a organizar los contenidos matemáticos por bloques (GN (2015)). Por ello, las indicaciones del NCTM y los niveles de algebrización aportan herramientas adicionales para el diseño de tareas matemáticas y su posterior análisis. Junto con estas teorías, la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM) (BROUSSEAU (2007)) contribuye al marco teórico, añadiendo herramientas que permiten identificar *fenómenos didácticos*.

El problema del caftán en la Olimpiada Matemática

La Olimpiada tiene lugar un sábado por la mañana y es, pues, un día festivo que excede lo puramente académico. Anualmente participan alrededor de 150 estudiantes, todos ellos voluntarios, que trabajan por parejas, de manera que la actividad matemática se enriquece de los momentos de *acción* (posicionamiento y toma de decisión ante un problema hasta el momento desconocido), *formulación* (comunicación correcta y efectiva de las distintas ideas al compañero) y *validación* (confrontación de ideas, acuerdo sobre la mejor opción y comprobación de la estrategia ganadora) propios de una *situación adidáctica* (BROUSSEAU (2007)). Así, cada pareja debe discutir, valorar y acordar una única respuesta para cada problema, que entregan al tribunal evaluador.

La prueba consta de 6 problemas que requieren la aplicación de distintas habilidades matemáticas de distintas áreas: aritmética, geometría, combinatoria o azar, lógica, etc. El primer problema de la olimpiada se resuelve con la aplicación directa de un contenido matemático simple. Con esta decisión *afectiva* que busca anular el posible efecto que los nervios y los miedos puedan tener en los estudiantes ante una prueba que se presupone exigente. Una vez eliminados los nervios, la olimpiada comienza propiamente con el segundo problema. Se analiza a continuación el segundo problema de la prueba de 2018, que requiere de habilidades aritméticas y algebraicas. Se trata de un problema popular, lúdico y recreativo proveniente de la tradición rusa, denominado *El problema del caftán*:

> El amo contrató a un trabajador para un año y prometió pagarle 12 rublos y un caftán. Pero éste, después de haber trabajado 7 meses quiso marcharse. Una vez hechas las cuentas recibió el caftán y 5 rublos. ¿Cuánto cuesta el caftán? (NESTERENKO; OLEJNIK; POTÁKOV, 1994, p. 47).

Con el ánimo de evitar cualquier dificultad en la comprensión del enunciado, se pone a disposición de los participantes toda la información adicional que permita aclarar los términos del problema. En este caso, se aporta la definición del término caftán que aparece en el diccionario de la lengua.

> *Caftán*. Antiguo abrigo ruso; vestimenta amplia y larga, sin cuello y con mangas anchas, usada especialmente en los países musulmanes (RAE).

Por si la definición no resultara suficiente, se añade además la recreación de un cuadro cuyo elemento principal es el retrato de un hombre vestido con un caftán (figura 3).

Figura 3 – Hombre kurdo con caftán (Museo Nacional de Georgia)

Fuente: Wikipedia

Se trata de un buen problema para la discusión entre iguales, ya que permite múltiples soluciones. A continuación se muestran distintas resoluciones-tipo de *nivel* 0 (método aritmético), y *nivel* 3 (algebraico consolidado), pasando por niveles intermedios 1 y 2 (incipiente e intermedio). Para finalizar, se añade una solución-tipo adicional de *nivel* 4 (algebraico avanzado) en el que se introduce un parámetro. Al final de la sección se incluye el enlace a los modelos dinámicos que ejemplifican cada solución.

Resolución de nivel 0 de algebrización del problema del caftán

Una solución aritmética de *nivel* 0 se caracteriza por la ausencia de lenguaje algebraico; en su lugar, se emplea un lenguaje natural y numérico en el que las definiciones de las variables juegan el papel de "etiqueta" que permite diferenciar la categoría o el significado de cada número:

$$\begin{cases} 12\ meses\ trabajados\ equivale\ a\ 12\ rublos\ y\ un\ caftán \\ 7\ meses\ trabajados\ equivale\ a\ 5\ rublos\ y\ un\ caftán \end{cases}$$

El significado institucional de las operaciones aritméticas básicas permite a los estudiantes identificar aquellas operaciones entre cantidades numéricas que se consideran válidas en un contexto de resolución de problemas. Los números que pertenecen a una categoría particular se pueden operar entre sí, y se obtiene por resta que 5 meses trabajados equivalen a 7 rublos (el valor del caftán desaparece de la expresión); es decir, se resuelve por el método de reducción y se tiene que el trabajador ganaría al mes un sueldo equivalente a 7/5 de rublos al contado, es decir, 1 rublo y 40 céntimos de rublo. Multiplicando esta cantidad por 7 meses trabajados, se obtienen 9,8 rublos, y restando los 5 rublos pagados al contado, se tiene que el caftán cuesta 4 rublos y 80 céntimos de rublo.

Resolución de nivel 3 de algebrización del problema del caftán

La progresiva introducción de notación simbólica y algebraica modifica la presentación del argumento. Así, en una resolución-tipo consolidada de *nivel* 3, se puede razonar definiendo una única variable “r” que represente la paga en rublos por mes. Así en 7 meses se cobra “$7r$”; en 12 meses, se obtiene “$12r$”, es decir, “r” es la constante de proporcionalidad. En este caso se tiene:

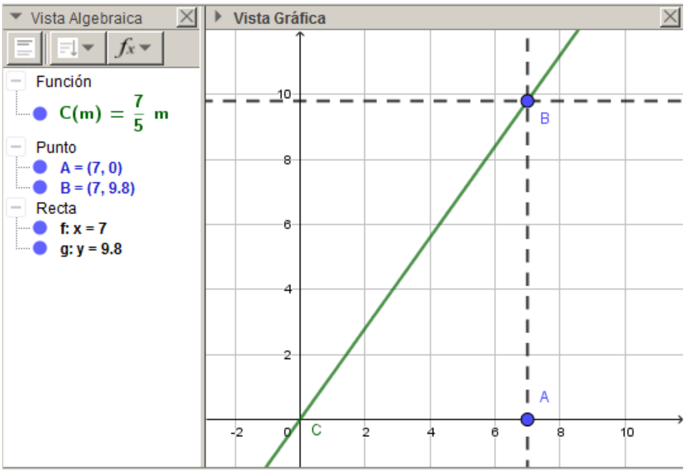
- Cobro en 12 meses: $12r = 12 + c$
- Cobro en 7 meses: $7r = 5 + c$

Así, despejando “c” en ambas ecuaciones e igualando se tiene:

$$12r - 12 = 7r - 5 \Leftrightarrow 5r = 7 \Leftrightarrow r = \frac{7}{5}$$

De tal forma, en 7 meses se debería recibir $\frac{7}{5} \times 7 = \frac{49}{5} = 9 + \frac{4}{5} = 9 + 0{,}8 = 9{,}8$. Así, dado que ha recibido 5 rubros y un caftán, este debe valer 4,8 rubros. De hecho, la función lineal cobro “$C = \frac{7}{5}m$” representa la cantidad total de rublos recibidos según el número de meses (m) (figura 4).

Figura 4 – Función lineal cobro “$C = \frac{7}{5}m$” con GGB



Fuente: Elaboración propia

También se podría partir del dato dado del número de meses trabajados (7) y establecer dos funciones afines “pago” donde la única incógnita es el precio del caftán:

a) *Real*: $y = 5 + c$.

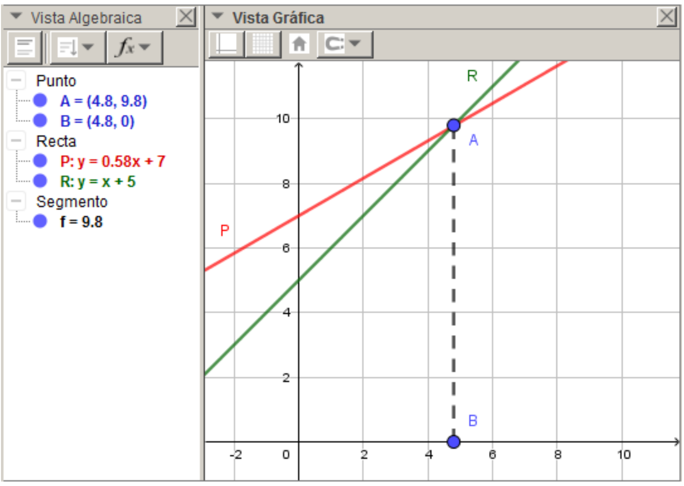
b) *Proporcional al número de meses trabajados*: $y = \frac{7}{12} \times (12 + c) = 7 + \frac{7c}{12}$. Dado que tras un año recibiría "12+*c*" en siete meses deber recibir la parte proporcional, que resulta de dividir el cobro anual entre 12 y multiplicarlo por 7.

El valor "c" es el que hace que ambos pagos sean iguales:

$$5 + c = 7 + \frac{7c}{12} \Leftrightarrow 60 + 12c = 84 + 7c \Leftrightarrow 5c = 24 \Leftrightarrow c = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

La interpretación gráfica del valor "c" es pues el valor de la abscisa común a las funciones "Real" y "Proporcional" y, por lo tanto, representa la primera coordenada del punto de intersección de las representaciones en el plano cartesiano de ambas funciones. Asimismo, debe representar el punto de intersección con la representación en el plano cartesiano de la función lineal $C = \frac{7}{5}m$ (figura 5).

Figura 5 – Intersección de las funciones "Pago" con GGB



Fuente: Elaboración propia

Resolución de niveles 1-2 de algebrización del problema del caftán

Las dos soluciones-tipo mostradas corresponden a soluciones extremas de tipo aritmético (*nivel* 0) o algebraico consolidado (*nivel* 3). Sin embargo, se puede asimismo obtener el valor del caftán por métodos de niveles de algebrización intermedios. Así, con base en las funciones "real" y "proporcional" y el método *regula falsi* permite la resolución sin el uso de *objetos intensivos* ni de un lenguaje simbólico literal. Así, la resolución del problema del Caftán puede implicar una organización de las aproximaciones sucesivas; por ejemplo, en forma tabular, alcanzando un nivel 1 de algebrización. Esta organización tabular permite una comprensión global del problema sin una manipulación simbólico-literal. En la figura 6 se aporta el cálculo sistematizado en una hoja Excel.

Figura 6 – Aplicación de método *regula falsi* con Excel para el cálculo del valor del caftán

	A	B	C	D
1		Pago		
2	Caftán (c)	Real: R (y=5+c)	Proporcional: P (y=7+7*c/12)	Diferencia: D (D=R-P)
3	12	17	14	3
4	11	16	13,42	2,58
5	10	15	12,83	2,17
6	9	14	12,25	1,75
7	8	13	11,67	1,33
8	7	12	11,08	0,92
9	6	11	10,5	0,5
10	5	10	9,92	0,08
11	4	9	9,33	-0,33
12	3	8	8,75	-0,75
13	2	7	8,17	-1,17
14	1	6	7,58	-1,58
15	4,9	9,9	9,86	0,04
16	4,8	9,8	9,8	0
17	4,7	9,7	9,74	-0,04

Fuente: Elaboración propia

Resolución de nivel 4 de algebrización del problema del caftán

La paulatina adquisición de conocimientos algebraicos modifica el significado que los estudiantes atribuyen a las expresiones icónicas y simbólicas de las cantidades numéricas. En los niveles incipiente e intermedio, un símbolo numérico puede representar un valor numérico concreto pero desconocido hasta el momento, mientras que en un nivel consolidado puede adquirir el significado adicional de variable de una función. A medida que el estudiante avanza en su maestría en algebraica (*nivel* 4), las representaciones icónicas y simbólicas de las cantidades numéricas adquieren, además, el nuevo significado de *parámetro*.

Así, el problema del caftán se puede interpretar en el plano cartesiano como la obtención de una recta que pasa por los puntos $A(7, 5 + c)$ y $B(12, 12 + c)$, siendo "c" un parámetro que toma valores mayores que 0. La pendiente de la recta que pasa por ambos puntos no depende del valor de "c":

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(12 + c) - (5 + c)}{12 - 7} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

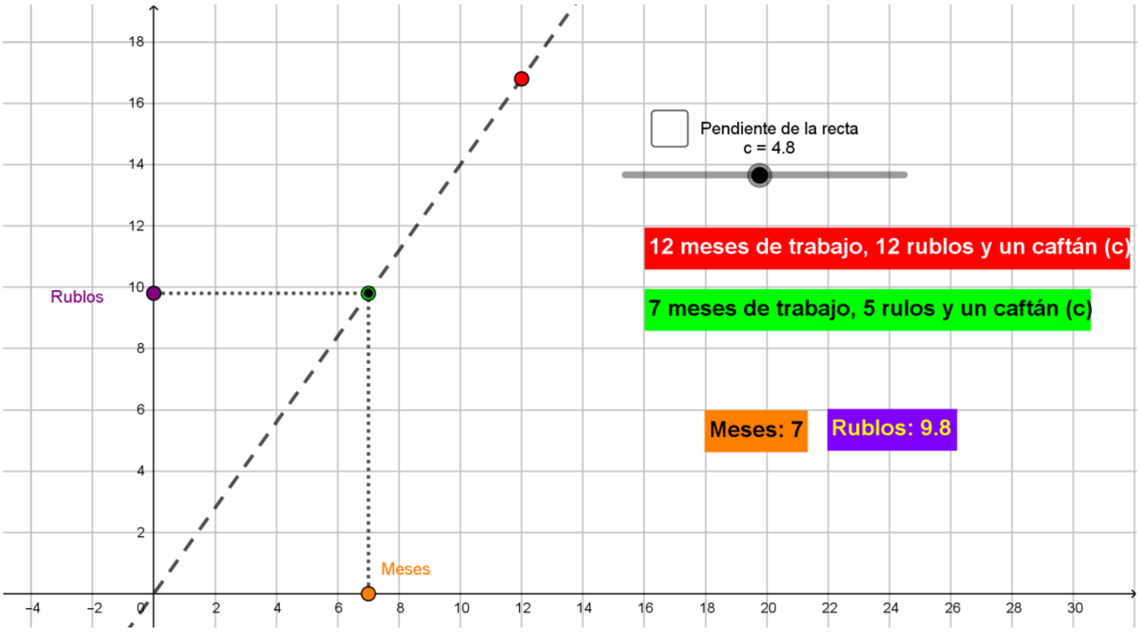
Se tiene, pues, la ecuación de una recta con pendiente $m = 1{,}4$, en el que la abscisa representa el número de meses trabajados y la ordenada la cantidad de rublos obtenidos. De la expresión general punto-pendiente de la recta se obtiene la ecuación explícita de la recta, y la ordenada en el origen depende de un parámetro "c" mayor que cero:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$y = 1{,}4x + (c - 4{,}8)$$

Así pues, la solución del problema se obtiene del valor del parámetro "c" que haga lineal esta recta afín, dado que a 0 meses trabajados corresponden 0 rublos (figura 7).

Figura 7 – Modelo dinámico parametrizado con GGB



Fuente: Elaboración propia

Todas las construcciones GGB que aparecen en esta sección, con sus gráficos, hojas de cálculo y modelos dinámicos se han recopilado en un libro-GGB[5], y se pueden consultar libremente en el enlace. En los siguientes apartados, se describe la experimentación: población, muestra, resultados y su discusión.

Población y muestra

La población son estudiantes de 2º ESO (13-14 años) con un rendimiento óptimo en matemáticas y con gusto por la disciplina. De hecho, la Olimpiada Matemática se realiza fuera del contexto escolar ordinario y tiene un carácter optativo.

[5] Para acceder al libro-GGB, seguir el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/cqnyrbdt

La muestra del estudio se compone de 138 estudiantes que trabajan por parejas, es decir, se analizan 69 resoluciones al problema. Los estudiantes se emparejan al azar, con la condición de que ambos estudiantes no pertenezcan al mismo centro educativo; se evita así que los estudiantes se conozcan previamente, procurando la igualdad de condiciones para todos los participantes, y además, se garantiza que la prueba no se perciba como una competición entre centros educativos.

Los estudiantes vienen de centros de titularidad tanto pública como privada, y de modelos lingüísticos en euskera o castellano. A la hora de emparejar a los estudiantes, se respeta y se toma en consideración su opción lingüística.

La elección de los estudiantes en los centros se realiza por criterio exclusivo de los centros educativos participantes. Así, en centros con muchos candidatos, se han podido realizar pruebas eliminatorias previas para la elección de participantes; en algunos centros se habrá trabajado con el estudiante tareas “tipo olimpiadas”, y en otros no, etc.

Resultados

La totalidad de los participantes aporta alguna solución al problema, es decir, ningún participante entrega una solución en blanco. Además, un tercio revisa los cálculos del problema a partir de cálculos complementarios, empleando una técnica alternativa (23 revisiones, 33%). Por ello, la utilización de una técnica particular no es excluyente del uso de otra, y en los resultados, la suma de los porcentajes de uso de cada técnica supera el 100%.

El éxito global en la resolución del problema es alto si se compara con otros problemas de la prueba: 27 soluciones correctas (39%). La variedad de respuestas muestra la riqueza de estrategias que tienen los estudiantes para atacar la resolución de problemas de tipo aritmético o algebraico.

La mayoría (24 soluciones, 35%) plantea una ecuación con una incógnita que modeliza el problema; es decir, utiliza el método de igualación sobre la incógnita que representa el valor del caftán, sin llegar a emplear símbolo alguno para codificar otras variables del problema, como el precio unitario a pagar por cada mes. A continuación, resuelve la ecuación y obtiene el precio del caftán.

En la figura 8 se muestran dos soluciones correctas y equivalentes que ejemplifican el uso de una ecuación de primer grado. En ambos casos, se tiene un nivel de algebrización 3, ya que las ecuaciones resueltas son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Sin embardo el origen de dichas ecuaciones no es equivalente. En la propuesta 8a, los términos de la ecuación surgen a partir de una lectura directa de las cantidades del enunciado. En la propuesta 8b, en la forma de la ecuación se aprecia un argumento previo basado en proporcionalidad simple, de la forma “12 veces una cosa es igual a 7 veces otra cosa”. Además, el uso de nociones de proporcionalidad simple simplifica la ecuación, y ésta requiere un menor número de manipulaciones algebraicas, evitando además las operaciones con fracciones. Por último, en ambos casos (8a y 8b) la incógnita utilizada es “*x*”, que representa el uso convencional en los centros educativos. De hecho, ninguna de las parejas con un manejo algebraico formalizado denota el precio del caftán con otra letra, por ejemplo, “*c*”. La referencia explícita al nombre “caftán” lo realizan únicamente aquellas parejas con un nivel de algebrización no consolidado (niveles 1 o 2).

Figura 8 – Método de igualación

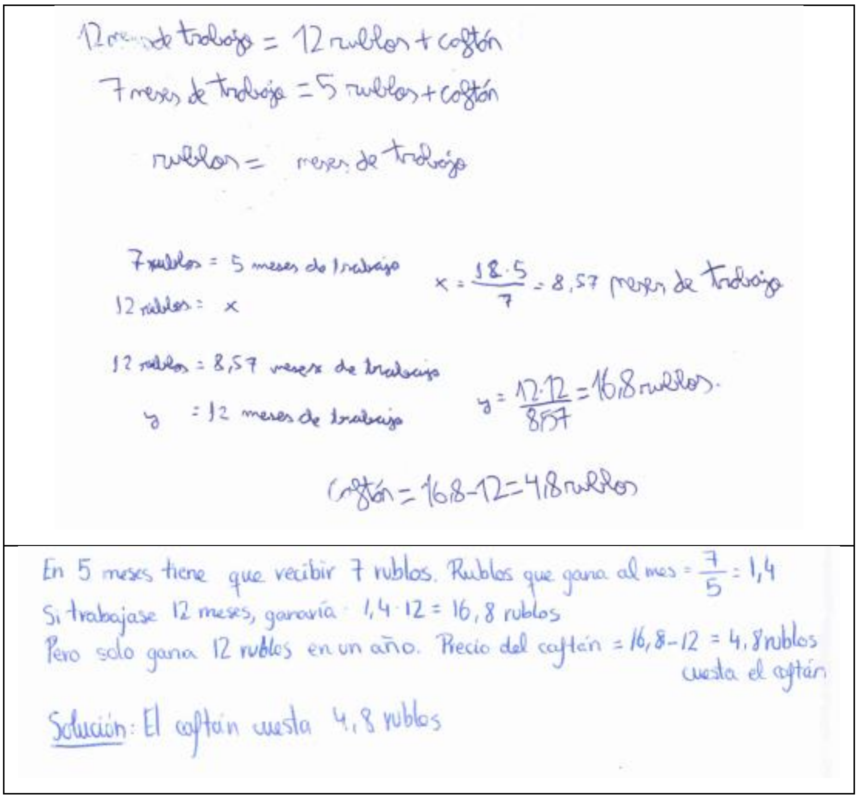
8a. Lectura lineal de los datos de enunciado. Ecuación de coeficientes racionales.	8b. Analisis previo proporcional. Ecuación de coeficientes enteros.
$\frac{7x}{12} + 7 = x + 5$ $\frac{7x}{12} + \frac{84}{12} = \frac{12(x+5)}{12}$ $7x + 84 = 12(x+5)$ $7x + 84 = 12x + 60$ $84 - 60 = 12x - 7x$ $24 = 5x$ $\frac{24}{5} = x = 4{,}8$ beraz, kaftanak 4,8 rublo balio du.	$12(5+x) = 7(12+x)$ $60 + 12x = 84 + 7x$ $12x - 7x = 84 - 60$ $5x = 24$ $x = 4{,}8$ S: El caftán vale 4,8 rublos.

Fuente: Soluciones de los participantes

En la solución de la figura 8b se observa además la utilización de nociones de proporcionalidad, como apoyo al planteamiento de una ecuación simple de coeficientes enteros, pero otros participantes utilizan la proporcionalidad simple sin recurrir a una ecuación. Esta es la segunda técnica más empleada, ya que 21 participantes (30%) obtienen el valor unitario del sueldo de un mes, y a partir de este dato, calculan la fracción del valor mensual del caftán, para finalmente obtener el precio completo relativo a los 7 meses.

En la figura 9 se muestran dos ejemplos de soluciones correctas basadas en el uso exclusivo de nociones de proporcionalidad. En ellas, se utilizan únicamente números y operaciones, y el lenguaje utilizado apenas excede el *nivel 0* de algebrización; se emplea, a lo sumo, un símbolo con el significado de “valor numérico desconocido”.

Figura 9 – Proporcionalidad simple



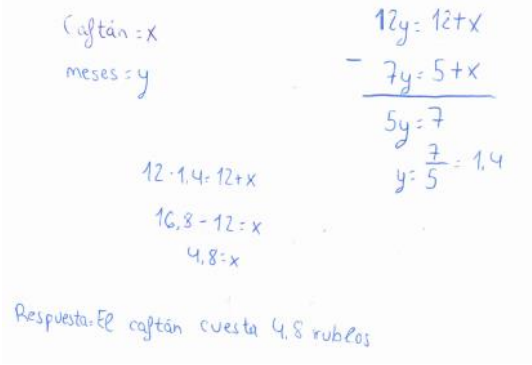
Fuente: Soluciones de los participantes

Dentro de las estrategias consideradas ganadoras, es decir, que contribuyen al grupo de soluciones correctas, tenemos, en tercer y último lugar, el método de reducción. En total, 12 participantes (17%) modelizaron el problema a partir de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, y aplicaron el método de reducción para obtener los valores tanto del sueldo mensual como del precio del caftán.

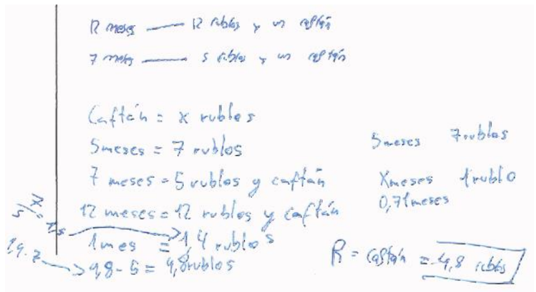
En la figura 10 se muestran algunas soluciones correctas, en las cuales se evidencia que el uso del método de reducción no implica en todos los casos un nivel consolidado en el uso del algebra. Así, en la resolución 10a se observa un *nivel 3*, dado que una vez determinadas las ecuaciones, estás se resuelven de manera analítica, sin referencia a la información del contexto. Sin embargo, en las resoluciones 10b y 10c el uso del algebra es incipiente (*nivel 1*), dado que hay todavía una referencia expresa al contexto se aplican relaciones con objetos intensivos de primer grado, con esquemas de reglas de tres, y con una lengua natural todavía muy presente.

Figura 10 – Método de reducción y *niveles de algebrización*

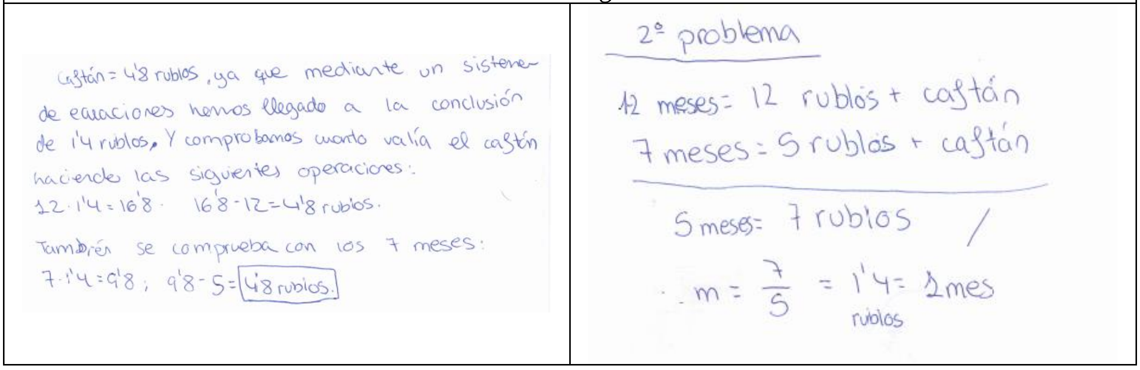
10a. Nivel 3 de algebrización.



10b. Nivel 1 de algebrización.



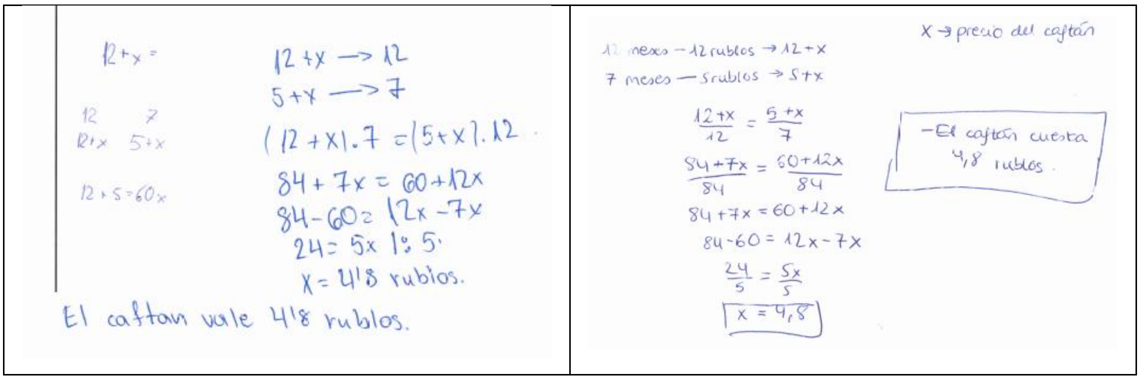
10c. Nivel 1 de algebrización.



Fuente: Soluciones de los participantes

Cabe recordar que no todos los participantes emplean un método particular de manera privativa en detrimento de otros métodos. En este sentido, los métodos utilizados no son excluyentes, y en algunos casos, se emplean nociones de proporcionalidad como herramienta previa para el planteamiento de la ecuación, que a continuación será resuelta por un procedimiento algebraico. En la figura 8b se ha mostrado ya un indicio de pensamiento proporcional, el cual queda implícito dentro del argumento; en la figura 11 se muestran algunos ejemplos adicionales, en los que se explicita claramente este esquema o diagrama de tipo proporcional.

Figura 11 – Nociones de proporción y método de igualación



Fuente: Soluciones de los participantes

Estas tres estrategias (ecuación de una incógnita, técnicas de proporcionalidad simple, sistema con dos ecuaciones) son pertinentes para resolver el problema planteado, se pueden considerar *ganadoras* o que conducen al éxito en la tarea, y engloban el uso mayoritario de los participantes. En total, el 59% de los participantes se decanta por al menos una de estas estrategias y un tercio (33%) emplea al menos dos de ellas para revisar o asegurar la solución obtenida (tabla 2).

Tabla 2 – Porcentaje de utilización de técnicas

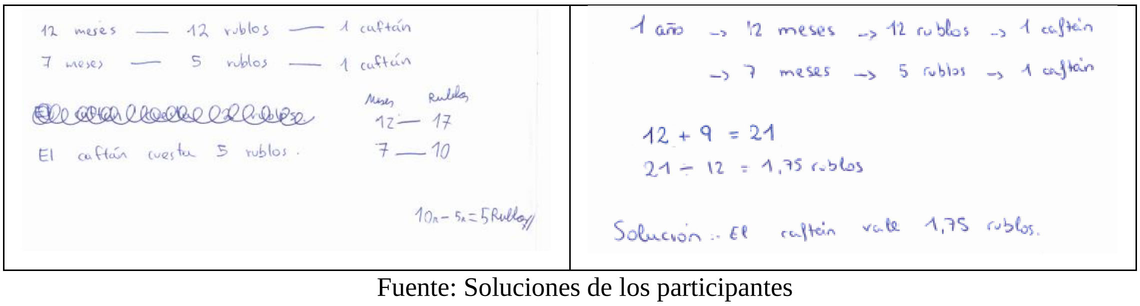
Técnicas empleadas	
Plantea una ecuación de una incógnita y resuelve por el método de igualación	35%
Emplea un argumento de proporcionalidad simple	30%
Plantea un sistema de dos ecuaciones y resuelve por el método de reducción	17%
Uso de varias técnicas	
Revisa el resultado por más de un método, emplea al menos dos de las técnicas	33%
Uso global	
Participantes que utilizan alguna de las técnicas	59%

Fuente: Elaboración propia

Los participantes que emplean otras técnicas distintas a estas tres previamente comentadas no muestran garantías de obtener el resultado correcto. Dentro de las estrategias fallidas, que no conducen a una solución satisfactoria del problema, encontramos en particular el uso de técnicas de proporcionalidad compuesta que no se ajustan a la estructura matemática del problema. En estas propuestas, se interpreta erróneamente el precio del caftán como una cantidad variable, al igual que el número de meses o la cantidad de rublos; es decir, se aprecia un esquema de variables en forma de 3-tupla *(meses, rublos, caftán)* que conduce inevitablemente a un error.

En la figura 12, se observa cómo los estudiantes no aciertan a modelizar el problema a partir de un esquema de proporcionalidad múltiple, porque no saben qué hacer con la supuesta variable *caftán*, que es, en realidad, una constante (este argumento aparece en el 14% de las soluciones).

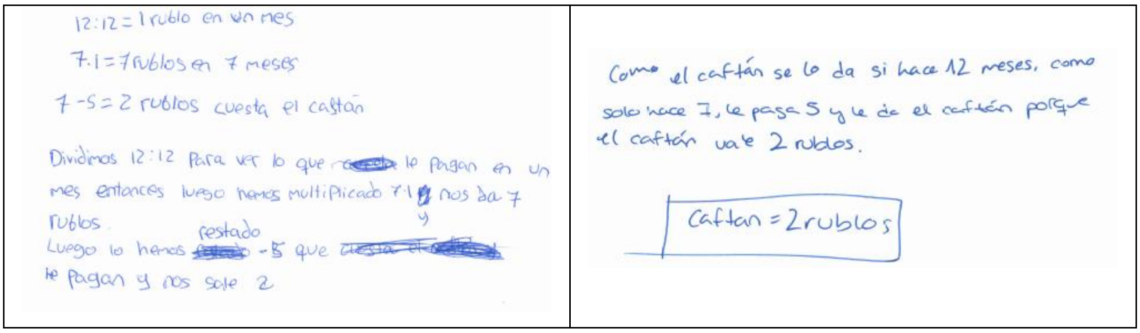
Figura 12 – Estrategias erróneas: uso de proporcionalidad compuesta



Fuente: Soluciones de los participantes

Por último, cabe reseñar una técnica aritmética errónea, pero sin embargo de amplia difusión (aparece en el 27% de las soluciones), según la cual el caftán valdría 2 rublos (figura 13). En este caso, el error consiste en omitir desde el inicio el precio del caftán, suponiendo como sueldo único el pago mensual de un rublo, y que el caftán es una suerte de regalo que viene a sustituir el pago en rublos: dado que el amo paga 12 rublos por 12 meses de trabajo (el estudiante olvida aquí que debe incorporar el precio del caftán), por 7 meses le debe 7 rublos, y como 5 rublos son al contado, el caftán vale la diferencia, es decir, $7 - 5 = 2$ rublos.

Figura 13 – Estrategias erróneas: el caftán como regalo que sustituye al rublo



Fuente: Soluciones de los participantes

Discusión de los resultados

Los resultados de la tabla 1 se prestan al tratamiento de datos mediante un *análisis estadístico implicativo* (ASI, del francés *"Analyse Statistique Implicative"*) (GRAS; SUZUKI; GUILLET; SPAGNOLO (2008)). Los estudiantes emplean en la resolución más de un método, y por ello, cabe analizar la relación implicativa entre ellos y su relación con la obtención soluciones válidas y correctas. La tabla 3 sintetiza las variables internas del problema que se han tomado en cuenta.

Tabla 3 – Variables internas en el problema del caftán

Código	**Descripción de la variable**
V1	Resuelve por un procedimiento de proporcionalidad simple
V2	Resuelve por un sistema de ecuaciones, método de reducción
V3	Resuelve por una ecuación de una incógnita, método de igualación
V4	Resuelve por un procedimiento de proporcionalidad compuesta
V5	Resuelve por falsa proporción: el caftán vale 2 rublos
V6	Revisa el resultado y lo comprueba por más de un método
V7	La solución es correcta
V8	Muestra un nivel algebraico consolidado (nivel 3)

Fuente: Elaboración propia

Se miden en primer lugar los índices de similitud entre variables (tabla 4). Se puede decir que la variable 1 guarda relación con las variables 3, 6 y 7. Es decir, el uso del procedimiento de proporcionalidad simple aparece ligado al uso del método de igualación (ambos procedimientos se emplean de manera complementaria) y a la obtención de la solución correcta. La variable 3, por su parte, guarda relación, además de con la variable 1, con las variables 6, 7 y 8. En este sentido, los estudiantes que emplean el método de igualación emplean técnicas de proporcionalidad para plantear la ecuación a resolver, y obtienen la solución correcta, mediante una propuesta que emplea un nivel de lenguaje algebraico consolidado (*nivel* 3).

Tabla 4 – Índices de similitud mayores que 0,95 (ASI)

	V1	V3	V6	V7	V8
V1		0.98	0.97	1.00	
V3	0.98		0.92	0.93	0.99
V6	0.97	0.92		0.95	0.99
V7	1.00	0.93	0.95		0.97
V8		0.99	0.99	0.97	

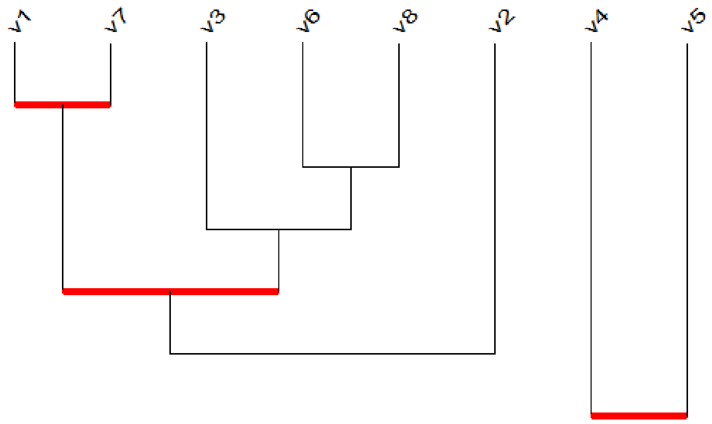
Fuente: Elaboración propia

Las fuertes relaciones existentes entre estas variables se pueden observar, asimismo, en el árbol de similitud que las agrupa por componentes (figura 14). Las franjas rojas horizontales del diagrama del árbol de similitud, indican mayor aportación en frecuencias absolutas; así, las variables 1 y 7 forman el primer nodo principal, es decir, el uso de técnicas de proporcionalidad se vincula fuertemente con la obtención de la solución correcta.

En la segunda rama confluyen las variables 6 y 8, que indican la relación entre revisar el resultado por más de un método y un nivel de algebrización consolidado. Más adelante, esta segunda rama confluye con la variable 3, es decir, se emplea el método de igualación. Esta rama se acaba integrando a la principal (uso de proporcionalidad simple y obtención correcta de la solución). Por último, se integran en este grupo los estudiantes que emplearon el método de reducción (variable 2).

En una rama independiente se agrupan las variables 4 y 5. Es decir, los estudiantes que interpretan el enunciado como un problema susceptible de ser resuelto por un procedimiento de proporcionalidad compuesta, emplean procedimientos equivocados e incorrectos, y no son capaces de obtener el resultado correcto.

Figura 14 – Árbol de similitud (ASI)

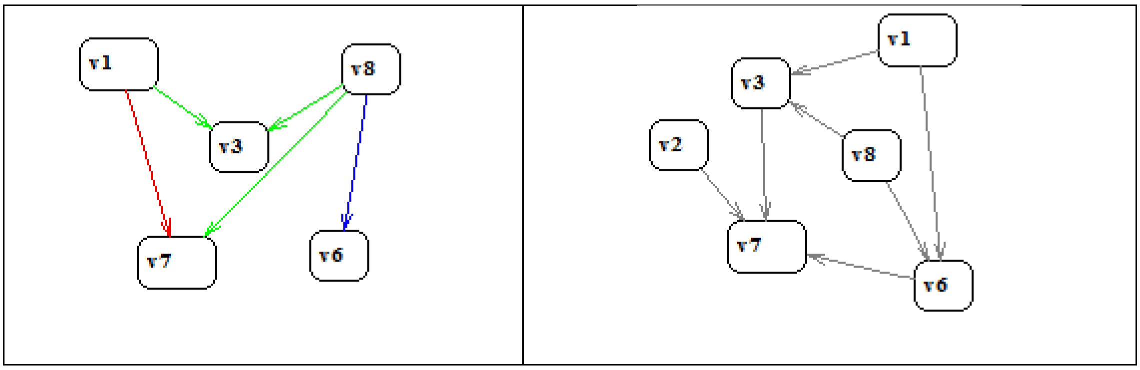


Fuente: Elaboración propia

Gracias a los índices de similitud se obtiene información clave para poder agrupar las tipologías de soluciones de los estudiantes, y se observan así dos ramas principales en el árbol de similitud. Esta información se puede complementar con en el gráfico implicativo, para definir la direccionalidad en las relaciones antes observadas.

En particular, se vuelve a observar la fuerte relación entre las variables 1 y 7, según la cual, el 99% de los estudiantes que emplean técnicas de proporcionalidad simple, obtienen la solución correcta al problema. Siguiendo con las relaciones fuertes, el 95% de los estudiantes que muestra un nivel consolidado en el uso del lenguaje algebraico (variable 8) resuelve por el método de igualación, y otro 95%, revisa el resultado por un método alternativo. Existen implicaciones algo más débiles que confirman el extremo antes expuesto: el 90% de los estudiantes que emplean la proporcionalidad simple utiliza también el método de igualación; y el 90% de los estudiantes que muestra un nivel algebraico consolidado obtiene el resultado correcto (figura 15).

Figura 15 – Gráfico implicativo (ASI)



Fuente: Elaboración propia

El gráfico implicativo muestra otras relaciones “no tan altas” (al 85%)[6], las cuales, sin embargo, son coherentes con lo mostrado anteriormente y no hacen más que reforzar los resultados. En síntesis, las estrategias ganadoras han sido, en este orden, la proporcionalidad simple, el método de igualación y el método de reducción. La mayor tasa de éxito de las dos primeras, en comparación con la tercera, guarda relación con un nivel algebraico superior y con el uso integrado de las dos primeras estrategias como herramientas de control del resultado.

Conclusiones y cuestiones abiertas

En este trabajo se conforta la vinculación de las nociones de proporcionalidad simple en el aprendizaje del lenguaje algebraico y de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones. Las nociones de proporcionalidad no se deben relegar a un segundo plano en beneficio del uso descontextualizado de “recetas” algebraicas opacas, cuya utilización irreflexiva no garantiza una comprensión crítica de la tarea matemática. Las indicaciones de la NCTM, según las cuales las nociones de proporcionalidad simple vertebran el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria, mantienen plena su vigencia.

El aprendizaje del álgebra es gradual en la etapa de ESO (12-14 años), y los estudiantes muestran distintos niveles de utilización del lenguaje algebraico, con independencia de las nociones, de las técnicas, o del tipo de argumentación que emplean en la resolución de un problema. En este sentido, y en coherencia con Lasa y Wilhelmi (2015), la

[6] Hay que tener en cuenta que el tamaño de la muestra no es elevado y que el muestreo ha sido de tipo intencional (no probabilístico), lo que supone de cara a la validez interna una exigencia mayor en los resultados de cara a extraer conclusiones consistentes. Sin embargo, la coherencia de resultados contribuye a la aceptación de las relaciones contingentes.

caracterización de la resolución a un problema en función de los niveles de algebrización del EOS, aporta información útil para la compresión de otras variables internas del análisis de una resolución, y es por ello, una herramienta teórica útil para analizar y caracterizar las resoluciones de los estudiantes.

Queda abierto para un posterior análisis el estudio cruzado de estos resultados con los resultados de los mismos estudiantes en otras preguntas de la prueba olímpica, para poder obtener así información adicional sobre el desempeño de los estudiantes en otros bloques de contenidos, así como posibles relaciones o interacciones entre contenidos de distintos bloques.

Reconocimiento: Este trabajo está enmarcado en el proyecto CENEDUCA6/2019. Gobierno de Navarra - Departamento de Educación 2019-2020 (Resolución 496/2019 de 8 de agosto).

Referencias

BROUSSEAU, G. **Iniciación a la Teoría de Situaciones Didácticas**. Buenos Aires: El Zorzal, 2007.

GOBIERNO DE NAVARRA (GN). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el Currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra, **Boletín Oficial de Navarra** (BON) 127, de 2 julio, pp. 7801-7807, 2015.

GAITA, R.; WILHELMI, M.R. Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. **Bolema**, 33(63), 269-289, 2019. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M. Y WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, 32 (1), 199-219, 2014. Disponible en: https://ensciencias.uab.es/article/view/v32-n1-godino-ake-gonzato-etal/965-pdf-es.

GODINO, J.D.; NETO, T.; WILHELMI, M.R.; ETCHEGARAY, S.; LASA, A. Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, 8, 117-142, 2015. Disponible en: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105.

GRAS, R.; SUZUKI, E.; GUILLET, F.; SPAGNOLO, F. (Eds.) **Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications**. London: Springer, 2008.

LASA, A.; WILHELMI, M.R. Atando cabos, contando circunferencias. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), **Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria** 2 (pp. 145-152). Granada: Dpto. de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, 2015. Disponible en: https://academica-e.unavarra.es/handle/2454/33460.

LASA, A.; WILHELMI, M.R.; ABAURREA, J. Formación activa del profesorado: uso de la transposición meta-didáctica en un curso GeoGebra. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (Ed.), **Actas** del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 335-350). Madrid, 10-14 de Julio, 2017.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) **Principles and standards for school mathematics**. Reston: Drive, 2000.

NESTERENKO, Y.V., OLEJNIK, S.N., POTÁPOV, M.K. **Antiguos problemas recreativos en Rusia**. Bilbao: EHU, 1994.

WILHELMI, M. R. Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R.; M.; GEA, M. M.; GIACOMONE, B.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. (Eds.), **Actas** del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Ponencias invitadas), 2017. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/wilhelmi.pdf

Texto recebido: 04/06/2019
Texto aprovado: 09/12/2019