ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p347-368

Entendendo sistemas de equações lineares: um estudo de caso no contexto da escola no Chile

Understanding of linear equations systems: a case study in the school context in Chile

Comprensión de sistemas de ecuaciones lineales: un estudio de caso en el contexto escolar en Chile

SAMUEL CAMPOS [1]

MARCELA PARRAGUEZ [2]

Resumo

Com base na Teoria dos Modos de Pensamento de Sierpinska, são apresentados três modos de pensar o conceito de Sistema de Equações Lineares (SEL): (1) como um conjunto que deve satisfazer propriedades estruturais da Álgebra Linear, (2) como um conjunto solução algébrico de equações; (3) como planos e retas no espaço ou retas no plano. O objetivo da pesquisa é evidenciar, com apoio teórico, a compreensão por parte de estudantes do ensino médio do conceito de conjunto solução e como esses estudantes se enquadram nos modos de pensamento para responder a cinco atividades relacionadas a SEL. Os resultados mostram a necessidade de articular pelo menos dois desses modos de pensar para dar uma resposta correta às atividades apresentadas. Por outro lado, os estudantes cometem erros quando se enquadram em apenas uma dos modos de pensar.

Palavras-chave: *SEL-Modos de Pensamento-Compreensão.*

Abstract

Based on Sierpinska's Thinking Modes Theory, three modes of thinking are presented: the System of Linear Equations (SEL): (1) as a set that must fulfill structural properties of linear algebra, (2) as a set algebraic solution of equations (3) as planes and lines in space or in the plane. The purpose of the research is to show evidence, with theoretical support, of the understanding of the joint solution concept in middle school students, and how they are placed in the modes, to respond to five activities related to SEL. The results show the need to articulate at least two of these ways of thinking in order to give a correct answer to the activities presented, with students showing errors that were only in one of the ways of thinking.

Keywords: *SEL-Thinking Modes-Comprehension.*

[1] Magister en Didáctica de la Matemática – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. E-mail: sjcampos@uc.cl
[2] Doctora en Didáctica de la Matemática - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA-IPN), México. Directora del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. E-mail: marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Con base en la Teoría Modos de Pensar de Sierpinska, se presentan tres modos de pensar el concepto Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL): (1) como un conjunto que debe cumplir propiedades estructurales del álgebra lineal, (2) como un conjunto solución algebraico de ecuaciones (3) como planos y rectas en el espacio, o rectas en el plano. La finalidad de la investigación es mostrar evidencias, con sustento teórico, de la comprensión del concepto conjunto solución en estudiantes de enseñanza media, y de cómo ellos se sitúan en los modos, para dar respuesta a cinco actividades relativas a los SEL. Los resultados muestran la necesidad de articular al menos dos de estos modos de pensar para dar una respuesta correcta a las actividades presentadas, de lo contrario los estudiantes manifiestan errores cuando se situaron en un solo modo de pensar.

Palabras clave: *SEL-Modos de Pensamento-Comprensión*

Introducción

En el currículo de matemática en Chile[3], durante el primer año de enseñanza media (estudiantes entre 14 a 15 años de edad), en la unidad de Álgebra se estudian los SEL y sus métodos de resolución. En particular, el objetivo de aprendizaje 4 de dicha unidad declara: resolver sistemas de ecuaciones lineales (2×2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo (MINEDUC, 2016, p. 60).

Los SEL tienen múltiples aplicaciones en ámbitos escolares, universitarios y profesionales. Por ejemplo, podemos destacar el balanceo de ecuaciones químicas mediante SEL y computación (REGALADO; DELGADO; MARTÍNEZ; PERALTA, 2014), el análisis y diferenciación de señales en ingeniería (VÁZQUEZ; ROMO; TRIGUEROS, 2016) o el procesamiento digital de imágenes (JÁCOME; TORRES; ARAUJO, 2016). De hecho, el uso de los SEL en el ámbito profesional ha generado un gran interés para indagarlo en su enseñanza y aprendizaje. Entre otros estudios podemos mencionar algunos que evidencian y describen ciertas dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de este objeto matemático. Por ejemplo, Ochoviet (2009) sostiene que los estudiantes que requieren transitar de la representación gráfica de un SEL a la algebraica presentan mayores dificultades que pasar de la representación algebraica a la gráfica. Esta misma autora explica esta dificultad basándose en la teoría de registros de representación

[3] Los textos curriculares presentados en el artículo corresponden a los del año 2016, no obstante, declaramos que actualmente existe una actualización curricular. A pesar de esta actualización, los SEL aun son enseñados en el primer año de enseñanza media (estudiantes de 14 a 15 años).

semiótica de Duval, particularmente en la no conversión de las diferentes representaciones de los SEL de parte del estudiante.

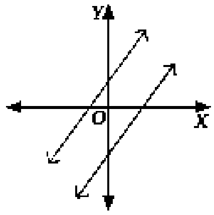
Por otra parte, así como hay autores que se han dedicado a estudiar las problemáticas de enseñanza y aprendizaje asociadas al estudio de los SEL, también existen autores que ofrecen secuencias didácticas y propuestas de clases para abordar la enseñanza de este tema. Por ejemplo, Segura (2004) propone una secuencia didáctica donde las actividades conjugan diferentes registros de representación semiótica. Otra investigación es la propuesta por Figueroa (2013) la cual presenta una secuencia de clases enfocada a estudiantes de cuarto año de enseñanza secundaria bajo la teoría de las situaciones didácticas. Su propuesta se caracteriza por solicitarle a los estudiantes la creación de nuevos problemas asociados a los SEL y que los analicen mediante Geogebra. En el mismo orden de ideas, Bozalla y García (2014) proponen una secuencia didáctica donde comienzan con actividades gráficas de los SEL, hasta llegar a los SEL algebraicos de 2×2.

Con base en lo anterior, se puede apreciar que los SEL han sido objeto de muchos estudios en los últimos años. A pesar de esto, los SEL aun no tienen una prosecución directa en el currículo escolar chileno. Por ejemplo, en los planes diferenciados de matemática para la enseñanza media científico-humanista en III medio nos encontramos con una profundización del lenguaje algebraico, lugares geométricos y programación lineal (MINEDUC, 2011). A su vez, en IV medio se propone el estudio de procesos infinitos, funciones polinomiales y funciones trigonométricas (MINEDUC, 2015). Constatamos con esto que, salvo en programación lineal, ninguno de los otros contenidos propuestos para esta profundización desarrolla los SEL para estudiar nuevos objetos matemáticos. Esta carencia, sumada a la priorización del análisis de funciones en el plan diferenciado matemático de IV medio, dio origen a esta investigación que busca profundizar los conceptos asociados a los SEL.

Distancia entre el saber escolar y erudito de los SEL

Se realizó un análisis de los SEL en textos de estudio, con la finalidad de mostrar algunos elementos que caracterizan el saber sabio y escolar de los SEL, así como también la brecha que hay entre uno y otro. Para el saber sabio (o erudito) se consultaron textos de Álgebra Lineal de Juan De Burgos (1993) y Álgebra Lineal de Kenneth Hoffman (1973). Por otro lado, desde el saber escolar se analizaron los textos ministeriales de I y II medio. A continuación (en el Cuadro 1), se muestra un cuadro comparativo donde se evidencian las distancias que se presentan entre el saber sabio y el saber escolar del objeto matemático SEL.

Cuadro 1 – Diferencia entre el saber sabio y saber escolar de los SEL

Característica	Saber sabio	Saber escolar
Tamaño del sistema	$\begin{matrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m \end{matrix}$ m filas y n columnas	$\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix}\right\}$ 2 filas y 2 columnas
Sistema numérico de los coeficientes	Cuerpo K (reales o complejos)	Racionales (I medio) y reales (II medio)
Conjunto solución	n-tupla $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$	Par ordenado (p, q)
Registros de representación	$AX = Y$ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ and $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. Registro matricial	 Registro gráfico

Fuente: Información recuperada de los textos de Álgebra Lineal de Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973) y De Burgos (1993)

En el Cuadro 2, podemos ver las distancias entre el saber sabio y el saber escolar para algunas características de este objeto matemático, características que denominamos como criterios en dicho cuadro. Los criterios analizados van desde la extensión, o tamaño de los sistemas hasta el análisis del conjunto solución o sus posibles clasificaciones.

Cuadro 2 – Comparación entre textos de Álgebra Lineal y textos escolares

Criterio	Textos de Álgebra Lineal	Textos escolares
Extensión	En Hoffman (1973), se presenta el sistema cuyo número de filas y el número de columnas puede ser igual o distinto	En los textos del saber escolar se considera un caso particular (un sistema de 2×2).
Coeficientes	Los coeficientes se encuentran en un cuerpo K. Sin embargo, en Burgos se particulariza este cuerpo K a los cuerpos de los números reales y los números complejos.	En I medio, se especifica que para el sistema $\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix}\right\}$ los coeficientes a, b, c, d, e y f se encuentran en los números racionales, mientras que en II medio se amplía el sistema al cuerpo de los números reales.
Conjunto solución	El conjunto solución del SEL se presenta como una n-tupla, donde los valores de las incógnitas son los elementos de esta secuencia.	En el texto de I medio los valores de las incógnitas son presentados como los valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones a la

		vez, en cambio en II medio se establece que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 corresponde a un par ordenado (2-tupla) de la forma (p, q), relacionando esta representación con los puntos sobre el plano cartesiano.
Registros de representación	En los libros del saber sabio se usa el registro matricial, donde los elementos del conjunto solución son n-tuplas o matrices.	Los registros de representación en los textos del saber escolar son el gráfico, donde cada ecuación corresponde a una recta en el plano XY y el conjunto solución es representado por los puntos de intersección de las dos rectas que componen el sistema, y el algebraico, por medio de ecuaciones.
Resolución	Se propone trabajar los sistemas utilizando la técnica de eliminación. En su forma matricial, el método de resolución que se propone es el método de Gauss-Jordan usando pivotes y eliminación usando operaciones filas o columnas.	En los textos de educación media se propone revolver los sistemas utilizando los métodos de resolución, a saber, gráfico, sustitución, reducción e igualación.
Clasificación	Se presentan casos particulares de sistemas. Si las ecuaciones están todas igualadas a cero, se menciona que el sistema se denomina homogéneo.	Esta clasificación no se encuentra registrada en alguno de los libros de textos del saber escolar. La única clasificación es la que se hace en función de la cantidad de soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible). Sin embargo, esta clasificación es tratada en III medio.

Fuente: los autores

En síntesis, la distancia entre el saber sabio y el saber escolar radica en el tamaño del SEL asociado y el sistema numérico en el que se trabajan los coeficientes del sistema. Esta diferencia influye en el tipo de representaciones que se utilizan, ya que hasta un sistema de 3×3 su representación gráfica puede ser visualizada en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, los SEL con más variables no tienen una representación gráfica natural y la forma de expresarlos es, en general, como matrices. Entender esta limitación es fundamental, ya que proponer estudiar los SEL a partir de la representación gráfica (más adelante modo sintético-geométrico) solo porque sí, –no tiene sentido– debido a la limitante de la representación visual en 3 dimensiones. La propuesta se fundamenta en desarrollar una mayor comprensión de la aritmética y del álgebra de los SEL a partir de su representación gráfica, o dicho en términos de los modos de pensamiento (PINTO-ROJAS; PARRAGUEZ, 2017), desarrollar una articulación entre los distintos modos de pensar los SEL para profundizar en su comprensión.

Objetivo de investigación

El objetivo de investigación es analizar y mostrar evidencias con sustento teórico de las distintas comprensiones que tienen estudiantes de enseñanza media al estudiar SEL de 3×2, es decir 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Nuestra hipótesis es que no basta con estudiar estos sistemas desde lo algebraico o desde lo geométrico, sino que debe existir una adecuada coordinación entre estos elementos para que el estudiante pueda dar una respuesta satisfactoria a las actividades planteadas. En este sentido, el objetivo general de la investigación se puede desglosar en dos objetivos específicos. Por un lado, es dar evidencias de la necesaria coordinación entre lo algebraico y lo geométrico para desarrollar correctamente las actividades, y en segundo lugar, y en complemento de lo anterior, dar evidencias de la falta de coordinación entre lo algebraico y lo geométrico en los casos que evidencien errores en su resolución.
Para especificar a qué nos referimos con “lo algebraico” y “lo geométrico” en esta investigación, nos remitiremos al marco teórico de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska.

Marco teórico: los modos de pensamiento

La investigación se focaliza desde la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000), los que emergen de un estudio histórico y epistemológico del Álgebra Lineal, en particular con una indagación situada en elementos de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Entre estos elementos se encontraban específicamente los SEL de 2×2 y de 3×3. La investigadora canadiense Anna Sierpinska describe que el desarrollo del Álgebra Lineal (SIERPINSKA, 2000) está marcado por dos hitos matemáticos, el primero fue pasar de una geometría sintética, como la clásica geometría griega, a la geometría analítica, donde cada punto del plano (o de $\mathbb{R}^n$ en general) está completamente identificado por las coordenadas de su n-tupla, lo que permitió conectar la geometría sintética con la analítica. El segundo hito matemático que menciona es el paso de la geometría analítica a una estructura más abstracta o axiomática. Esto se llevó a cabo mediante el estudio de espacios vectoriales, en donde los vectores (o las matrices) ya no son entendidos solamente como una n-tupla de números, sino que son estudiados como elementos que cumplen propiedades y axiomas dentro de un cuerpo definido (SIERPINSKA, 2000). En este desarrollo del Álgebra Lineal, Sierpinska propuso, de forma natural, 3 modos de pensamiento:

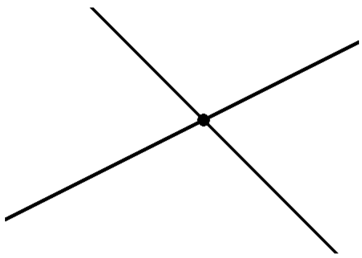
- Modo sintético-geométrico (SG), donde los objetos matemáticos son presentados a través de figuras o conjunto de puntos.
- Modo analítico-aritmético (AA), dónde los objetos matemáticos son presentados a través relaciones numéricas.
- Modo analítico-estructural (AE), donde los objetos matemáticos son presentados a través de determinadas propiedades o un grupo de axiomas.

A pesar de estos diferentes modos de pensamiento y la forma en que se fueron gestando, ninguno de estos es mejor que otro, sino que cada uno tiene propiedades que son más evidentes en uno que en otro contexto, según la actividad matemática presentada, y será más conveniente usar en ella uno u otro modo de pensamiento. En palabras de Dorier y Sierpinska (2001, p. 264),

> …cada uno de estos modos de pensamiento puede presentar dificultades específicas para los estudiantes, lo que sugiere que, con mucho, lo más difícil es que los alumnos los usen en una manera consciente cuando sea apropiado y se muevan con flexibilidad entre ellos…[4].

El Cuadro 3 expone las principales diferencias entre los modos de pensamiento en el estudio de los SEL.

Cuadro 3 – Descripción de cada modo de pensamiento en el estudio de los SEL

Modo de pensamiento	Descripción	Registro usado
Sintético-geométrico-SEL (SG-SEL)	En este modo de pensamiento aun no se habla de ecuaciones. Los objetos analizados son rectas y puntos de intersección en el plano (sin coordenadas, ya que aun no se aritmetiza la geometría en este modo). Más tarde estas rectas serán entendidas como la representación gráfica de una ecuación y el punto de intersección como la solución del sistema.	
Analítico-aritmético-SEL	Los SEL son entendidos como ecuaciones entre variables (o incógnitas) y coeficientes	Los SEL son representados algebraicamente mediante dos (o más) ecuaciones:

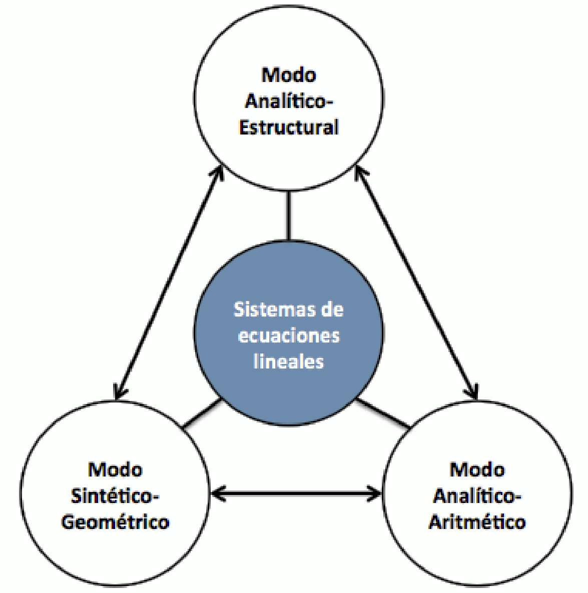
[4] "…each of these modes of thinking can present its specific difficulties for the students, suggesting that by far the hardest thing is for the students to use each of them in a conscious manner where appropriate and move flexibly between them…" (traducción del autor).

(AA-SEL)	numéricos dados. La solución será los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema a la vez. En este modo de pensamiento tienen lugar los clásicos métodos de resolución de los SEL (reducción, sustitución e igualación)	$\left.\begin{matrix} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{matrix}\right\}$ Como, por ejemplo: $\left.\begin{matrix} 2x-3y=-1 \\ 5x+2y=7 \end{matrix}\right\}$ Cuya solución es $x=1, y=1$ ya que $\left.\begin{matrix} 2\cdot(1)-3\cdot(1)=-1 \\ 5\cdot(1)+2\cdot(1)=7 \end{matrix}\right\}$
Analítico-estructural-SEL (AE-SEL)	Los SEL son entendidos como lugar (geométrico) común a un conjunto de rectas cuya construcción se basa en un vector director y un vector posición. En este caso los vectores ya no son analizados en función de sus coordenadas, sino que como objetos abstractos pertenecientes a una estructura mayor (con sus propias propiedades).	Las rectas asociadas al SEL se pueden representar como: $\overrightarrow{r_1}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{p_1}$ $\overrightarrow{r_2}=\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{p_2}$ Un ejemplo de las propiedades de esta nueva estructura es que si los vectores directores son L.I. el SEL siempre tendrá solución. Esto se basa, bajo este modo de pensamiento, en el hecho que si los vectores son L.I. entonces generan una base de $\mathbb{R}^2$, es decir $<\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}> = \mathbb{R}^2$. Por ende, todo vector del plano (en este caso nuestra solución) se podrá expresar como combinación lineal de los vectores generadores del plano.

Fuente: los autores

Un aspecto relevante de la elección de este marco teórico es que responde a la necesaria interacción entre la geometría sintética (modo SG), la geometría analítica (modo AA) hasta llegar estructuras algebraicas más abstractas (modo AE). Por tanto, el objetivo no es llegar a un modo de pensamiento puramente estructural, sino lograr una adecuada y profunda interacción entre los diferentes modos de pensar los SEL, reconociendo el más útil para determinado contexto o problemática a resolver. Un diagrama que ilustra los modos de pensamiento de los SEL no debería ser algo secuencial, sino que interactivo, tal como lo muestra la Figura 1.

Figura 1 – Interacción entre los modos de pensamiento al estudiar los SEL



Fuente: los autores

Esta interacción entre los diferentes modos de pensamiento se hace necesaria ya que cada modo de pensamiento presenta especificidades de suyo propio para los alumnos, por tanto, se hace necesario que ellos reconozcan cuál modo de pensamiento le es más conveniente y útil para resolver y abordar diferentes actividades matemáticas.

Propiciando esta idea de interacción de Sierpinska es que se diseña una Secuencia Didáctica sobre SEL de 3×2, con la finalidad de que los estudiantes puedan articular los modos SG-SEL y AA-SEL, y dar indicios de elementos del modo AE-SEL.

Método

Desde el paradigma cualitativo se ha escogido el estudio de caso (STAKE, 2007) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un contexto global.

La investigación se desarrolló en un grupo de 30 alumnos de 15-16 años de un colegio particular subvencionado del sur de Santiago (Chile). El curso es el III medio electivo matemático, por tanto, todos los alumnos presentan un interés declarado por aprender matemática. A todos esos alumnos se les aplicó una secuencia didáctica que constaba de 5 actividades y tuvo una duración de 90 minutos, la cual fue video grabada para rescatar y analizar las respuestas orales de cada estudiante. Cabe destacar, que antes de aplicar la secuencia, se realizó un análisis anticipatorio (el cual se explicitará en la recogida de datos).

Con base en las respuestas de los alumnos se identificaron dos casos de estudio, por un lado, respuestas a las diferentes actividades de los alumnos que evidenciaron una adecuada interacción en los modos AA-SEL y SG-SEL. El otro grupo de estudio fueron las respuestas de los alumnos que evidenciaron algún tipo de error en las actividades, pero esto último debido a una falta de articulación entre estos modos. No obstante, para la conformación de los dos casos de estudio se han seleccionado las respuestas más representativas de la secuencia didáctica, mostradas por 8 estudiantes, de un conjunto de 30 estudiantes y se han desechado aquellas respuestas en las que no se evidenció indicio de articulación alguna entre los modos de pensar los SEL. Los casos quedaron constituidos como se presenta en el Cuadro 4.

Cuadro 4 – Participantes y casos de estudio

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	Estudiantes de III medio electivo	Enseñanza Media	Se evidencia una adecuada articulación entre los modos SG-SEL y AA-SEL	E1, E2, E4, E5, E7, E8
Caso II	Estudiantes de III medio electivo	Enseñanza Media	Se evidencia la carencia de la articulación de los modos por algún error conceptual en los SEL.	E3, E6,

Fuente: los autores

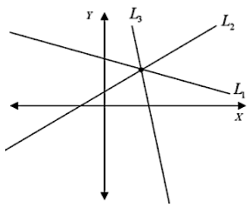
Recogida de datos

El Cuadro 5 describe el análisis anticipatorio de las cinco actividades de la Secuencia Didáctica, utilizada como instrumento para la recogida de datos.

Cuadro 5 – Secuencia Didáctica y su relación con los modos de pensamiento

Actividad Matemática	Posibles respuestas o estrategias de los estudiantes	Relación con el marco teórico o con el diseño metodológico
Actividad 1: ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2, es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?	Posibles respuestas: El sistema representará lo que determine su conjunto solución. El sistema representa dos rectas en el plano. La representación gráfica dependerá de cómo sean las ecuaciones del sistema. Estrategias: Los estudiantes crean un sistema de ecuaciones lineales y asignan valores a las constantes m y n de cada ecuación de la forma $y = mx + n$ y grafican en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores".	La actividad busca relacionar el modo AA-SEL con el modo SG-SEL de los SEL de 2×2.

	Infieren de la actividad 1. Una ecuación lineal se representa gráficamente a través de una recta, entonces dos ecuaciones se representarán como dos rectas.	
Actividad 2: Representa gráficamente de todas las formas posibles dos rectas en el plano cartesiano. Describe el conjunto solución de los sistemas graficados y asócialo a una representación geométrica, según la posición de las rectas.	Posibles respuestas: Graficar las tres formas posibles (rectas coincidentes, paralelas y secantes) Considerar solo las formas 1 y 3, pues en estas aparecen las dos rectas visibles. Estrategias: Trazar distintas rectas (de a pares) en el plano al azar. Trazar las rectas considerando sus posiciones relativas: paralelas o secantes. Describir una solución particular para cada una de las formas. Mencionar la cantidad de soluciones que tiene cada forma. El sistema de la forma 3 tiene solución vacía. Estrategias: Analizar los puntos comunes de ambas rectas como objetos geométricos (puntos, rectas, segmentos, líneas, etc.)	En esta actividad queda de lado el modo AA-SEL y se enfoca completamente a desarrollar el modo SG-SEL de los SEL de 2×2 Relacionan las representaciones de los SEL de 2×2 (modo SG-SEL) con el conjunto solución, ya sea en términos de cantidad de las soluciones (0, 1 o infinitas) o en términos geométricos (un punto al tener rectas secantes, infinitos puntos al tener rectas coincidentes, o el conjunto vacío al tener rectas paralelas)
Actividad 3: Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 2.	Posibles respuestas: Los sistemas de ecuaciones de 2 x 2 que representan los casos de la actividad 2. Los sistemas pueden estar representados de las siguientes formas: 1) $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ 2) $Ax + By = C$ $Dx + Ey = F$ 3) $y = Ax + B$ $y = Dx + F$ Estrategias: Escribir un sistema en particular y encontrar el conjunto solución y asignar ese sistema a una de las formas posibles. Escribir una solución e idear un sistema donde tal solución satisfaga las dos ecuaciones. Es muy probable que algunos estudiantes no usen la forma general de la ecuación de la recta ($Ax + By = C$) y usen por comodidad la ecuación particular de la recta ($y = mx + n$) Graficar las rectas y de ahí sacar las ecuaciones que representan esas rectas.	Relacionan el modo SG-SEL de los SEL de 2×2 con el modo AA-SEL. Esto es diferente al análsis usual, donde se relacionan estos dos modos de pensamiento, pero a partir del AA-SEL se llega al SG-SEL. En este caso, la actividad busca esta relación, pero en el sentido contrario, es decir, desde el modo SG-SEL llegar al modo AA-SEL.

	Usar la ecuación particular de la recta modificando los valores de m y n para cada ecuación lineal de cada caso. Ensayo y error.	
Actividad 4: Representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 3×2, es decir, tres ecuaciones y dos incógnitas.	Posibles respuestas: Dibujar tres rectas que se interceptan en un punto. Dibujar dos rectas secantes y la tercera coincidente a cualquier de las otras dos. Dibujar tres rectas secantes sin un punto de intersección en común Dibujar tres paralelas no coincidentes. Dibujar dos rectas coincidentes y una transversal a estas. Estrategias: Dibujar tres rectas cualesquiera en el plano.	Analizan desde el modo SG-SEL de 3×2, es decir, como se pueden posicionar tres rectas en el plano.
Actividad 5: En la figura, el punto de intersección satisface a cada una de las ecuaciones del sistema,  ¿Qué ocurre en cada una de las distintas formas de graficar 3 rectas en el Plano?	Posibles respuestas: Describir cada sistema según la cantidad de intersecciones que presenten las rectas. Describir cada sistema según la posición relativa de las rectas. Mencionar que solamente en la forma 7 el conjunto solución es único y no vacío. Mencionar que en la forma 6 el sistema tiene infinitas soluciones. Estrategias: Categorizar los sistemas según la cantidad de soluciones que presente el sistema.	Analizan los puntos de intersección en las representaciones gráficas (modo SG-SEL) y deciden cuando estos puntos son soluciones o no del SEL asociado. La actividad busca que los estudiantes analicen que significa ser solución de un SEL a partir tanto de su representación geométrica (modo SG-SEL) como también desde su representación algebraica (modo AA-SEL).

Fuente: los autores

Las cinco actividades diseñadas tienen como finalidad mostrar los argumentos observables que permiten a los estudiantes ir articulando los modos propuestos –SG-SEL y AA-SEL– y con ellos proyectar en Modo AE-SEL para dar respuestas a las actividades que se les plantean.

Evidencias

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudio, es que hemos seleccionado algunos episodios de los argumentos observables donde ellos (a) utilizan estrategias mostradas en el Cuadro 5, (b) utilizan una adecuada articulación entre el modo AA-SEL y el SG-SEL, (c) evidencian indicios de elementos del modo AE-SEL.

Los modos de pensamiento que evidenciaron los estudiantes para explicar el conjunto solución de un SEL, podemos representarlo en el Cuadro 6, la cual muestra los resultados de las actividades 2 y 5. Consideramos pertinente el análisis de estas actividades porque en ellas se le solicita al estudiante que explique el conjunto solución del SEL asociado, y dependiendo del modo en que ellos presentan el conjunto solución se podrá clasificar en el modo AA-SEL y/o SG-SEL.

Cuadro 6 – Modos de pensar SEL evidenciados en las actividades 2 y 5

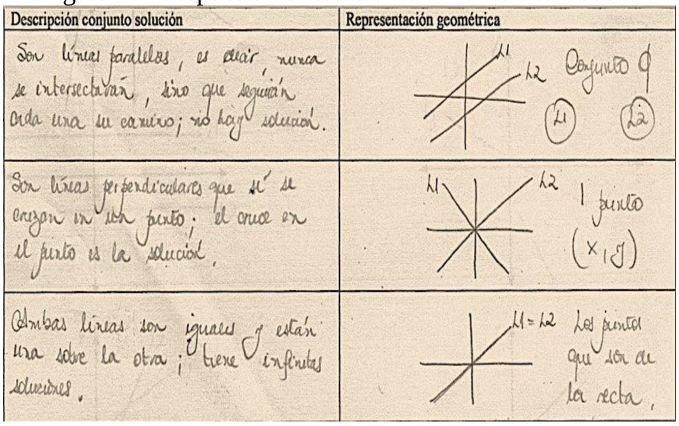
	Actividad 2	Actividad 5
Modo SG -SEL	15	23
Modo AA-SEL	3	0
Modo AA-SEL y SG -SEL	6	1
No responde	6	6

Fuente: los autores

La evidente inclinación por el modo SG-SEL se debe fundamentalmente a los enunciados de las actividades analizadas, ya que ellas pretendían desarrollar la reflexión de los SEL a partir del modo SG-SEL. No obstante, veremos más adelante que algunos alumnos seguían pensando en un modo AA-SEL a pesar de que la pregunta estuviera inclinada hacia el modo SG-SEL. Por otro lado, también veremos que esta inclinación por el modo SG-SEL no basta para responder adecuadamente las diferentes actividades que proponía el instrumento. Mostraremos algunos ejemplos de episodios donde se evidencia el modo SG-SEL para responder las actividades 2 y 5.

Las respuestas de los estudiantes E1 (Figura 2) y E2 (Figura 3) se basan en conceptos geométricos, como por ejemplo rectas, puntos, paralelismo o intersección. Un aspecto interesante a destacar es la aclaración que añade el estudiante E2 a su respuesta en el caso que las rectas sean coincidentes: *"Tiene infinitas soluciones. (Todos los puntos que construyen la recta)"*. En este caso podemos evidenciar que el estudiante no solo entrega la cantidad de soluciones, sino que también identifica cuáles son ellas, lo que muestra una comprensión más profunda de los SEL al alero del modo SG-SEL.

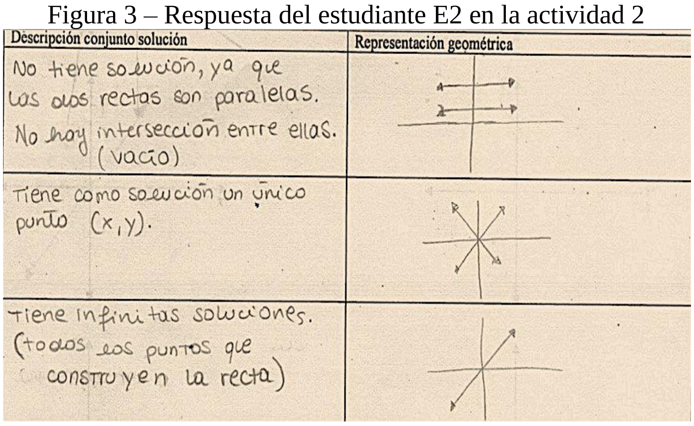
Figura 2 – Respuesta del estudiante E1 en la actividad 2



Descripción conjunto solución	Representación geométrica
Son líneas paralelas, es decir, nunca se intersectarán, sino que seguirán cada una su camino; no hay solución.	L1 L2 Conjunto ∅ L1 L2
Son líneas perpendiculares que sí se cruzan en un punto; el cruce en el punto es la solución.	L1 L2 1 punto (x,y)
Ambas líneas son iguales y están una sobre la otra; tiene infinitas soluciones.	L1=L2 Los puntos que son de la recta.

Fuente: registro escrito del estudiante E1

Figura 3 – Respuesta del estudiante E2 en la actividad 2

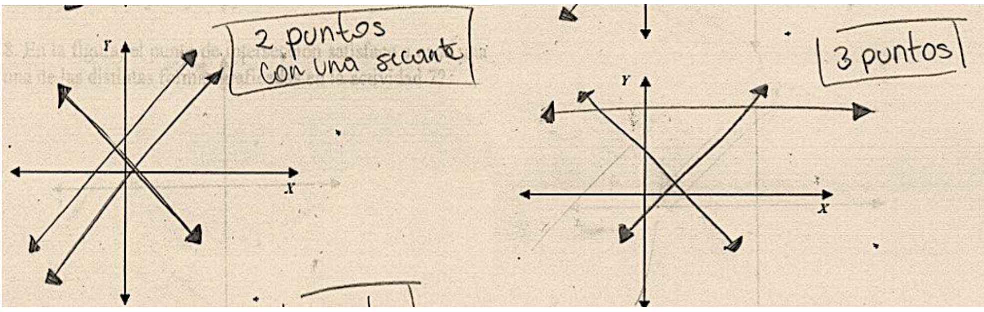


Descripción conjunto solución	Representación geométrica
No tiene solución, ya que las dos rectas son paralelas. No hay intersección entre ellas. (vacío)	
Tiene como solución un único punto (x,y).	
Tiene infinitas soluciones. (todos los puntos que construyen la recta)	

Fuente: registro escrito del estudiante E2

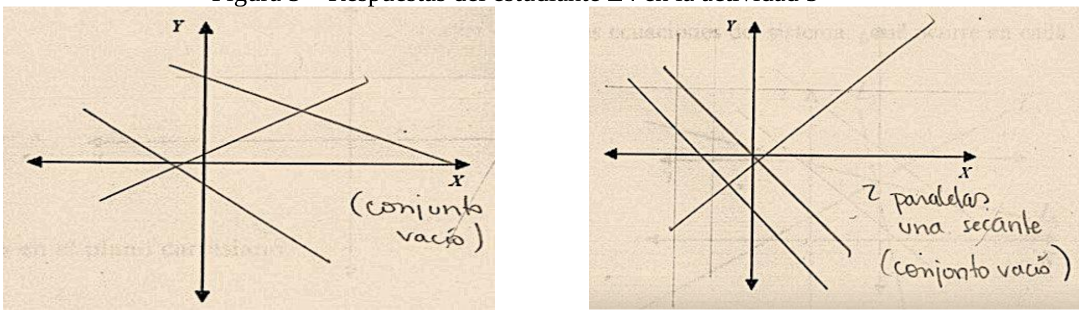
Por otro lado, los estudiantes E3 (Figura 4) y E4 (Figura 5) también basan sus respuestas de la actividad 5 en conceptos geométricos. No obstante, el manejo geométrico para con la situación planteada no aseguraba una respuesta adecuada. Esto último se evidencia en la respuesta del estudiante E3 donde concluye que algunos gráficos de 2 o más rectas tienen 2 o 3 puntos de solución, –error previsto en el análisis a priori de la Secuencia Didáctica–. En contraposición a esto, el estudiante E4 también evidencia un manejo geométrico de la actividad 5, pero llegando a conclusiones adecuadas. Esto nos permite percibir que el estudiante debe mostrar un conocimiento adicional al geométrico de la situación planteada, el cual coadyuva a argumentar correctamente la actividad 5. Este conocimiento adicional se evidencia de mejor manera en las respuestas que proporciona el estudiante E4, a las actividades de la Secuencia, donde responde situándose para algunas de ellas del modo SG-SEL hacia el modo AA-SEL y en otras del modo AA-SEL al modo SG-SEL.

Figura 4 – Respuesta del estudiante E3 en la actividad 5



Fuente: registro escrito del estudiante E3

Figura 5 – Respuestas del estudiante E4 en la actividad 5



Fuente: registro escrito del estudiante E4

Por otro lado, para dar respuestas a las actividades 1, 2, 3 y 5 debe existir una articulación entre más de un modo de pensamiento de los SEL para ser respondidas adecuadamente. El panorama global de las respuestas de los estudiantes lo observamos en el Cuadro 7.

Cuadro 7 – Modos de pensamiento evidenciados en las actividades 1, 2, 3 y 5

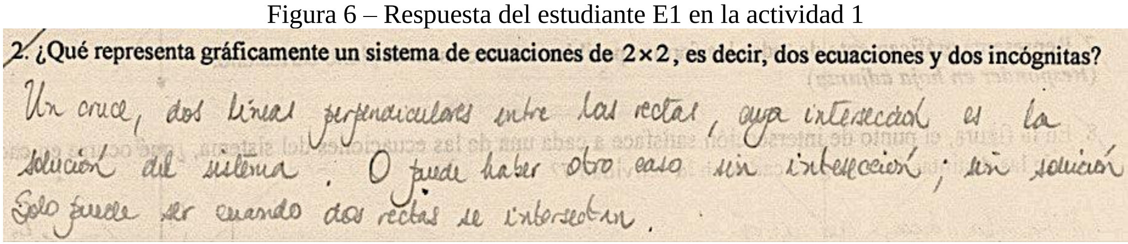
	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 5
Modo SG-SEL	19	15	0	23
Modo AA-SEL	6	3	20	0
Modo AA-SEL y SG-SEL	0	6	4	1
No responde	5	6	6	6

Fuente: los autores

Como se puede apreciar el Cuadro 7, en la actividad 3 el modo más recurrido por los alumnos es el modo AA-SEL. Esto se debe en parte al objetivo de la actividad, ya que esta le solicitaba construir las ecuaciones de un SEL para cada uno de los gráficos de la actividad previa. Por otro lado, en la actividad 1 la prioridad por el modo SG-SEL también se debe al sentido de la actividad. En esta se les preguntaba a los alumnos qué representaba gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2. Claramente la actividad estaba enfocada en desarrollar el análisis gráfico por sobre el algebraico, no obstante, hubo alumnos que de igual manera lo justificaron bajo el modo AA-SEL. Mostraremos algunos episodios de las producciones de los alumnos que evidencian estos modos de pensamiento para los SEL.

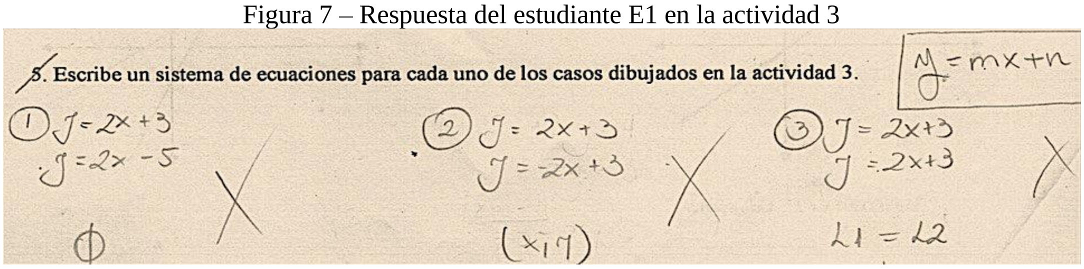
Consideramos relevante destacar nuevamente las respuestas del estudiante E1 en la actividad 1 (Figura 6). Por un lado, en esta actividad se desarrolla un claro manejo de los conceptos gráficos asociados a un SEL de 2×2. No obstante, en la actividad 3 (Figura 7) queda en evidencia que, a pesar de que esta actividad buscaba desarrollar el análisis AA-SEL, existe un recurso geométrico empleado por el estudiante E1 para responder correctamente a la situación planteada. Este recurso es la ecuación particular de la recta y el manejo de la pendiente y el coeficiente de posición. Estos conceptos pueden ser analizados como valores numéricos en las relaciones aritméticas entre las variables, pero no cabe duda que tiene una fuerte influencia geométrica en su análisis, tal como lo muestra la respuesta del estudiante E1 en la actividad 3.

Figura 6 – Respuesta del estudiante E1 en la actividad 1



Fuente: registro escrito del estudiante E1

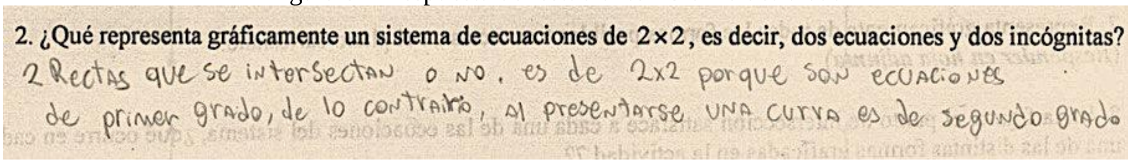
Figura 7 – Respuesta del estudiante E1 en la actividad 3



Fuente: registro escrito del estudiante E1

Esta estrategia empleada por el estudiante E1, fue descrita en el análisis a priori de la Secuencia y se pudo constatar su uso en los argumentos observables de E1 en la actividad 3. Por otro lado, a pesar de que la actividad 1 se enfocaba en desarrollar un análisis geométrico de la situación, hubo alumnos que la respondieron desde el modo AA-SEL. Un ejemplo de esto lo muestra la respuesta del estudiante E5, donde relaciona la forma de la gráfica con el grado de la ecuación (Figura 8). Concretamente expone que *"2 rectas que se intersectan o no, es de 2×2 porque son ecuaciones de primer grado, de lo contrario, al presentarse una curva es de segundo grado".* Esto muestra la relación que hace el alumno entre la forma de la gráfica con los valores numéricos que definen su ecuación algebraica, lo que muestra indicios de un AE-SEL.

Figura 8 – Respuesta del estudiante E5 en la actividad 1

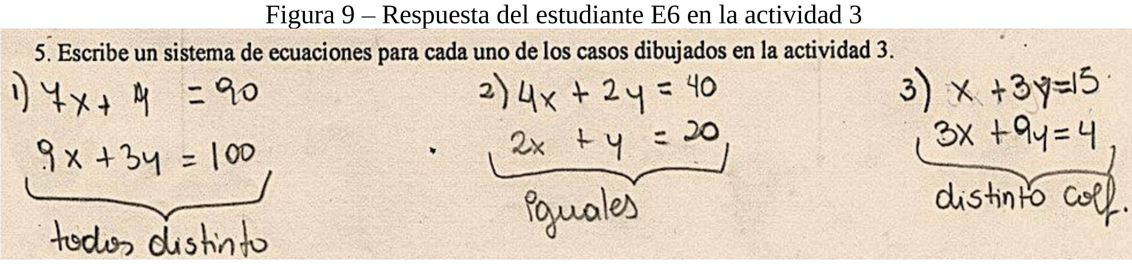

2. ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2, es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?

2 Rectas que se intersectan o no. es de 2x2 porque son ecuaciones de primer grado, de lo contrario, al presentarse una curva es de segundo grado

Fuente: registro escrito del estudiante E5

Por otro lado, se pudo evidenciar otro error previsto en el análisis a priori de la Secuencia. El alumno E6 sostiene que, “*si los coeficientes numéricos de un SEL son distintos, el SEL tendrá solución única”* (Figura 9). Esto no es correcto, ya que, por ejemplo, si tomamos la ecuación $x + 2y = 3$ y la amplificamos por 4 obtenemos $4x + 8y = 12$. Si hacemos el SEL entre estas dos ecuaciones, al ser las dos ecuaciones equivalentes, el conjunto solución, analizado gráficamente, será aquel formado por todos los puntos pertenecientes a la recta, lo cual es un conjunto infinito. No obstante, se cumple que los coeficientes numéricos son todos diferentes. Por lo tanto, la respuesta del estudiante E6 muestra una dificultad al transitar desde el modo SG-SEL al modo AA-SEL.

Figura 9 – Respuesta del estudiante E6 en la actividad 3


5. Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.

1) $4x + y = 90$
$9x + 3y = 100$
todos distinto

2) $4x + 2y = 40$
$2x + y = 20$
iguales

3) $x + 3y = 15$
$3x + 9y = 4$
distinto coef.

Fuente: registro escrito del estudiante E6

Si analizamos las respuestas de los estudiantes en las actividades 3 y 5 resulta algo de mucho interés. Los resultados de este análisis comparativo se presentan en el Cuadro 8.

Cuadro 8 – Comparación entre las respuestas de las actividades 3 y 5

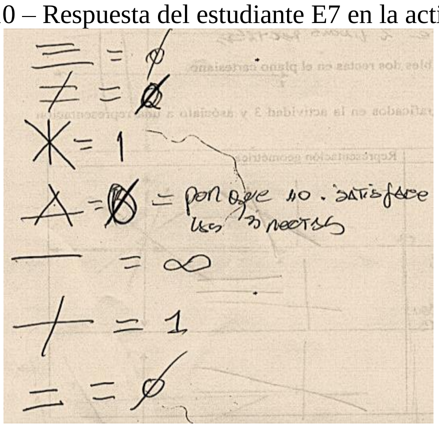
		Respuestas Actividad 5		
		Incorrectas	Correctas	No responde
Respuestas Actividad 3	Incorrectas	5	0	1
	Correctas	10	5	3
	No responde	0	0	1

Fuente: los autores

Como se puede apreciar el Cuadro 8, hay una estrecha relación entre las actividades 3 y 5, lo cual se puede interpretar de la siguiente manera: *Todos los alumnos que respondieron incorrectamente la actividad 3, respondieron incorrectamente la actividad 5 o no la respondieron*. Por otro lado, todos los alumnos que respondieron correctamente la actividad 5, respondieron correctamente la actividad 3. La característica fundamental entre la actividad 3 y la actividad 5 es que la primera le solicita al estudiante construir su análisis a partir del modo SG-SEL, pero debe llegar al modo AA-SEL. Por otro lado, en la actividad 5 se le solicita al alumno explicar el conjunto solución de los diferentes casos en que se grafican 3 rectas en el plano. Para responder correctamente esta última actividad se hacía necesario una relación entre el modo SG-SEL y el modo AA-SEL.

La respuesta del estudiante E7 (Figura 10) muestra una alusión a la interacción entre el modo SG-SEL y el modo AA-SEL. Esto lo podemos sustentar basándonos en la respuesta que entrega E7 para el caso de 3 rectas, todas ellas con diferente pendiente entre si y no confluyentes a un punto común.

Figura 10 – Respuesta del estudiante E7 en la actividad 5

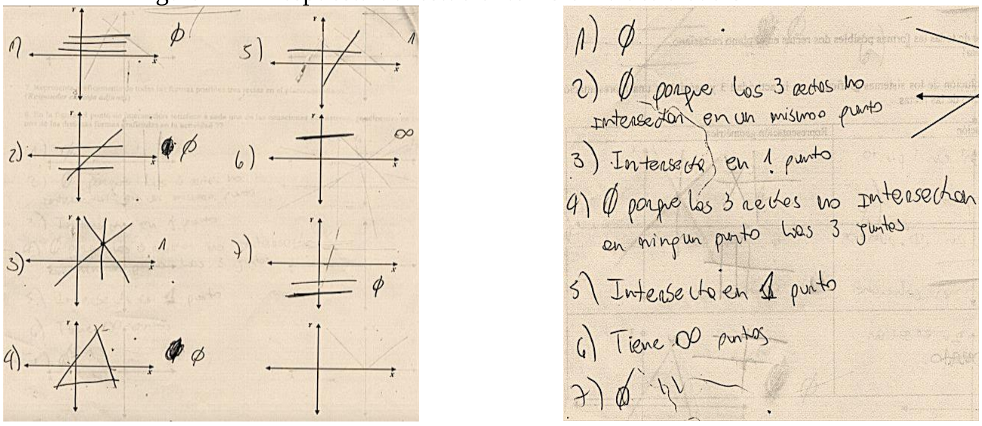


Fuente: registro escrito del estudiante E7

La justificación del alumno E7 es que la solución es vacía *"porque no satisface las 3 rectas".* Como investigadores podemos intuir que se está refiriendo a las ecuaciones. No obstante, se hace necesaria mayor evidencia para afirmar esto. Una consideración a futuro podría ser el uso de una entrevista personal, que permita indagar en mayor profundidad las conexiones entre estos modos de pensamiento de los SEL.

Del mismo modo, el alumno E8 pudo responder correctamente la actividad 5. No obstante, ni el registro de su Secuencia, ni la videograbación permiten asegurar que el estudiante E8 desarrolló una conexión entre dos modos de pensamiento de los SEL (Figura 11). Su respuesta escrita se limita al modo SG-SEL. Lo que dice explícitamente es que la solución es vacía "*porque las 3 rectas no intersectan en ningún punto las 3 juntas*". Esto solo da evidencias de elementos geométricos en su análisis. Para poder afirmar con mayor seguridad si el estudiante E8 hizo conexiones entre un modo de pensamiento de los SEL y otros, se precisa de una entrevista semiestructurada donde se evidencie en mayor profundidad estas posibles conexiones.

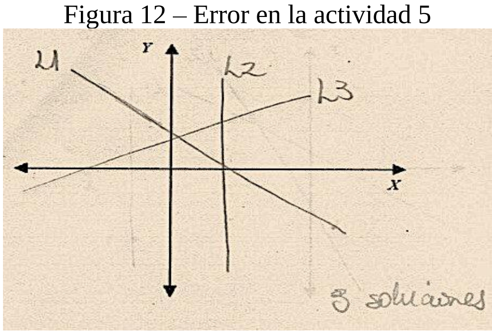
Figura 11 – Respuesta del estudiante E8 en la actividad 5



Fuente: registro escrito del estudiante E8

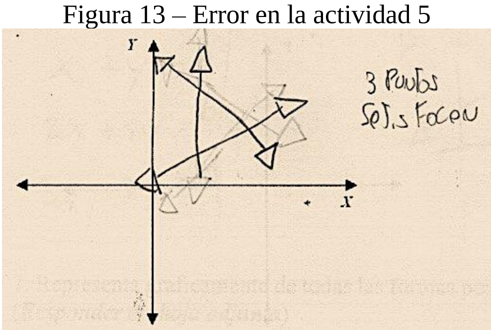
A pesar de estas respuestas adecuadas a la actividad 5, hubo muchos alumnos que cometieron el error previsto en el análisis a priori, este era considerar que, si tenemos un SEL con 3 ecuaciones y dos incógnitas, puede existir un caso en el que este sistema tenga 2 o 3 soluciones, como se muestra en la Figuras, 12, 13, 14 y 15.

Figura 12 – Error en la actividad 5



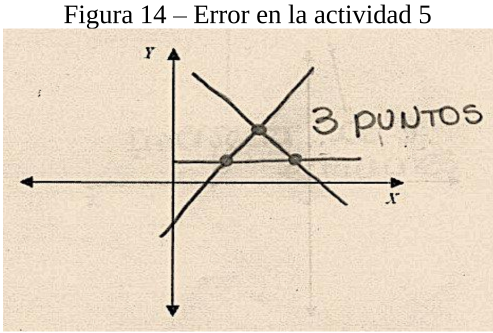
Fuente: registro escrito de un estudiante

Figura 13 – Error en la actividad 5



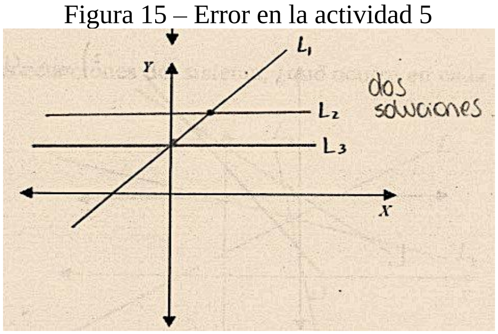
Fuente: registro escrito de un estudiante

Figura 14 – Error en la actividad 5



Fuente: registro escrito de un estudiante

Figura 15 – Error en la actividad 5



Fuente: registro escrito de un estudiante

Con base en las producciones de los alumnos y del Cuadro 8 podemos afirmar que responder adecuadamente a la actividad 3 es una condición necesaria (pero no suficiente) para responder correctamente a la actividad 5. Si relacionamos este hecho con los modos de pensamiento de los SEL podemos concluir que es necesario que el estudiante desarrolle adecuadamente una conexión entre el modo SG-SEL y AA-SEL para responder correctamente la actividad 5. Esta conexión debe desarrollarse en ambos sentidos, es decir, desde el modo AA-SEL hacia el modo SG-SEL, pero también desde el modo SG-SEL hacia el modo AA-SEL. Esto último se puede sustentar en el hecho que en la actividad 1, donde debían analizar la actividad desde el modo AA-SEL hacia el modo SG-SEL, la mayoría de los alumnos lograron una respuesta convincente. No obstante, no todos lograron desarrollar correctamente la actividad 3, donde debían analizar la actividad desde el modo SG-SEL hacia el modo AA-SEL. Y como se pudo apreciar en el Cuadro 8, responder correctamente la actividad 3 se convirtió en una condición necesaria (pero no suficiente) para responder correctamente la actividad 5.

Conclusiones y proyecciones

En atención a las respuestas de los alumnos a las actividades de la secuencia, se puede señalar que los estudiantes se posicionan y muestran elementos que describen con más detalle, los modos AA-SEL y SG-SEL para el concepto SEL. No hubo indicios de elementos del modo AE. Esto se puede deber a la prioridad geométrica de las actividades propuestas. Sin embargo, también puede ser un signo de la carencia del análisis o reflexión de este modo de pensamiento en los alumnos. Por tanto, es sugerente crear una nueva secuencia didáctica que propicie la exploración de estos elementos estructurales.

Por otro lado, el análisis de las respuestas de los alumnos en cada actividad del instrumento nos permite concluir que más allá de las propias características de cada actividad, es el conjunto de estas actividades la que va construyendo estas conexiones entre los diferentes modos de pensamiento de los SEL. Por tanto, más allá de caracterizar una actividad en particular debemos caracterizar el conjunto de actividades donde cada una de ellas favorezca la conexión desde un modo de pensamiento hacia otro. Esto es lo relevante para construir conexiones entre los diferentes modos de pensamiento de los SEL. Con base en el análisis de los errores de las actividades 3 y 5 fue posible constatar que los alumnos que no desarrollaron correctamente una conexión desde el modo SG-SEL hacia el modo AA en un SEL de 2×2 (actividad 3) no pudieron responder correctamente cuál es el conjunto solución de un SEL de 3×2 de forma gráfica (actividad 5). Del mismo modo, todos los estudiantes que respondieron correctamente la actividad 5, respondieron correctamente la actividad 3. No obstante lo anterior, la mayoría de ellos respondieron correctamente las primeras actividades donde se les solicitaba relacionar una ecuación lineal de dos variables o un SEL de 2×2 desde el modo AA-SEL hacia el modo SG-SEL. Este contraste, nos permite concluir que la conexión entre los modos de pensamiento de los SEL involucrados tiene una dirección. Con esto nos referimos a que, por ejemplo, un alumno puede evidenciar una correcta relación desde el modo AA-SEL hacia el modo SG-SEL, pero no a la inversa.

Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de los Modos de Pensamiento permite interpretar la comprensión de los SEL y hacer evidentes las dificultades de los alumnos y sus estrategias en este tópico de la matemática.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada parcialmente por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468.

Referencias

BOZALLA, A.; GARCÍA, S. Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2. En P. Lestón (Ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa** (pp. 1031-1039). Distrito Federal, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2014.

DE BURGOS ROMÁN, J. **Álgebra Lineal.** España: McGraw-Hill Interamericana de España, 1993.

DORIER, J. L.; SIERPINSKA, A. Research into the teaching and learning of linear algebra. **New ICMI Studies Series**, n. 7, p. 255-274, dic. 2001.

FIGUEROA, R. **Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas** (Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática) - Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2013.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R.; FINSTERBUSCH, H. E. **Álgebra Lineal**. Ciudad de México, México: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.

JÁCOME, M.; TORRES, C.; ARAUJO, C. Enseñanza del procesamiento digital de imágenes a través de objetos virtuales de aprendizaje en entornos e-learning. **Revista colombiana de tecnologías de avanzada**, Santander, Colombia, v. 2, n. 28, p. 72-76. 2016.

MINEDUC. **Ajuste curriculares.** Santiago, Chile: Ministerio de Educación, 2011.

MINEDUC. **Bases Curriculares**. Santiago, Chile: Ministerio de Educación, 2015.

MINEDUC. **Programa de estudio Matemática Primer año medio**. Santiago, Chile: Ministerio de Educación, 2016.

OCHOVIET, C. **Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** Tesis (Doctorado en Matemática Educativa). CICATA-IPN, Ciudad de México, México, 2009.

PINTO-ROJAS, I.; PARRAGUEZ, M. Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. **IEJME—Mathematics Education**, v. 12, n. 10, p. 873-898, nov, 2017.

REGALADO, A.; DELGADO, F.; MARTÍNEZ, R.; PERALTA, E. Balanceo de Ecuaciones Químicas Integrando las Asignaturas de Química General, Algebra Lineal y Computación: Un Enfoque de Aprendizaje Activo. **Formación universitaria**, La serena, Chile, v. 7, n. 2, p. 29-40. 2014.

SEGURA, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México D.F., v. 7 n. 1, p. 49-78, mar. 2004.

SIERPINSKA, A. On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), **On the Teaching of Linear Algebra** (pp. 209-246). Dordrecht, Netherlands: Springer, 2000.

STAKE, R. Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata, 2007.

VÁZQUEZ, R.; ROMO, A.; ROMO-VÁZQUEZ, R.; TRIGUEROS, M. La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. **Educación matemática**, México D.F., v. 28, n. 2, p. 31-57, ago. 2016.

Texto recebido: 30/07/2019
Texto aprovado: 11/12/2019