ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p369-397

Conhecimento do professor sobre dificuldades de aprendizagem no tópico adição de expressões algébricas no Ensino Médio

Teachers' knowledge on students learning difficulties in the topic of addition of algebraic expressions in upper secondary

---

LETICIA SOSA GUERRERO[1]

MARLENE VIANNEY GUZMÁN CASTRO[2]

MIGUEL RIBEIRO[3]

Resumo

El objetivo de esta investigación es caracterizar el conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua, sobre dificultades de aprendizaje de los alumnos inherentes al contenido matemático de suma de expresiones algebraicas. Ese conocimiento se analiza al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora en el tema de adición de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria, utilizando el modelo Mathematical Teacher Specialised Knowledge como herramienta teórica y analítica. La investigación consiste de un estudio de caso instrumental a partir de la observación no participante y los resultados muestran el conocimiento de las profesoras sobre las dificultades de aprendizaje de los alumnos en el tema de adición de expresiones algebraicas, dando tratamiento desde la planificación.

Palavras-chave: *conocimiento del profesor de matemáticas, dificultades de aprendizaje, expresiones algebraicas.*

Abstract

This research aims at characterize the knowledge of two mathematics teachers participating in a professional development context, on the students learning difficulties inherent to the addition of algebraic expressions. Such knowledge is analysed when put in action to plan, execute and make suggestions for improvement of their practice in the topic of adding algebraic expressions in upper secondary and for such analysis the Mathematical Teachers Specialised Knowledge is assumed as a theoretical and analytical tool. An instrumental case study with a non-participant observation has been carried and the results pinpoint the teachers knowledge about the students learning difficulties of and for adding algebraic expressions, taking that into consideration since planning.

Keywords: *mathematical teacher knowledge, learning difficulties, algebraic expressions.*

[1]Doctora en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, México, Lsosa19@hotmail.com.mx
[2]Maestra en Matemática Educativa, Secretaría de Educación del Estado de Zacatecas, México, marlene.gu@hotmail.com
[3]Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Brasil, cmribas78@gmail.com

Introducción

En México, la Secretaría de Educación Pública reconoce que la equidad en la Educación Básica instituye uno de los componentes irrenunciables de la calidad educativa por lo que toma en cuenta la diversidad que en las escuelas se manifiesta en la variedad lingüística, social, cultural, de capacidades, de ritmos y estilos de aprendizaje. Para mejorar esta calidad parte de una visión que incluye centrar la atención en los procesos de aprendizaje de los estudiantes y reconocer la planificación como un elemento sustantivo de la práctica docente para potenciarlo, este último con un requisito, que el profesor conozca qué se espera que aprendan los alumnos y cómo aprenden (SEP, 2011). Considerando la diversidad cultural en Brasil, el mismo tipo de reconocimiento podría ocurrir, por lo que esa centralidad de conocer lo que los alumnos deben aprender, y sus más grandes dificultades deberá ser, también por acá, central en la elaboración de planes de clases y su posterior implementación. Entendemos que, frente a esta expectativa, el conocimiento del profesor es un factor clave, que subyace a la comprensión flexible y polifacética que le permite dar forma a la instrucción que recibe el alumno, representando una oportunidad equitativa y adecuada para aprender (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; SHULMAN, 1987), incidiendo directamente, en las matemáticas que está aprendiendo el alumno y en cómo las aprende (KERSTING et al.,2012).

Sin embargo, se detecta que, aunque es conocido el impacto que tiene el conocimiento del profesor de matemáticas en el aprendizaje de los alumnos (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2016), la atención que se le ha dado a su investigación ha sido desigual, después de esfuerzos realizados, su naturaleza sigue siendo malentendida y los marcos teóricos que lo abordan, subdesarrollados (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Este conocimiento del profesor que le permite anticipar las dificultades de los alumnos en cada uno de los tópicos matemáticos, y considerarlas en el desarrollo de la práctica matemática, forma parte de las especificidades del conocimiento de profesor. Estas especificidades son integradas tanto en la dimensión del conocimiento matemático como en el conocimiento didáctico del contenido (matemáticas).

Dado lo anterior, se dirige la aportación de la investigación a avanzar en la comprensión del Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas, el cual reconocemos como una categoría que identifica los cuerpos distintivos para la enseñanza, por la que el profesor "*llega a una comprensión de cómo determinados tópicos,* *problemas o issues se organizan, se representan y se adaptan a diversos intereses y capacidades de los alumnos*" (SHULMAN, 1987, p. 8) aportando los elementos de análisis adecuados para planificar y realizar el trabajo profesional (SOCAS; CAMACHO; HERNÁNDEZ, 1998). Específicamente, por la forma de contribuir también para la mejora de la formacion y de la práctica matemática del profesor y los aprendizajes de los alumnos, nos interesa caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas sobre dificultades de aprendizaje, en primer momento identificando qué de éste pone en acción en tres escenarios: la planificación, la ejecución y la propuesta de mejora (planificación actualizada, producto de la reflexión sobre el contraste entre ésta y su puesta en escena) y en segundo momento comprendiendo sus diferencias y similitudes. Considerando que el conocimiento del profesor es especializado, se asume la conceptualización del Mathematics Teachers Specialised Knowledge – MTSK (CARRILLO et al., 2018) y así nos enfocamos en particular en algunas de las dimensiones del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. Consideramos en particular el tópico adición de expresiones algebraicas (que en México es parte del currículo de segundo grado de educación secundaria y en Brasil en Enseñanza Media), debido a las dificultades que presentan los alumnos al transitar de la Aritmética al Álgebra (RUANO; SOCAS; PALAREA, 2008; PALAREA, 1999; KIERAN, 2006; KIERAN; FILLOY, 1989; SOCAS et al.,1998), y las cuales siguen presentándose aún en niveles superiores (SOCAS et al.,1998; KIERAN; FILLOY, 1989).

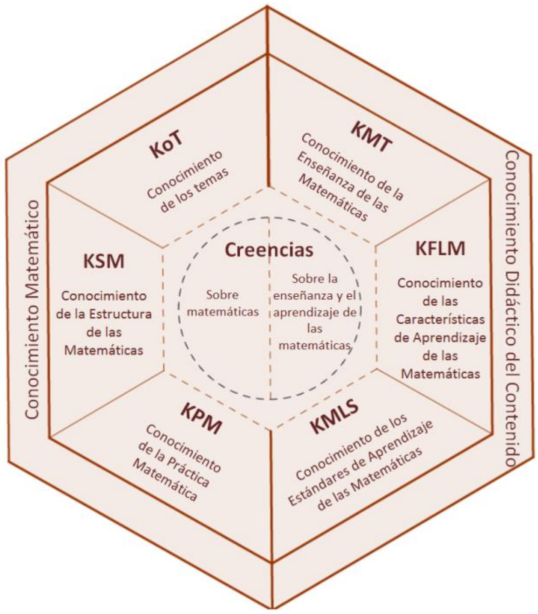
El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge, MTSK)

El MTSK (Figura 1), es un modelo teórico que permite estudiar de forma analítica a través de sus categorías el conocimiento del profesor de matemáticas. Éste, considera las fortalezas provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (SHULMAN, 1987; BALL et al., 2008; ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005), y entre sus potencialidades distingue el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas.

En la Figura 1 se observa la división que caracteriza al modelo. La partición principal distingue dos dominios de conocimiento, por un lado, el Conocimiento Matemático análogo al SMK propuesto por Shulman (1986), bajo una visión especializada del conocimiento del profesor de matemáticas y por el otro, en el mismo sentido el

Conocimiento Didáctico del Contenido. El círculo concéntrico con una línea punteada rescata las creencias, haciendo alusión al sesgo entre la teoría y la práctica, que permite al profesor adaptar metodologías que, bajo sus creencias sobre el aprendizaje, la enseñanza y las matemáticas, considere deseables (FLORES-MEDRANO; ESCUDERO; MONTES; AGUILAR, 2014).

Figura 1. Mathematical Teacher Specialised Knowledge- MTSK



Fuente: Carrillo et al., 2018, p. 241

El dominio del conocimiento matemático, se integra de tres subdominios: el conocimiento de los temas (conocimiento fenomenológico y aplicaciones del concepto matemático a enseñar, su definición, propiedades y fundamentos, los registros de representación y procedimientos), conocimiento de la estructura matemática (conocimiento de conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares) y el conocimiento de la práctica matemática (conocimiento del profesor en cuanto a cómo se produce y se hace matemáticas) (CARRILLO et al., 2018).

En cuanto al Conocimiento Didáctico del Contenido, este se conforma por tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (el conocimiento de teorías de enseñanza, los recursos materiales y digitales asociados al contenido a enseñar y el conocimiento sobre las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos en el tema), el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (expectativas de aprendizaje; el nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado; y, la secuenciación de diversos temas) y el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (conocimiento de teorías de aprendizaje, formas de interacción del alumno con el contenido matemático, aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas y fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas) (CARRILLO et al., 2018).

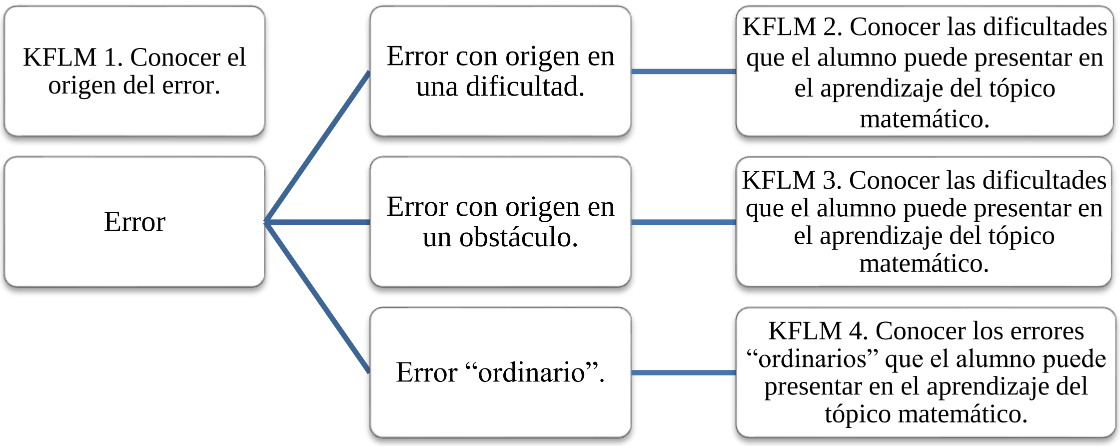
El conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje de las matemáticas hace hincapié en varios aspectos de conocimiento que son clave para el análisis de la información, por un lado, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre error, obstáculo y dificultad, y por otro, las ventajas y potencialidades que se aprovechan para potenciar el aprendizaje del tema de adición de expresiones algebraicas proyectadas desde la planificación. Conocimiento que le permite prever, identificar y tomar decisiones para el aprendizaje bajo la existencia de dificultades que surgen en la actividad matemática conjunta en el aula (SOSA; FLORES-MEDRANO; CARRILLO, 2015; FLORES-MEDRANO et al., 2014).

Conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático

En cuanto al conocimiento del profesor de matemáticas sobre las dificultades de aprendizaje inherentes al contenido matemático, Shulman (1986) distingue que el estudio de los conceptos erróneos ha sido uno de los tópicos más fértiles para la investigación cognitiva y una fuente de conocimiento para los profesores en cuanto a la comprensión didáctica de la materia. En esta dirección, partimos de que al iniciar el álgebra los estudiantes traen consigo las nociones y enfoques que usaban en aritmética, en consecuencia, a lo largo de la construcción del conocimiento algebraico, se encuentra con muchas dificultades que en la práctica escolar generalmente podemos identificar por la manifestación de errores. La conciencia de que estos no pueden evitarse, implica que el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento sobre ellos que le permita ante su manifestación, diagnosticar su origen para después proceder a su superación mediante estrategias, de modo que, en algunos casos, incluso, la manifestación del error se utilice como un elemento de contribución en la potencialización del proceso de aprendizaje.

Dado lo anterior, entendemos que, el error aparece cuando el estudiante se enfrenta a un conocimiento novedoso que lo obliga a hacer una reestructuración de lo que ya sabe, proceso que es producto de una acomodación de una estructura cognitiva anterior, que permite recobrar el equilibrio, producido por un conflicto ocasionado cuando el conocimiento nuevo se añade al antiguo (RUANO et al., 2008). Posición que permite entender que, se incurre en el error cuando se realizan intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación (MATZ, 1980), ésto, sin considerar los errores que no se destacan por nada en especial, los “ordinarios”, es decir aquellos que son, según Brousseau (1983), fugaces, al azar o consecuencia según Socas (1997) de una falta de conocimiento, de un despiste o un descuido. Tomando como línea de partida lo anterior y descartando los errores “ordinarios”, Socas (1997), caracteriza la manifestación de error en dos grupos, los que tiene su origen en una dificultad o en una estructura de éstas, en un obstáculo[4], que por fines analíticos delimitamos en los siguientes indicadores de conocimiento:

Figura 2: Indicadores de conocimiento KFLM.



Fuente: Los autores.

En cuanto a la manifestación del error, diferentes autores señalan algunas dificultades para comprender el lenguaje algebraico, en cuanto a adición de expresiones algebraicas rescatamos las siguientes:

- *Sentido del signo “=”:* Al concebir el signo “=” como un mero separador entre la operación y el resultado, la idea que tiene el alumno es la “señal de hacer algo” antes del signo, mostrando su renuencia a aceptar proposiciones como $\mathbf{4+3=6+1}$, al pensar

[4] Un término siempre relacionado a la dificultad es la comprensión (KIERAN, 2006 ; RUANO et al., 2008; PALAREA, 1999; SOCAS et al., 1998). Por ello, consideramos como dificultad a una manifestación de error, que demuestra que el estudiante no ha podido comprender “algo” (un concepto, un problema, un algoritmo, etc.) del objeto matemático de aprendizaje. Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas. Cuando estas relaciones entre dificultades resultan en una estructura compleja que ha sido utilizada y ha demostrado su efectividad (concepción aprendida) se manifiestan por errores solidarios y persistentes que resulta difícil resolver. Nos encontramos con un obstáculo. Un obstáculo, dentro del avance en el acto mismo de conocer, aparece por una especie de necesidad funcional. Según Brousseau (1983) es el efecto de un conocimiento adquirido que en cierto contexto se muestra exitoso, pero que, en otros, se revela falso, o simplemente inadaptado. La característica de sus errores es que no son fugaces ni al azar, sino que son reproducibles y persistentes. En este caso la concepción nueva requiere una desestructuración o reestructuración de la concepción aprendida.

que el lado derecho debería indicar el resultado (PALAREA, 1999; KIERAN; FILLOY, 1989; KIERAN, 2006).

- *Aceptación de falta de clausura:* Aunado a esta pobre interpretación del signo “=” encontramos la aceptación de falta de clausura, misma que tiene su origen en un obstáculo. Suele mostrar la fijación del alumno con el pensamiento numérico y las dificultades para pensar algebraicamente. Consiste en ver las expresiones algebraicas como enunciados que son, algunas veces incompletos, surgiendo la necesidad de obtener un resultado numérico (RUANO et al., 2008; KIERAN; FILLOY, 1989; URSINI; ESCAREÑO; MONTES; TRIGUEIROS, 2005).
- *Malinterpretación de la literal como número general:* La necesidad de obtener un resultado numérico puede ser relacionada a su vez con la malinterpretación de la literal, es decir, con la tendencia a asignarle un valor arbitrario para calcular un resultado. Esta malinterpretación ha sido vinculada a las formas de proceder en aritmética, en donde es común utilizar las letras como etiquetas refiriéndose a entidades específicas o la inicial de una palabra, por ejemplo: $\boldsymbol{A = bxh}$ (URSINI et al., 2005; KIERAN; FILLOY, 1989).
- *Particularización:* Ligado a la malinterpretación de la literal puede surgir la necesidad de particularización de las expresiones algebraicas. El alumno no le encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras o éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder a lo numérico, particularizando expresiones (RUANO et al., 2008).
- *Trato de expresiones multitérmino:* Los estudiantes pueden tener dificultades para tratar con expresiones multitérmino como unidad simple y no percibir su estructura (por ejemplo, no percibir que $\boldsymbol{4(2r+1)+7}$ es $\boldsymbol{4x+7}$) (KIERAN, 2006).
- *Uso de paréntesis y forma de enseñanza:* Si bien, la presencia de *paréntesis* parece ayudar a los estudiantes a visualizar la estructura, enfocando su atención en lo que parece término y rompiendo la larga cadena de símbolos, existen errores que demuestran que el alumno no utiliza los paréntesis donde es necesario (KIERAN, 2006)). El uso de paréntesis puede ser considerado innecesario para el alumno, por ejemplo, en la jerarquía de operaciones, al considerar que el orden de cálculo es de izquierda a derecha (KIERAN; FILLOY, 1989). Error que puede tener su origen en la ausencia de significado o en un obstáculo. En relación al primero podrían ser problemas de aritmética no superados. En cuanto al segundo podría estar relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis; “de adentro hacia afuera” provocando que el alumno se bloquee cuando ve paréntesis del

tipo $-(\boldsymbol{a}-\mathbf{2}\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}$, llevándolo a omitir los paréntesis y actuar como si no estuvieran (RUANO et al., 2008).

- *Sustitución formal:* Las dificultades ligadas a la sustitución formal tienen su origen en la falta de sentido y están relacionadas con las concepciones afectivas y emocionales hacia el álgebra (KIERAN; FILLOY, 1989). Se basa en la confianza del alumno en métodos informales o intuitivos utilizados en aritmética, en los que se centra en conseguir una respuesta en vez de prestar atención al método que usan, contrario a los que pasa en álgebra que los fuerza a formalizar el procedimiento. Los alumnos piensan en las operaciones que necesitan para resolver un problema en lugar de operaciones que ellos necesitan usar para representar la situación problema, esto ocasiona que el alumno no logre darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta (KIERAN, 2006).
- *Concatenación y malinterpretación de términos algebraicos:* Los errores que se manifiestan por la generalización del significado aritmético de la concatenación al álgebra, claramente tienen su origen en un obstáculo, relacionado con la malinterpretación del sentido de los términos algebraicos ya que la concatenación, en aritmética denota adición, contrario a su significado algebraico que denota multiplicación (KIERAN; FILLOY, 1989).
- *Reglas de sintaxis del álgebra:* Considera la comprensión errónea del uso del coeficiente, es decir, los alumnos parecen no reconocer a la unidad como coeficiente de una literal, considerando que se le puede asignar un coeficiente cualquiera (URSINI et al., 2005).
- *Uso inapropiado de propiedades:* Pueden existir errores en el procedimiento por el uso inapropiado de las propiedades, mismos que tienen su origen en la ausencia de sentido (RUANO et al., 2008).
- *Cambio de registro:* Otro error que suele tener su origen en la ausencia de sentido es el cambio de registro incorrecto, este error encuentra su origen en las características propias del lenguaje algebraico (PALAREA, 1999; RUANO et al., 2008).
- *Extrapolación de reglas:* Relacionadas con la adaptación de reglas conocidas a situaciones nuevas, por ejemplo, evaluar $\mathbf{4}\boldsymbol{m}$ cuando $\boldsymbol{m}=\mathbf{6}$ como $\mathbf{46}$, o simplificar $\mathbf{3}\boldsymbol{xy}+\mathbf{4}\boldsymbol{xz}=\mathbf{7}\boldsymbol{xyz}$. Entra aquí también la concatenación aplicada como suma en álgebra y el no uso de jerarquía de operaciones (MATZ, 1980).
- *Relacionadas a una pobre comprensión de conocimientos previos:* Se consideran aquí la posible tendencia a confundir la multiplicación con la potencia, de diferenciar el

coeficiente y el exponente de una expresión algebraica ($\boldsymbol{m^2 + m^2 = 4m}$) (URSINI et al., 2005).

- *Distinción de expresiones equivalentes:* Está relacionada con la pobre comprensión de los conocimientos previos, así pues, el alumno puede interpretar que $\boldsymbol{m^4} = \boldsymbol{m^2 + m^2 = 4m}$, es decir que $\boldsymbol{m^4}$ es equivalente a $\boldsymbol{4m}$ (URSINI et al., 2005).

Metodología y contexto

Se emplean métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo (GODINO, 1993) con el propósito de comprender e interpretar sobre el conocimiento de las profesoras de matemáticas a partir de un estudio de caso del tipo instrumental (STAKE, 2007). En la misma vía, nuestro estudio es de tipo descriptivo (MARTÍNEZ, 2006).

El caso está constituido por dos profesoras de nivel secundaria, elegidas intencionalmente de un banco de datos de un curso de Desarrollo Profesional, en el cual, durante un semestre, trabajaron como equipo para obtener una planificación, una ejecución y una propuesta de mejora para el tema de adición de expresiones algebraicas en segundo grado de educación secundaria, apoyadas del modelo MTSK (CARRILLO et al., 2018). Por consideraciones éticas nombramos a estas profesoras Oli y Dany. La primera, es profesora en servicio y Licenciada en Sistemas Computacionales; actualmente se desempeña como profesora de telesecundaria, al momento del estudio cuenta con 11 años de experiencia. Dany, es Licenciada en Educación, con especialidad en matemáticas, cuenta con experiencia en prácticas profesionales y seis meses como profesora de primaria.

Se considera como fuentes primarias de información, la planificación, la ejecución y la propuesta de mejora. Como fuente secundaria, un cuestionario de preguntas abiertas (COHEN; MANION; MORRISON, 2007) sobre dificultades de aprendizaje, evitando la limitación por las categorías preestablecidas.

Para el análisis de la información se realiza una división de episodios fenomenológicamente coherentes a partir de la identificación del objetivo declarado por las profesoras, respecto al contenido matemático a enseñar, delimitándolos por las acciones necesarias que en aras de alcanzarlo lo constituyen (SOSA, 2011).

Centrándose en el conocimiento que subyace a las acciones de las profesoras: Primero se identifica el conocimiento de las profesoras que nos ocupa tomando como referencia los indicadores de conocimiento (KFLM) desprendidos de la Figura 2. Para después realizar un análisis longitudinal por escenario, subordinado a la descripción de subindicadores evidenciados, para reforzar la evidencia del subindicador haciendo el proceso más consistente, reduciendo por triangulación los subindicadores identificados al mismo tiempo que se refinan las descripciones de los subindicadores evidenciados (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2012), seguido de modo similar por un análisis transversal en los tres escenarios. Finalmente utilizando el proceso de categorización mixto (deductivo-inductivo), se caracteriza agrupando por similitud.

Resultados

En este apartado se muestra qué conocimiento ponen en acción las dos profesoras al planificar, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel secundaria, partiendo de los indicadores mostrados en la Figura 2 y utilizando un cuestionario para triangular la información.

KFLM 1.1: *Conocer el origen de los errores que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas (en un obstáculo, en la ausencia de significado).*

En la planificación, las profesoras para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer citan a Socas (2011) quien menciona "*los errores que tienen su origen en un obstáculo*" y "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*".

Aunado a lo anterior, en el cuestionario Oli alude a que "*en cuanto a la adición de expresiones algebraicas"* puede *"mencionar tres errores más comunes a los que"* se ha *"enfrentado",* entre ellos la *"falta de significado…*". Asimismo, "*que los errores… pueden provenir de un origen diferente"* en primer instante porque

> "e*s un momento difícil el paso de aritmética al álgebra, … hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*" y por "*la ausencia de sentido"*.

KFLM 2.1: *Conocer que la ausencia de significado en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas puede tener su procedencia de distintos tipos de dificultades (relacionada con la complejidad misma del objeto matemático, con los procesos del pensamiento, con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra).*

De forma similar al anterior, las profesoras citan a Socas (2011) en la planificación para identificar el origen de los errores que los alumnos pueden cometer antes del diseño de las actividades. El autor menciona "*los errores que tienen su origen en una ausencia de significado*", a los que asigna procedencias distintas una de ellas relacionada con: las

> "*dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos del pensamiento*"; y a las "*dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra*".

En el cuestionario Oli, alude a que

> "*otro posible origen de los errores que se presentan con relación a este tópico pudiera ser el valor afectivo, es decir, las creencias que el alumno posee y que son difíciles de cambiar".*

Por su parte, Dany, de manera más directa menciona que los alumnos presentan errores debido "*a la dificultad propia del contenido*".

KFLM 2.2: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por un aprendizaje deficiente de conocimiento previos (no identificar números reales, no poder trabajar aritméticamente con números reales).*

En la planificación, antes del diseño de las actividades, las profesoras, identifican que

> "*los estudiantes deberán primero identificar los números racionales, enteros y naturales, pudiendo trabajar con ellos de manera aritmética consideramos este punto importante, la finalidad es que se puedan presentar el menor tipo de dificultades en el paso de aritmética al álgebra*".

Ya en el diseño, las profesoras contemplan la actividad "adivinanza de números", la cual consiste en solicitar a los alumnos piensen en un número, para después indicar una serie de operaciones aritméticas con él. Esta actividad tiene como propósito:

> *"recordar los conocimientos previos, haciendo alusión a los números enteros y las operaciones aritméticas"*, considerando que *"es importante tener en cuenta que los conocimientos adquiridos en primero de secundaria tales como el conocer los números enteros y el manejo de las operaciones básicas le permitirán trabajar en esta actividad que será el punto de partida para las siguientes actividades a realizar".*

En el cuestionario Oli indica que, considera:

> "*la importancia de explorar los conocimientos previos en los estudiantes porque con base en ello se diseñarán situaciones didácticas con actividades adecuadas que permitan la explotación de esos conocimientos previos, es decir, enfrentar al alumno a sus ideas para reflexionar sobre ellas y descubrir nuevos conocimientos; de la misma manera por medio de los conocimientos previos del estudiante, el docente puede detectar algunos errores y dificultades que el estudiante posee…*".

Podemos decir que el conocimiento de las profesoras sobre las dificultades de aprendizaje no se enfoca en un solo tema, le dan importancia a recordar los conocimientos previos, ya que consideran son el punto de partida para el desarrollo del tema de adición de expresiones algebraicas, lo que las lleva a meditar en las posibles dificultades que pudieran presentar los alumnos para identificar y operar con números reales. Oli pone en acción este conocimiento, en la ejecución, actividad "adivinanza de números" solicita a los alumnos que piensen en un número, sugiere que sea "*pequeño, para que no batallen*", cuando lo multipliquen por tres.

KFLM 2.3: *Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para identificar los componentes de una expresión algebraica.*

Al inicio de la actividad "geometría para calcular", las profesoras planifican preguntar a los alumnos:

> "*sobre los componentes que ya se ubicaron, esperado que identifiquen en primera instancia el coeficiente y la parte literal*" señalando que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*".

KFLM 2.4: *Conocer las dificultades que puede presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionadas con la forma de abordar el objeto matemático (desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético y no algebraico, porque no es capaz de plasmar lo que se le dice a manera de juego en una expresión algebraica, para utilizar el lenguaje algebraico, por abordar el tema con modelos geométricos y después evaluar sin su utilización).*

Antes del diseño de actividades, como parte del conocimiento sobre las formas de interactuar las profesoras enuncian que,

> *"los sistemas de representación elegidos pueden provocar en el estudiante un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución"*.

Este conocimiento se pone en acción primero, cuando, en el diseño, dentro de la actividad "adivinanza de números", saben que puede presentarse como dificultad

> "*que los alumnos no sean capaces de plasmar lo que se les ha dicho en manera de juego a una expresión algebraica, es decir"* que *"la forma de interactuar no es la deseada*".

Es decir, hasta el momento, la evidencia muestra, que las profesoras conocen que las actividades que diseñan pueden desencadenar la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para la solución, en consecuencia, la forma en que aborden el objeto matemático, influirá en la capacidad del alumno para plasmar en la actividad "adivinanza de números" lo que se les ha dicho a manera de juego en una expresión algebraica, esto porque la forma de interactuar no fue la deseada por las profesoras.

También conocen que la forma de abordar el objeto matemático puede facilitar/dificultar al alumno la utilización del lenguaje algebraico, ya que diseñan la actividad "geometría para calcular"

> "*con la intención de que el estudiante tenga un acercamiento más estructurado con respecto a las expresiones algebraicas y pueda utilizar con mayor facilidad un lenguaje algebraico*"

y que, las distintas formas utilizadas dentro de una clase para abordar el objeto matemático puede confundir al estudiante[5], esto cuando en la actividad de cierre "cuadrados mágicos", expresan que los alumnos

> "*probablemente tengan alguna confusión por el hecho de trabajar con modelos geométricos y después no tenerlos*".

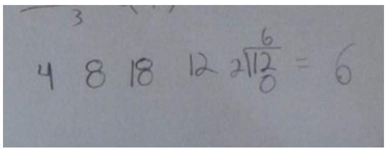
En la ejecución este conocimiento se pone en acción cuando Oli, después de haber recordado como se representa una expresión algebraica, solicita se le dicte el primer término, un alumno recurre al resultado concreto, mostrando que la forma de abordar el objeto matemático desencadenó la necesidad de un pensamiento aritmético, por lo que Oli les indica que el número que pensaron lo representarán con la letra "n".

Figura 3. Oli explicando en el aula.

Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

Una vez concluido este ejercicio, Oli dicta a los alumnos un nuevo ejercicio, señalándoles que lo que busca es la expresión [mientras señala la del ejercicio anterior]. Terminado el ejercicio solicita la participación de los alumnos para escribirla en el pintarrón. Cuando la alumna participante escribe:

Figura 4. Escrito de una alumna en el pintarrón.



Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

Oli menciona "*pero, ¿cómo te quedaría así?* [señala expresión algebraica del pintarrón]" guiando a la alumna a obtener la expresión algebraica.

[5] En el cuestionario, en cuanto a confusión Oli expresa que "*es cuando los alumnos utilizan conceptos, contenidos o procedimientos equivocados en el desarrollo de un tema. Pienso que la confusión está relacionada con las creencias del estudiante que lo llevan a utilizar conceptos equivocados*". Asimismo alude que una dificultad puede ser una confusión del pensamiento del alumno cuando expone que "…*esto le genera una dificultad, una confusión en su pensamiento*". Por último, indica que se da "*cuenta si un alumno está confundido cuando no logra comprender el tema*", redundando en que "*para erradicar la confusión en un estudiante es necesario que el alumno comprenda*…".

KFLM 2.5: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para proceder con la adición porque no comprende que se deben distinguir términos semejantes (ignora las diferencias, suma coeficientes con la parte literal diferente, suman todos los términos sin respetar si son semejantes o no).*

Antes de abordar el diseño de actividades, las profesoras expresan que una dificultad en el aprendizaje es la

> "*conjunción de términos no semejantes"* mencionando que *"en álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo:* $\mathbf{3+5x=8x}$".

En la misma dirección, mencionan que los estudiantes

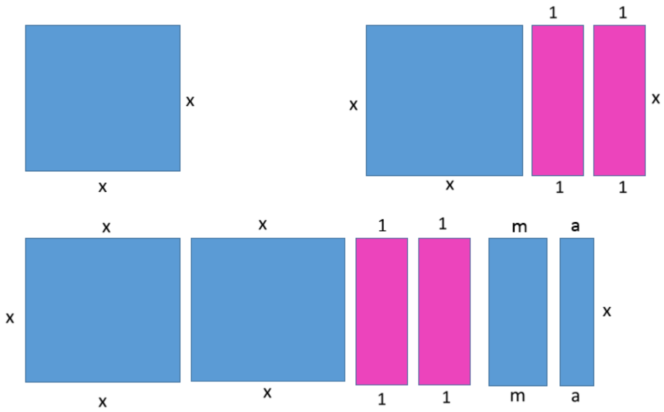
> "*llegan a realizar una conjunción de términos, sin considerar algunas características particulares como el signo*".

Conocimiento que Oli y Dany ponen en acción cuando diseñan las actividades de "geometría para calcular" y "los tapetes de rosa", en la primera indicando que una dificultad que puede presentarse, es

> "*querer hacer conjunciones de muchas expresiones algebraicas en donde su parte literal es diferente, lo cual no se puede realizar*", y en la segunda al expresar que "*dentro de la categoría fortalezas y dificultades se visualizó el tratamiento o interacción que pudieran tener al estar realizando las sumas, esto debido a que se puede presentar el error de querer sumar todas las expresiones algebraicas sin respetar la esencia de cada término, queriendo "juntar" cuantos términos tengan en la situación*",

cuando se realiza, por ejemplo, el cálculo de los siguientes perímetros.

Figura 5. Diseño de actividades en la planificación.



Fuente: Reporte de la etapa de diseño de la planificación de Oli y Dany.

KFLM 2.6: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que tienen su origen en las concepciones del alumno sobre las matemáticas (para comprender el concepto de expresión algebraica porque su* *creencia de que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que solo se utiliza en matemáticas, puede crear una ausencia de significado, en el que el aprendizaje sea solo memorístico, por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar con el lenguaje algebraico; porque le impide hacer una referencia algebraica).*

Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan que el alumno puede "*creer*" que

> "*el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana y que sólo se utiliza en matemáticas; esto puede crear en el estudiante una carencia de significado en el que su aprendizaje únicamente sea memorístico, no podrá comprender el concepto de expresión algebraica y por lo tanto no desarrollará habilidades que le permitan trabajar en el lenguaje algebraico*."

Este conocimiento se pone en acción cuando como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan

> "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*".

Del mismo modo cuando presentan la actividad "adivinanza de números" para,

> "*que el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*",

aunque siguen identificando que, puede presentarse como dificultad

> "*que su concepción de matemáticas le impida hacer una referencia algebraica al juego presentado*".

KFLM 2.7: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para comprender el lenguaje algebraico/un aspecto de él por falta de significado porque no lo vincula con algún aspecto de su vida cotidiana.*

Como parte del conocimiento identificado en la categoría de formas de enseñanza de las matemáticas las profesoras mencionan

> "*utilizar una representación de lenguaje común con un lenguaje algebraico, para que la reconozca como parte de la expresión y tenga significado para él (en la granja de Juan hay 8p (perros), 3g (gatos), 23v (vacas) y 14c (caballos))*".

Conocimiento que ponen en acción cuando en la planificación presentan la actividad "adivinanza de números" para que

> "*el estudiante visualice al lenguaje algebraico como un lenguaje que puede utilizar en sus actividades cotidianas*"

y en la ejecución de la planificación, actividad "los tapetes de Rosa", podemos ver nuevamente este conocimiento en acción cuando Oli dicta un ejercicio en donde el ancho de un rectángulo (tapete) mide 2 plumas y al preguntarle a los alumnos "*¿cómo es eso?*", toma dos plumas y ejemplifica. Después dicta un segundo ejercicio donde el ancho mide 8 plumas, para corroborar que el alumno ha entendido dice "*ahora, no va a medir "a" ¿cuánto va a medir?, muchachos…*" , cuando un alumno, menciona "*pens*", Oli los incita a decir cómo lo van a representar "*lo vamos a representar con la letra…*" , obteniendo como respuesta "*p*", a lo que asiente mencionando "*p", ¿verdad? para no ponerle pluma completo*".

Las profesoras son conscientes de que algunas dificultades que el alumno presentará en el tema de adición de expresiones algebraicas estará ligado a las creencias del alumno, por ejemplo, creer que el lenguaje algebraico es inútil para su vida cotidiana, conocimiento que ponen en acción al seleccionar las formas de enseñanza (KMT) (KFLM 2.6) para el diseño de las actividades, sin embargo, leyendo entre líneas podemos observar que aún y con que las actividades se diseñen para contrarrestar esta creencia, las profesoras conocen que seguirán presentándose dificultades con este origen (KFLM 2.5, KFLM 2.6), por ejemplo, la falta de significado.

KFLM 2.8: *Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque procede de forma mecánica/procedimental (dar respuestas sin razonar lo que hace, sin haber una reflexión y argumento del porqué del procedimiento).*

En la propuesta de mejora las profesoras anexan una actividad en la que, refiriéndose al alumno expresan

> "*sería conveniente que reflexionaran y pudieran argumentar cómo lo hacen para tratar de llegar a un algoritmo o procedimiento que les signifique la mejor manera de realizarlo*", pretenden " *que los alumnos concluyan que para realizar la suma de expresiones algebraicas se tienen que agrupar los términos semejantes y realizar la operación con sus coeficientes conservando la parte literal*".

Podemos observar que las profesoras son conscientes de las dificultades que pueden surgir cuando el alumno procede de forma mecánica/procedimental cuando se pretende que aprenda la adición de expresiones algebraicas, esto lleva a monitorear y realizar preguntas cuando detecta que el alumno responde sin haber razonado sus respuestas, como puede observarse en la ejecución, actividad "adivinanza de números", cuando Oli, solicita que los alumnos pasen a llenar una tabla donde se plasmarán los resultados obtenidos del lenguaje común al aritmético, y menciona "*entonces, a todos a todos les dio 10, ¿cierto?*", cuando los alumnos les responden "*sí*", les pregunta *"¿siempre será así, pues?*", al obtener nuevamente una respuesta afirmativa ahora les pregunta "*¿de qué depende?*".

Aunado a lo anterior, en el cuestionario, Oli, expresa que

> "*para evitar que el alumno no proceda de manera mecánica, él debe razonar, reflexionar y construir su propio conocimiento*". "*Para lograrlo como docente debo evitar el actuar de manera tradicionalista, es decir que el maestro provea una clase completamente expositiva donde el alumno sólo sea un receptor de conocimientos hará que el alumno mecanice lo que está viendo y escuchando.*"

KFLM 2.9: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque no comprende que la literal puede representar cualquier número.*

Las profesoras identifican como parte del conocimiento sobre las formas de aprendizaje que:

> "*para poder integrar literales que les representaran números desconocidos, es importante comenzar a utilizar el significado de la variable como incógnita*".

Aunado a lo anterior, dentro de la categoría formas de enseñanza aluden a que se puede

> "*representar a la literal con distintos valores, principalmente representados en valores que cambian con respecto a algo, para que el estudiante establezca a la variable con su significado de número* $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$)".

Por ello dentro de la categoría de recursos y materiales, declaran la utilización de material tangible como

> "*los bloques de Dienes, para el manejo de las variables*". En el cual "*cada pieza se define por cuatro variables: color, forma, tamaño y grosor. A su vez, a cada una de las piezas se le asignan diversos valores…*", además que "*se pueden utilizar fichas de colores que representen las distintas variables*" o "*representar el perímetro de una figura con una expresión algebraica*".

Conocimiento que les permite anticipar cómo pueden diseñarse las actividades para que el alumno comprenda el concepto (por ejemplo, el de variable) y que precisamente justifica el porqué diseñaron la actividad de "Geometría para calcular" y "Los tapetes de Rosa".

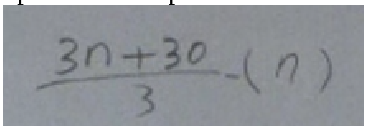
En la misma dirección Oli, dentro del cuestionario, apunta a que

> "*el alumno no se encuentra suficientemente familiarizado con el lenguaje algebraico y esto hace que no lo utilice de manera adecuada es decir no comprende que las literales pueden tomar valores diferentes*".

Conocimiento que se pone en acción dentro de la ejecución en dos momentos diferentes. El primer momento cuando en la actividad "adivinanza de números", Oli solicita a los alumnos que piensen un número les indica una serie de operaciones aritméticas con él y en la última indicación les dice, "*y luego le van a restar n… ¿qué quiere decir n?, es el número que pensaron… ¿sí?. Le van a restar n"*

Guiándolos después a la obtención de la expresión algebraica:

Figura 6. Respuesta escrita por un alumno en el pintarrón.

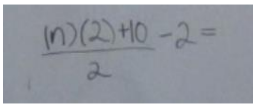


Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

Cabe señalar que cuando se realizó la planificación de esta actividad, las profesoras consideraron llamar "*n*" al número que pensaron después de haber operado aritméticamente con él.

En un segundo momento bajo un ejercicio similar, Oli vuelve a poner en acción este conocimiento, cuando una alumna está participando escribe en la expresión algebraica el número que pensó, al realizar el ejercicio, y le dice "*pero tú pensaste en dos y ¿qué tal que fuera otro número?*" [señalando el error]

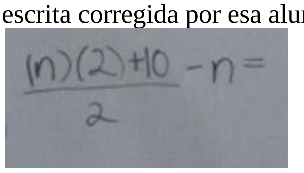
Figura 7. Respuesta escrita por una alumna en el pintarrón



Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

"*¿Cómo lo vas a hacer?*", la alumna responde con un "*ahhh*" y corrige.

Figura 8. Respuesta escrita corregida por esa alumna en el pintarrón



Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

KFLM 2.10: *Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para coordinar las múltiples formas de representación verbal de una expresión algebraica.*

En la ejecución, Dany muestra un rectángulo a los alumnos y especifica que para ese "primer ejercicio va a medir "*a*" en su ancho y por el largo "3*a*", por el triple de "*a*", [énfasis] "*"a" y el triple de "a"*". Acto seguido un alumno le pregunta "*¿el lado cuánto?*" por lo que Oli decide realizar el rectángulo en el pintarrón para que el alumno pueda visualizarlo (coordinar las múltiples formas de representación verbal, con su representación gráfica y algebraica). Dany rectifica "*el largo del rectángulo va a ser tres veces mayor a su ancho*" y pregunta a los alumnos "*¿cuánto va a medir el an… el largo?*".

KFLM 2.11: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para seguir las indicaciones de un problema* *porque no comprende a qué se refiere el lenguaje algebraico utilizado (no lo asocia a un conocimiento previo; por falta de sentido).*

En la ejecución, Oli, en la actividad "los tapetes de Rosa" comienza a dictar una serie de ejercicios donde una artesana está elaborando un tapete para el que no tiene las medidas, pero, sabe que el ancho mide dos plumas, en ese momento Oli les pregunta a los alumnos "*¿cómo es eso?*", uno de los alumnos responde "*pens*", a lo que Oli contesta "*sí, pero, esta es una pluma y luego la otra pluma, el alto mide eso*" mostrando a los alumnos a que se refiere el ejercicio.

Dado este evento, Oli dicta un problema similar, "*Rosa va a hacer otro tapete ahora el ancho mide 8 plumas y el largo mide 6 veces más, ¿cuánto listón necesita para la orilla?*", cuando los alumnos se encuentran resolviendo, se acerca a una bina de trabajo y les dice "*si yo digo 8 veces más ¿cuánto sería?*" [refiriéndose al problema], al no obtener respuesta, ella cambia la interrogante, "*si digo 2 y luego digo 2 veces el dos ¿cuánto sería?*" cuando la alumna responde "*4*", utiliza la misma estrategia para preguntar "*si digo 3 veces el 2*", a lo que la alumna responde "*seis*", llevándola de esa forma a comprender las indicaciones del problema.

En un segundo momento, se acerca a verificar el trabajo de otra bina y les menciona que se tiene un error, para hacerlo notar les vuelve a repetir la indicación "*el ancho mide 5 veces más*", señalando el ancho del rectángulo expresa "*cinco veces más que esto*", al notar la no comprensión de la alumna, Oli se remite a un ejercicio anterior y explica, "*si aquí mide 2, ¿el ancho mide?*", ahora toma dos plumas, "*mira, si aquí mide dos*", empalma plumas para ejemplificar a que se refiere, ahora la alumna asiente mostrando que comprende.

Es posible observar el potencial que tiene el alumno para movilizar el conocimiento del profesor, cuando surgen dificultades que no fueron previstas, situación en que puede ofrecer una gama de tratamientos a la manifestación del error.

KFLM 2.12: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque se concentra en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje.*

En el cuestionario, Oli señala que

> "*los estudiantes pueden cambiar el sentido de la actividad ya que como se utilizan figuras geométricas y su área, en este caso en específico, se hace uso de rectángulos y cuadrados, puede suceder que los alumnos se inclinen por pensar que el objetivo de la clase es la geometría; entonces el fin de la actividad ya no se cumple y se trunca la secuencia didáctica empleada*".

No porque la Geometría no sea importante sino porque el objetivo de aprendizaje es otro. En la ejecución, actividad "los tapetes de Rosa", Oli intencionalmente dicta un ejercicio a los alumnos donde el material didáctico no les es suficiente, cuando los alumnos empiezan a mencionar que no se puede resolver el problema ella aclara "*pero acuérdense que lo que quiero saber es el listón que va a llevar alrededor eh*", por su parte Dany recuerda cuál es la pregunta y les menciona "*chicos hay que recordar que estamos trabajando con las expresiones algebraicas*". Ya en la propuesta de mejora las profesoras reducen el número de problemas en los cuales se busca que los alumnos se concentren en obtener el perímetro de las figuras geométricas, sin embargo, llaman a tomar en cuenta que "*esa no es la verdadera intención de la actividad sino sumar expresiones algebraicas*".

KFLM 2.13: *Conocer las dificultades que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas para utilizar el lenguaje algebraico porque no lo visualiza como una forma de comunicación.*

En la propuesta de mejora, las profesoras planifican que el alumno llene una tabla donde se identifique el coeficiente, la parte literal y exponente de ciertas expresiones algebraicas indicadas. Enuncian que

> "*cuando el alumno resuelva las tablas planteadas por el maestro, se pretende que se familiarice con las partes de una expresión algebraica, para que posteriormente las utilice sin dificultad, como una forma de comunicación*".

De igual forma en el mismo escenario se planifica pedir al alumno que llene una tabla donde se pase de la representación verbal a la expresión algebraica. Las profesoras consideran que

> "*el objetivo principal de esta actividad es que el alumno pueda desarrollar su competencia lingüística para que perciba a los signos, símbolos o íconos… como parte del lenguaje algebraico y como una forma de comunicarse*", "*es importante que el docente retome oraciones en las que el alumno pueda representar una situación dada en lenguaje común a la representación por medio de una expresión algebraica, con ello percibirá que el lenguaje algebraico puede ser una manera de comunicarse*". Para ello proponen que los alumnos representen en una expresión algebraica oraciones como "*la mitad de un número*" o "*la suma de dos números*".

KFLM 2.14: *Conocer las dificultades que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas para asimilar que una literal se puede sustituir con un número.*

Las profesoras, como parte de la propuesta de mejora anexan una actividad cuyo objetivo es que el alumno transite del lenguaje aritmético al algebraico a partir de identificar en figuras geométricas, el ancho, el largo y el perímetro, los cuales en un inicio estarán representados por números naturales y en un segundo por expresiones algebraicas. Mencionan que con esta tabla agregada a la actividad,

> "*es posible que el alumno perciba la relación que existe entre cantidades por medio de un valor numérico de la expresión algebraica; es decir, al completar la tabla*" pretenden que el alumno perciba "*cómo se relacionan las cantidades y podrá asimilar que una literal se puede sustituir por un número*", esto después de haber contemplado "*que una expresión algebraica se utiliza como un símbolo… que permite un razonamiento".*

KFLM 3.1: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas vinculados a las operaciones con signo.*

En la planificación, como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras expresan la existencia de "*errores en aritmética como de operaciones con signo*".

KFLM 3.2: *Conocer la forma en que pueden manifestarse los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas que están vinculados a los números negativos (ignorar el signo y consideran los valores como enteros positivos).*

En la planificación, las profesoras citan a Gallardo y Pizón (2000) quienes expresan que "*operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra*"; Oli y Dany complementan a los autores mencionando que los estudiantes, "*ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos*". Aunado a lo anterior, refiriéndose al alumno, en el cuestionario Oli indica que "*es difícil para él entender que existen expresiones negativas*".

KFLM 3.3: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque utiliza las nociones y enfoques que ha aprendido en aritmética (cuando comienza el estudio del álgebra, cuando interactúa con el lenguaje algebraico sin comprender que los símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse al álgebra).*

En la planificación, las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes mencionan que

> "*los estudiantes, al comenzar con el estudio del álgebra traen consigo nociones de aritmética y los enfoques que usaban en ella*". Asimismo, las profesoras mencionan que "*el alumno interactúa con un lenguaje algebraico, pero sin comprender que sus símbolos adquieren un distinto significado al trasladarse de la aritmética*".

Aunado a lo anterior Oli en las respuestas al cuestionario alude a que

> "*hasta sexto de primaria el alumno conoce únicamente aritmética entonces pretende trabajar en álgebra de la misma manera que en aritmética*".

KFLM 3.4: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas relacionados con la concepción aritmética del signo "=" (por la carencia de sentido, los estudiantes tienen la idea de hacer algo al lado izquierdo y derecho de una igualdad; por las formas de proceder en aritmética, al encontrar una expresión abierta la considera incompleta, asumiendo que debe de existir un resultado que generalmente es un número; lo cual ocasiona que se produzca el error de carencia de sentido, al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros).*

Oli como parte de las respuestas al cuestionario manifiesta que

> "*el estudiante al encontrarse con un signo igual ellos la mayoría de las ocasiones tienden a cerrarlo en un valor numérico que obtienen de la expresión algebraica que está antes o después del signo igual*". Además, señala que "*… es difícil para él entender … y que no necesariamente cuando exista un signo igual tendrá un valor numérico*" y que "*… es muy común encontrarnos con errores de procedimiento en los cuales…o se le asigna un valor a la variable*".

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1998) quienes mencionan la

> "*carencia de sentido en el signo igual; para los estudiantes la idea que tienen sobre el signo igual es la de hacer algo ante los lados izquierdo y derecho de una igualdad*".

Asimismo, en la planificación, como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que existen

> "*errores a la falta de un cierre, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones como 5 + b consideran que esta expresión es incompleta, asumen que debe existir un resultado que generalmente es un número*".

Además, dentro de las respuestas del cuestionario Dany enuncia que un posible error en la adición de expresiones algebraicas es "*querer cerrar las operaciones a un número en particular".*

Del mismo modo, como parte del conocimiento sobre las formas de interacción en la adición de expresiones algebraicas las profesoras mencionan que

> "*otra forma de interactuar con el contenido es que la igualdad aritmética la apliquen en el contexto algebraico, esto puede ocasionar que se produzca el error de la carencia de sentido al signo igual al abordar las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros*".

En la ejecución, Oli pone en acción este conocimiento para reconocer el obstáculo, cuando en un evento, pregunta a una bina cómo obtuvieron la respuesta del ejercicio dos (en el cual el material gráfico no es suficiente para dar respuesta) y antes de que contesten, otro alumno menciona que "*sacaron la calculadora*", ante esto, Oli pregunta a la bina

> "*pero, ¿cómo saben cuánto mide p?*", "*¿cuánto mide la pluma?*", recordando al grupo "*dijimos lo que queremos son las expresiones que van saliendo*".

KFLM 3.5: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas ligados a la concepción de concatenación, porque ha aprendido que en aritmética significa adición, contrario a su significado algebraico de multiplicación.*

Como parte del conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de las expresiones algebraicas las profesoras citan a Kieran y Filloy (1989) quienes expresan que

> "*en aritmética la concatenación significa adición como 37 significa 30 + 7, sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación*", "*esto conducirá a que los jóvenes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos*".

Aunado a lo anterior Oli como parte de las respuestas al cuestionario indica

> "*Los errores del álgebra ocasionados por las características del lenguaje. Uno de ellos es la concatenación en expresiones aritméticas es de suma, mientras que en el álgebra se pueden dar concatenaciones de multiplicación y suma. Por ejemplo, 3x tiene una concatenación de multiplicación, muy frecuentemente los alumnos no llegan a entender la diferencia*."

KFLM 3.6: *Conocer que los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas pueden tener su origen en su creencia de que el lenguaje algebraico es igual al lenguaje aritmético, esto los llevan a realizar las operaciones de la misma manera, y a una consecuente carencia de significado.*

Como parte del conocimiento sobre las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas las profesoras mencionan el alumno puede tener

> "*concepciones erróneas como creer que el lenguaje algebraico es igual que el lenguaje aritmético y realizan operaciones de la misma manera; esto conducirá al estudiante a la carencia de significado, puede cometer errores que ya se han mencionado en este documento*".

KFLM 3.7: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas por las contradicciones entre las reglas de sintaxis del lenguaje algebraico y el aritmético (para distinguir el exponente de un término algebraico cuando éste no está indicado, para identificar la unidad como coeficiente en un término algebraico cuando éste no está indicado).*

En la planificación, actividad "geometría para calcular" las profesoras esperan que en primer momento los alumnos identifiquen la parte literal y el coeficiente y especifican que "*posiblemente pudieran señalar también el exponente*" ya que en ese "*acercamiento será uno*".

En la propuesta de mejora, las profesoras anexan una actividad cuyo objetivo es que "*el alumno conozca la sintaxis del lenguaje algebraico*" a partir de la identificación de las partes de una expresión algebraica (coeficiente, literal, exponente).

Figura 9. Actividad complementaria.

Expresión	Coeficiente	Exponente	Literal
$6m^3$			
$-4bx$		1	
xy			xy
x^2	1		
$-7a^2$			

Fuente: Reporte de la etapa de mejora de la planificación de Oli y Dany.

Para después profundizar en algunas reglas de sintaxis, como: *"Si una expresión algebraica no tiene coeficiente, este siempre tendrá el valor (1)*".

KFLM 3.8: *Conocer los obstáculos que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas relacionados a la concepción aritmética de la palabra "más", la cual entiende como suma y cuando se emplea como una suma reiterada no lo asocia con la multiplicación.*

En la ejecución, actividad "los tapetes de Rosa", Dany se acerca a verificar el trabajo de un alumno y le pregunta *"¿por qué 14?*" [señalando la base del rectángulo], el alumno menciona "*porque es seis veces más*", es decir, el alumno entiende "seis veces más" como una suma y no como una suma reiterada. La docente trata de explicar diciendo "*eh, seis veces, este…* [hace remolinos con los dedos], *lo que te mide el ancho*", y reitera "*seis veces lo que mide el ancho*" [haciendo una señal de brinco con los dedos].

Inmediatamente de haber atendido a la bina, se acerca a otra, y verifica que los alumnos hacen la misma interpretación, han indicado una suma en vez de una multiplicación, les hace ver el error diciendo "*pones más seis*", "*en vez de poner 6 veces más*", mientras dice esto, Dany utiliza la misma estrategia que en la bina anterior (explica mediante lenguaje corporal) y busca confirmación de comprensión por parte del alumno, cuando se cerciora que han comprendido, les pregunta "*¿cómo quedaría la expresión algebraica?*".

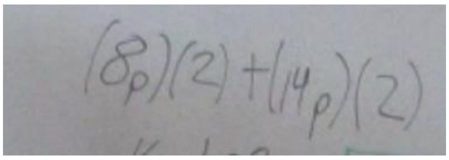
KFLM 4.1: *Conocer los errores "ordinarios" que el alumno puede presentar en el aprendizaje de la adición de expresiones algebraicas porque en el procedimiento por un despiste no plasma algún signo/símbolo (un paréntesis o la parte literal).*

Las profesoras conocen que "*los estudiantes pueden hacer agrupaciones donde olviden el signo"*, errores, que según Oli es común encontrarlos dentro del procedimiento. En la ejecución Oli, al percatarse que un alumno ha omitido el factor literal, menciona a la clase "*acuérdense que cuando estén utilizando expresiones algebraicas nunca se les debe olvidar la literal*". Cuando un alumno pasa a compartir el resultado en la obtención de un perímetro pone como resultado 44, a lo que Oli le pregunta "*44 ¿qué?*".

KFLM 4.2: *Conocer los errores "ordinarios" que pudiera presentar el alumno en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas porque cambia las indicaciones de un problema (poner 14 en vez de 48).*

Un alumno menciona, que ellos han hecho el ejercicio de manera diferente, por lo que Oli lo invita a pasar al pintarrón, cuando el alumno escribe:

Figura 10. Respuesta escrita por el alumno en el pintarrón



Fuente: Reporte de la etapa de ejecución de la planificación de Oli y Dany.

Oli le dice, "*Ah ok ¿ustedes pusieron 14 en vez de 48*? a lo que el alumno contesta con un "*sí*".

KFLM 4.3: *Conocer los errores "ordinarios" que el alumno pude presentar en el aprendizaje de adición de expresiones algebraicas que están vinculados a la falta de conocimiento (ignora la existencia de coeficientes negativos).*

Las profesoras sugieren que después de que los alumnos llenen una tabla donde se identifique el coeficiente, el exponente y la parte literal de los monomios $-4bx$ y $-7a^2$, entre otros, el profesor mencionará que "*existen coeficientes negativos*".

Conclusiones

El compromiso con la calidad educativa (SEP, 2011) frente a la diversidad del alumnado, lleva a demandar más del profesor de matemáticas para hacer frente al desarrollo de su labor. A manera de satisfacer las expectativas respecto a su actuación competente (SHÖN, 1987), es evidente que el profesor de matemáticas precisa contar con un conocimiento integral sobre el tópico a enseñar y su papel dentro de una estructura matemática general, que sustente la formulación y selección de estrategias adecuadas para hacer frente a la manifestación del error en el proceso de construcción del conocimiento matemático en un ambiente de equidad educativa en el que incluso se aproveche su potencial didáctico para el aprendizaje.

En el proceso de aprendizaje de los estudiantes el conocimiento del profesor sobre las dificultades del tópico matemático y más alla la reflexión sobre ellas, puede llevar a la formulación de estrategias desde la planificación, facilitando la labor docente en la ejecución. Esto al considerar las posibles dificultades que pudieran presentar cuando partan de aprendizajes deficientes, de creencias respecto al álgebra, que le permitan al profesor predecir dimensiones afectivas que influyan en la forma de abordar el tema para propiciar una interacción razonada con el objeto matemático, evitando dificultades causadas por proceder de forma memorística o desviarse del objetivo matemático de aprendizaje o desde la selección e intencionalidad de, la forma de enseñanza, los recursos materiales y virtuales, y, las actividades, tareas y ejemplos, prevenir dificultades por desviar la atención del estudiante en aspectos irrelevantes al objetivo de aprendizaje, influyendo incluso en el tiempo de interés del alumno hacia el objeto matemático y en consecuencia el que tiene para poder aclarar los conceptos.

En la ejecución, en general el éxito o fracaso de una estrategia de aprendizaje depende en un inicio de la capacidad del profesor para diferenciar el origen del error, siendo este factor clave para la formulación de un tratamiento sistemático y, delimitador de la consecuente diversidad de estrategias movilizadas para ayudar al alumno a corregir sus errores. Visualizamos la importancia del conocimiento del profesor sobre dificultades de aprendizaje cuando ante el agotamiento de estrategias y la no comprensión del alumno, el profesor pueda adoptar una postura de evasión ante la manifestación del error.

En otra dirección, prestamos atención al hecho de que, aunque se trate de un esfuerzo colaborativo podemos observar tanto el conocimiento profesional de las profesoras por su propia naturaleza, como los grados de densidad y consistencia (que en este estudio describimos más que evaluar), que siguen permeando en las fuentes de información tal y como puede observarse en el escenario de ejecución y el cuestionario.

En la planificación, cada una de las categorías descritas en el modelo MTSK (CARRILLO et al., 2018) puede permitir en primer momento, identificar u/y organizar los conocimientos del profesor a manera de contemplar los aspectos disciplinares y didácticos que necesitan tomar en cuenta para realizar el diseño de las actividades en la planificación y posterior ejecución de las mismas, al tiempo que da acceso a realizar una reflexión continua centrada en el tópico matemático. Lo anterior pudiendo sumergirlos, con el fin de contemplar todas las categorías, en una labor de investigación que funciona como un “tipo de guía o inspiración” (ROWLAND et al., 2005), con impacto en el desarrollo de su conocimiento profesional (SHULMAN, 1987). Una vez realizado el diseño de actividades el modelo puede permitirles identificar los posibles conocimientos que se pondrán en acción en el aula, por ejemplo, las dificultades de aprendizaje que pueden surgir cuando el alumno este en interacción con el contenido matemático, dándoles la oportunidad de visualizar otras rutas de aprendizaje y cambiarla en caso de considerarlo provechoso para la clase.

En cuanto a la propuesta de mejora que el profesor hace de su actuación, la del estudiante y el contraste con el objetivo de enseñanza, puede aportarle información entre otros, de cómo los alumnos interpretan el tema de adición de expresiones algebraicas, mejorar su comprensión, lo que le permitirá tomar decisiones sobre el tratamiento efectivo para ayudar al alumno en la corrección oportuna o reestructurar la comprensión que subyace a la presencia de dichos errores.

Sobre el estudio llevado a acabo visulizamos su importancia en aportar evidencia de cómo los profesores en formación continua están comprendiendo la literatura en didáctica de las matemáticas y transformándola para llevarla a su labor docente, así como, el potencial de los subindicadores de conocimiento para hacer explícito, qué dificultades encuentra el alumno para comprender y una posible justificación del por qué se presentan, su origen.

Referencias

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, *59*(5), 389-407, 2008.

BROUSSEAU, G. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, *2*(4), 165-198, 1983.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M. ; CONTRERAS, L.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA; D. et al. The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, 2018.

COHEN, L.; MANION L.; MORRISON, K. **Research Methods in Education**. Sixth Edition. United Kingdom: Taylor y Francis e-library, 2007.

CHARALAMBOUS, C.; PITTA-PANTAZI, D. Perspectives on Priority Mathamatics Education. En Lyn D. English and David Kirshner. **Handbook of International Research in Mathematics Education** (Third Edition), (pp. 19-59). New York, NY: Routledge, 2016.

FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO, D.; MONTES, M. Y AGUILAR, A. **Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK**. Documento inédito, 2014.

GALLARDO, A.; PIZÓN, M. Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. **Educación matemática**, 12(2), 81 – 96, 2000.

GODINO, J. Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. **Quadrante**, *2*(1), 9-22, 1993.

KERSTING, N.; GIVVIN, K.; THOMPSON, B.; SANTAGATA, R.; STIGLER, J. W. Measuring usable knowledge teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. **American Educational Research Journal**, *49*(3), 568-589, 2012.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra. En Angel Gutierrez and Paolo Boero. **Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future**, (pp. 11-49). UK: Sense Publishers, 2006.

KIERAN, C.; FILLOY, E. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. **Enseñanza de las Ciencias**, *7*(3), 229-240, 1989.

MATZ, M. Towards a computational Theory of Algebraic Competence. **Journal of Children's Mathematics Behavior**, *3*(1), 93-166, 1980.

MARTÍNEZ, P. El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. **Pensamiento y gestión: Revista de la división de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte**, (20), 165-193, 2006.

PALAREA, M. La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. **Números. Revista de didáctica de las matemáticas**, (40), 3-28, 1999.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, *15*(1), 93-121, 2012.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, *8*(3), 255-281, 2005.

RUANO, R.; SOCAS, M; PALAREA, M. Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. **PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, *2*(2), 61-74, 2008.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. **Plan de estudios 2011**, Educación Básica. México: SEP, 2011.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, *15*(2), 4-14, 1986.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, *57*(1), 1-22, 1987.

SOCAS, M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**, 125-154, 1997.

SOCAS, M. La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. **Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas**, (77), 5-34, 2011.

SOCAS, M.; CAMACHO, M.; HERNANDEZ, J. Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza Secundaria. **Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado**, (32), 73-86, 1998.

SOSA, L. **Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.** Tesis doctoral publicada en http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509, 2011.

SOSA, L.; FLORES-MEDRANO, E.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, 33(2), 173-189, 2015.

STAKE, R. **Investigación con estudio de casos**. Cuarta Edición. Madrid: Morata, S.L, 2007.

URSINI, S.; ESCAREÑO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa**. México, D. F., México: Trillas, 2005.

Texto recebido: 01/08/2019
Texto aprovado: 09/12/2019